Álgebra homológica, día 15

Alexey Beshenov (cadadr@gmail.com)

26 de agosto de 2016

1. Límites directos

Nuestra introducción a la teoría de categorías tiene una omisión importante: no hemos definido límites y colímites en general. Vamos a necesitar un caso especial de los colímites que se llama el límite directo; dedicamos esta sección a las definiciones y propiedades básicas.

1.1. Definición. Supongamos que I es un conjunto con una relación $\preceq$ que es reflexiva ($i \preceq i$), transitiva ($i \preceq j$, $j \preceq k \Rightarrow i \preceq k$), y además para cada $i, j \in I$ existe $k \in I$ tal que $i \preceq k$ y $j \preceq k$.

Sea X_i una familia de objetos de alguna categoría indexada por $i \in I$, y que para cada $i \preceq j$ tenemos un morfismo $f_{ij} \colon X_i \to X_j$. Supongamos que

1) $f_{ii} = \mathrm{id}_{X_i}$ para cada $i \in I$,

2) $f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$ para cada $i \preceq j \preceq k$.

Los objetos X_i con morfismos $f_{ij} \colon X_i \to X_j$ forman un **sistema directo**. El **límite directo** correspondiente es un objeto $\varinjlim_i X_i \in \mathbf{C}$ con morfismos $\phi_i \colon X_i \to \varinjlim_i X_i$ tales que $\phi_i = \phi_j \circ f_{ij}$ para cada $i \preceq j$:

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[rr, "f_{ij}"] \arrow[dr, "\phi_i"'] & & X_j \arrow[dl, "\phi_j"] \\ & \varinjlim_i X_i & \end{tikzcd}$$

Además, se pide la siguiente propiedad universal: si X es otro objeto con flechas $\psi_i \colon X_i \to X$ tales que $\psi_i = \psi_j \circ f_{ij}$ para cada $i \preceq j$, entonces existe un único morfismo $\varinjlim_i X_i \to X$ que conmuta con los morfismos ϕ_i y ψ_i:

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[rr, "f_{ij}"] \arrow[dr, "\phi_i"] \arrow[ddr, "\psi_i"'] & & X_j \arrow[dl, "\phi_j"'] \arrow[ddl, "\psi_j"] \\ & \varinjlim_i X_i \arrow[d, dashed, "\exists!"] & \\ & X & \end{tikzcd}$$

1.2. Ejercicio. *La propiedad universal implica que si $\varinjlim_i X_i$ existe, este es único salvo isomorfismo.*

1.3. Ejemplo. Si la relación $\preceq$ sobre los elementos de I es trivial, es decir tenemos $i \preceq i$ para cada $i \in I$ y ninguna relación entre $i \neq j$, entonces $\varinjlim_i X_i$ es simplemente el coproducto $\coprod_i X_i$. ▲

1.4. Ejercicio. *En la categoría de conjuntos* **Set** *todos los límites directos existen. A saber, si tenemos una colección de conjuntos X_i con morfismos $f_{ij}\colon X_i \to X_j$ como arriba, entonces*

$$\varinjlim_i X_i \cong \coprod_i X_i \Big/ \sim,$$

donde $\sim$ es la relación de equivalencia definida por

$$X_i \ni x_i \sim x_j \in X_j \iff f_{ik}(x_i) = f_{jk}(x_j) \text{ para algún } k \in I.$$

Los morfismos canónicos $\phi_i\colon X_i \to \varinjlim_i X_i$ aplican cada elemento $x_i \in X_i$ en su clase de equivalencia.

*En la categoría de R-***Mód** *los límites directos tienen la misma descripción:*

$$\varinjlim_i M_i \cong \bigoplus_i M_i \Big/ \sim .$$

(El ejercicio consiste en verificar que todo esto está bien definido y satisface la propiedad universal del límite directo.)

1.5. Observación (Funtorialidad de los límites directos). *Supongamos que hay dos sistemas directos*

$$(\{X_i\}_{i\in I},\ \{X_i \to X_j\}_{i\preceq j}) \quad y \quad (\{Y_i\}_{i\in I},\ \{Y_i \to Y_j\}_{i\preceq j})$$

y que los límites directos correspondientes $\varinjlim_i X_i$ y $\varinjlim_i Y_i$ existen, junto con sus familias de morfismos canónicos $\{X_i \to \varinjlim_i X_i\}_{i\in I}$ y $\{Y_i \to \varinjlim_i Y_i\}_{i\in I}$.

Sea $\{f_i\colon X_i \to Y_i\}_{i\in I}$ una familia de morfismos que conmutan con los morfismos $X_i \to X_j$ y $Y_i \to Y_j$:

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d] & Y_i \arrow[d] \\ X_j \arrow[r, "f_j"'] & Y_j \end{tikzcd}$$

Entonces estos morfismos inducen un morfismo canónico entre los límites directos

$$f\colon \varinjlim_i X_i \to \varinjlim_i Y_i$$

que hace conmutar los morfismos f_i:

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d] & Y_i \arrow[d] \\ \varinjlim_i X_i \arrow[r, "f"'] & \varinjlim_i Y_i \end{tikzcd}$$

En las categorías como **Set**, *R-***Mód**, *etc., en términos de clases de equivalencia, este morfismo está definido por*

$$[x_i] \mapsto [f_i(x_i)].$$

Demostración. Podemos considerar la familia de morfismos $\{X_i \xrightarrow{f_i} Y_i \to \varinjlim_i Y_i\}_{i\in I}$, y por la propiedad universal del límite directo $\varinjlim_i X_i$, tenemos un morfismo canónico $\varinjlim_i X_i \to \varinjlim_i Y_i$ que hace conmutar los diagramas:

$$
\begin{tikzcd}
Y_i \arrow[rr] \arrow[dddr, bend right] & & Y_j \arrow[dddl, bend left] \\
X_i \arrow[u, "f_i"] \arrow[rr] \arrow[dr] & & X_j \arrow[u, "f_j"'] \arrow[dl] \\
& \varinjlim_i X_i \arrow[d, dashed, "\exists !"] & \\
& \varinjlim_i Y_i &
\end{tikzcd}
$$

■

1.6. Observación. $\varinjlim$ *es un funtor exacto. A saber, si tenemos sistemas directos de R-módulos* (M'_i, h'_{ij}), (M_i, h_{ij}), (M''_i, h''_{ij}) *y sucesiones exactas*

$$M'_i \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{g_i} M''_i$$

que para cada i que conmutan con los morfismos de los sistemas directos

$$
\begin{tikzcd}
M'_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "h'_{ij}"] & M_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "h_{ij}"] & M''_i \arrow[d, "h''_{ij}"] \\
M'_j \arrow[r, "f_j"'] & M_j \arrow[r, "g_j"'] & M''_j
\end{tikzcd}
\qquad \textit{para cada } i \preceq j,
$$

entonces la sucesión correspondiente

$$\varinjlim_i M'_i \xrightarrow{f} \varinjlim_i M_i \xrightarrow{g} \varinjlim_i M''_i$$

es también exacta.

Demostración. Los morfismos $f\colon \varinjlim_i M'_i \to \varinjlim_i M_i$ y $g\colon \varinjlim_i M_i \to \varinjlim_i M''_i$ están definidos por 1.5.

Tenemos que demostrar que $\operatorname{im} f = \ker g$. Antes de todo, $\operatorname{im} f \subseteq \ker g$ porque para cada $m'_i \in M'_i$ tenemos

$$g \circ f([m'_i]) = g([f_i(m'_i)]) = [g_i \circ f_i(m'_i)] = [0] = 0.$$

Para ver que $\ker g \subseteq \operatorname{im} f$, supongamos que $[m_i] \in \varinjlim_i M_i$ es un elemento tal que $g([m_i]) = [g_i(m_i)] = 0$, es decir $g_i(m_i) \sim 0$. Por la definición de $\sim$, esto significa que para algún $k \in I$ tenemos $h''_{ik} \circ g_i(m_i) = g_k \circ h_{ik}(m_i) = 0$. Pero $\ker g_k = \operatorname{im} f_k$, entonces $h_{ik}(m_i) = f_k(m'_k)$ para algún $m'_k \in M'_k$. Entonces $f([m'_k]) = [f_k(m'_k)] = [m_i]$. ■

Los límites directos $\varinjlim$ también se conocen como **límites inductivos**, y son casos particulares de **colímites**.

Hay otra noción que es dual al límite directo $\varinjlim$: el **límite inverso** $\varprojlim$ (también conocido como **límite proyectivo**, un caso particular de **límites**). Es un funtor exacto por la izquierda pero no exacto por la derecha; en consecuencia existen los funtores derivados por la derecha $R^n \varprojlim$. Es importante no confundir $\varinjlim$ con $\varprojlim$; no vamos a usar este último en nuestro curso.

Los límites directos fueron definidos por primera vez en 1931 por el topólogo soviético Lev Pontriaguin, que no se dio cuenta del concepto dual del límite inverso, que fue introducido por el topólogo checo Eduard Čech en 1932 (*J. Dieudonné, "A History of Algebraic and Differential Topology, 1900–1960", p. 72–74*).

2. Localización

En esta sección voy a revisar una construcción muy importante del álgebra conmutativa: la localización.

2.1. Definición. Sea R un anillo conmutativo y $S \subset R$ un subconjunto. La **localización** $S^{-1}R$ es una R-álgebra conmutativa junto con un morfismo de R-álgebras $\theta\colon R \to S^{-1}R$ tal que

1) $\theta(s)$ es invertible para cada $s \in S$.

2) $S^{-1}R$ tiene la siguiente propiedad universal: si R' es otra R-álgebra conmutativa y $\theta'\colon R \to R'$ es un morfismo de R-álgebras tal que $\theta'(s)$ es invertible in R' para cada $s \in S$, entonces θ' se factoriza de modo único por $S^{-1}R$:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dr, "\theta'"'] & & S^{-1}R \arrow[dl, dashed, "\exists!"] \\ & R' & \end{tikzcd}$$

2.2. Ejercicio.

1) Si la localización existe, es única salvo isomorfismo.

*2) Se puede siempre reemplazar S por el **monoide $\overline{S}$ generado por** S. A saber, $\overline{S}$ es el subconjunto minimal de R tal que $\overline{S} \supseteq S$ y para cualesquiera $x, y \in \overline{S}$ tenemos $xy \in \overline{S}$ y $1 \in \overline{S}$. Entonces $S^{-1}R \cong \overline{S}^{-1}R$. (Demuestre que ambas localizaciones satisfacen la misma propiedad universal.)*

*Cuando $S = \overline{S}$, se dice que S es **multiplicativamente cerrado**.*

3) Si $S = \{s\}$ contiene un elemento, entonces la localización se denota por $R[s^{-1}]$ o R_s. Es la misma cosa que la localización respecto a $S = \{1, s, s^2, \ldots\}$.

Si $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ es un conjunto finito, entonces $S^{-1}R$ es la misma cosa que $R_{s_1 \cdots s_n}$. (Note que Si $s_1 \cdots s_n$ es invertible, entonces $s_i^{-1} = (s_1 \cdots s_n)^{-1} \cdot (s_1 \cdots \widehat{s_i} \cdots s_n)$).

4) Si $\mathfrak{p} \subset R$ es un ideal primo, entonces $S := R \setminus \mathfrak{p}$ es un conjunto multiplicativamente cerrado. La localización correspondiente se denota por $R_\mathfrak{p}$.

2.3. Proposición. *La localización $S^{-1}R$ existe para cualquier $S \subset R$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos que S es multiplicativamente cerrado.

Consideramos la R-álgebra conmutativa libre generada por los elementos de S. En otras palabras, es el anillo de polinomios $R[X]$ en variables $X = \{X_s \mid s \in S\}$. Sea I el ideal de $R[X]$ generado por todos los elementos de la forma $s\,X_s - 1$ y sea $S^{-1}R := R[X]/I$. Tenemos el morfismo

$$\theta\colon R \hookrightarrow R[X] \twoheadrightarrow R[X]/I.$$

Por la definición de I, para cada $s \in S$ el elemento $\theta(s)$ es invertible en $S^{-1}R$; el elemento inverso s^{-1} es precisamente $X_s \pmod{I}$.

Ahora supongamos que hay otra R-álgebra conmutativa R' con morfismo $\theta'\colon R \to R'$ tal que $\theta'(s)$ es invertible para cada $s \in S$. Tenemos que ver que hay un único morfismo de R-álgebras $R[X]/I \to R'$ que da el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dr, "\theta'"'] & & R[X]/I \arrow[dl, dashed, "???"] \\ & R' & \end{tikzcd}$$

Para tener diagrama conmutativo, la flecha punteada debe enviar cada elemento $X_s \pmod I$ a $\theta'(s)^{-1}$. Y de hecho, puesto que $R[X]$ es la R-álgebra libre generada por X_s, entonces existe un único morfismo de R-álgebras $R[X] \to R'$ tal que $X_s \mapsto \theta'(s)^{-1}$, que a su vez induce un morfismo $R[X]/I \to R'$ porque $\theta'(s)$ es invertible para cada $s \in S$. ∎

Las propiedades básicas de $S^{-1}R$ pueden ser demostradas a partir de su propiedad universal, sin usar una construcción particular de $S^{-1}R$.

2.4. Observación. *Supongamos que S es multiplicativamente cerrado. Sea $\theta\colon R \to S^{-1}R$ la localización de R respecto a $S \subset R$. Entonces cada elemento de $S^{-1}R$ puede ser escrito (no necesariamente de modo único) como*

$$\theta(r)\,\theta(s)^{-1} \quad \textit{para algunos } r \in R,\ s \in S.$$

Demostración. Notamos que a priori todos los elementos que admiten tal factorización forman una R-subálgebra $A \subseteq S^{-1}R$ y la imagen de θ es una subálgebra de A. En particular, $\theta(s)$ es invertible en A para cada $s \in S$. Podemos aplicar a A la propiedad universal de $S^{-1}R$:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dr, "\theta"] \arrow[ddr, "\theta"'] & & S^{-1}R \arrow[dl, dashed, "\exists!"'] \arrow[ddl, dashed, "\exists!"] \\ & A \arrow[d, hook] & \\ & S^{-1}R & \end{tikzcd}$$

La flecha punteada $S^{-1}R \to S^{-1}R$ debe ser única; entonces es el morfismo identidad id. Esto implica que la inclusión $A \hookrightarrow S^{-1}R$ es sobreyectiva y $A = S^{-1}R$. ∎

Es más fácil trabajar con localizaciones R_s en un elemento (es decir, respecto a $S = 1, s, s^2, \ldots$) que con localizaciones arbitrarias $S^{-1}R$. De hecho, $S^{-1}R$ es el límite directo de los R_s:

2.5. Observación. *Las localizaciones R_s forman un sistema directo indexado por $s \in S$, tal que*

$$\varinjlim_{s \in S} R_s \cong S^{-1}R.$$

Demostración. Definimos el orden $\preceq$ sobre S como

$$s \preceq t \iff s \mid t, \text{ es decir } t = s\,u \text{ para algún } u \in R.$$

Para cada $s \in R$ tenemos la localización R_s, que puede ser descrita como el álgebra $R[X]/(s\,X - 1)$. Para cada $s \preceq t$ tenemos morfismos de R-álgebras

$$\begin{aligned} f_{st}\colon R_s := R[X]/(sX-1) &\to R_t := R[X]/(tX-1),\\ X &\mapsto u\,X. \end{aligned}$$

Se ve que esta aplicación está bien definida, ya que $t = s\,u$, y que la selección de dicho u no afecta el resultado. Para cada s el morfismo f_{ss} es id_{R_s}, y para $s \preceq s' \preceq s''$ se ve que $f_{s's''} \circ f_{ss'} = f_{ss''}$. En fin, para todo $s, s' \in R$ existe un $t \in R$ tal que $s \preceq t$ y $s' \preceq t$ (se puede tomar $t := s \cdot s'$). Entonces tenemos un sistema directo y podemos tomar el límite directo (en la categoría de R-álgebras conmutativas)

$$\varinjlim_{s\in S} R_s.$$

Los morfismos canónicos $\theta_s\colon R \to R_s$ inducen un morfismo

$$\theta\colon R \to \varinjlim_{s\in S} R_s.$$

Para cada $s \in S$ el elemento $\theta(s)$ es invertible en $\varinjlim_{s\in S} R_s$ porque es invertible en la localización R_s.

Ahora supongamos que existe otra R-álgebra R' con morfismo $\theta'\colon R \to R'$ tal que $\theta'(s)$ es invertible para cada $s \in S$. Entonces por la propiedad universal de cada localización R_s tenemos diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "\theta_s"] \arrow[dr, "\theta'"'] & & R_s \arrow[dl, dashed, "\exists!"] \\ & R' & \end{tikzcd}$$

Esto nos da la el morfismo único

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dr, "\theta'"'] & & \varinjlim_{s\in S} R_s \arrow[dl, dashed, "\exists!"] \\ & R' & \end{tikzcd}$$

■

Un elemento $\theta(r)\,\theta(s)^{-1} \in S^{-1}R$ se escribe normalmente como una "fracción" $\frac{r}{s}$. Notamos que si tenemos $x = \theta(r)\,\theta(s)^{-1}$ y $x' = \theta(r')\,\theta(s')^{-1}$, entonces $x \cdot x' = \theta(r\,r')\,\theta(s\,s')^{-1}$ y $x + x' = \theta(r\,s' + r'\,s)\,\theta(s\,s')$. En términos de fracciones, $\frac{r}{s} \cdot \frac{r'}{s'} = \frac{r \cdot r'}{s\,s'}$ y $\frac{r}{s} + \frac{r'}{s'} = \frac{r\,s' + r'\,s}{s\,s'}$.

Se puede construir la localización $S^{-1}R$ como el anillo formado por las fracciones $\frac{r}{s}$ para $r \in R$ y $s \in S$ y definir la aplicación canónica $R \to S^{-1}R$ como $r \mapsto \frac{r}{1}$. Pero hay que tener cuidado: para las fracciones normales (por ejemplo, números racionales) tenemos $\frac{r}{s} = \frac{r'}{s'}$ si y solamente si $r\,s' - r'\,s = 0$. En nuestro caso esta condición no es suficiente: por ejemplo, si $0 \in S$, entonces en el anillo $S^{-1}R$ el cero es invertible y por lo tanto $S^{-1}R = 0$ y todas las fracciones son iguales. En particular, el morfismo $R \to S^{-1}R$ no es inyectivo en general.

2.6. Proposición. *Como siempre, supongamos que S es multiplicativamente cerrado. Tenemos*

$$\ker(\theta\colon R \to S^{-1}R) = \{r \in R \mid t\,r = 0 \text{ para algún } t \in S\}.$$

Demostración. Si $t\,r = 0$ para algún $t \in S$, entonces en $S^{-1}R$ tenemos $\theta(r) = \theta(t)^{-1}\,\theta(t)\,\theta(r) = \theta(t)^{-1}\,\theta(t\,r) = 0$. Esto demuestra la inclusión "$\supseteq$". Para ver la inclusión "$\subseteq$", primero notamos que límites directos $\varinjlim$ son exactos y en particular preservan núcleos:

$$\ker(\theta\colon R \to \varinjlim_s R_s) = \varinjlim_s \ker(\theta_s\colon R \to R_s).$$

Entonces va a ser suficiente demostrar que para cada $s \in S$ tenemos

$$\ker(\theta_s\colon R \to R_s) = \{r \in R \mid s^n\,r = 0 \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}.$$

Vamos a usar la construcción particular de R_s como $R[X]/(s\,X - 1)$. Si tenemos $\theta_s(r) = 0$, entonces

$$r = f(X) \cdot (s\,X - 1) \in (s\,X - 1),$$

donde $f(X) = \sum_{0 \le i \le d} r_i\,X^i$ es algún polinomio en $R[X]$. De la ecuación de arriba concluimos que

$$r = -r_0,\ s\,r_0 = r_1,\ s\,r_1 = r_2,\ \ldots,\ s\,r_{d-1} = r_d,\ s\,r_d = 0,$$

y por lo tanto $s^{d+1}\,r = 0$. ∎

2.7. Corolario. *El morfismo $R \to S^{-1}R$ es inyectivo si S no contiene divisores de cero.*

2.8. Corolario. *Sin pérdida de generalidad, supongamos que S es multiplicativamente cerrado. En $S^{-1}R$ tenemos $\frac{r}{s} = \frac{r'}{s'}$ si y solamente si $(r\,s' - r'\,s)\,t = 0$ para algún $t \in S$.*

Demostración. $\frac{r}{s} = \frac{r'}{s'}$ es equivalente a $\frac{r}{s} - \frac{r'}{s'} = \frac{r\,s' - r'\,s}{s\,s'} = 0$. Pero $s\,s^{-1}$ es invertible y tenemos $\frac{r\,s' - r'\,s}{1} = 0$ y por lo tanto $(r\,s' - r'\,s)\,t = 0$ para algún $t \in S$ por 2.6.

Si $(r\,s' - r'\,s)\,t = 0$, entonces $\frac{r\,s' - r'\,s}{s\,s'} = \frac{r\,s' - r'\,s}{s\,s'}\,\frac{t}{1}\,\frac{1}{t} = \frac{(r\,s' - r'\,s)\,t}{s\,s'\,t} = 0$. ∎

Esto nos da otra construcción de $S^{-1}R$ en términos de fracciones:

2.9. Ejercicio (Construcción alternativa de la localización: fracciones). *Sin pérdida de generalidad, supongamos que S es multiplicativamente cerrado. Sobre el conjunto $R \times S$ consideramos la relación definida por*

$$(r,s) \sim (r',s') \iff (rs' - r's)\,t = 0 \text{ para algún } t \in S$$

(t es necesario si S tiene divisores de cero).

1) *$\sim$ es una relación de equivalencia.*

2) *Escribamos las clases de equivalencia $[(r,s)] \in R \times S/\sim$ como $\frac{r}{s}$. Estas "fracciones" forman un anillo conmutativo $S^{-1}R$ respecto a las operaciones habituales $\frac{r}{s} \cdot \frac{r'}{s'} := \frac{r \cdot r'}{s \cdot s'}$ y $\frac{r}{s} + \frac{r'}{s'} := \frac{r \cdot s' + r' \cdot s}{s \cdot s'}$. La identidad es la fracción $\frac{1}{1}$ y el cero es la fracción $\frac{0}{1}$.*

3) *El morfismo*

$$\theta\colon R \to S^{-1}R,\quad r \mapsto \frac{r}{1}.$$

satisface la propiedad universal de la localización.

2.10. Ejemplo. Si R es un dominio de integridad y $S = R \setminus \{0\}$, entonces $S^{-1}R \cong \operatorname{Frac} R$ y el morfismo canónico $R \to S^{-1}R$ es un monomorfismo. La construcción de arriba generaliza la construcción del cuerpo de fracciones al caso cuando S es un subconjunto arbitrario, posiblemente con divisores de cero.

Por ejemplo, la localización $\mathbb{Z}_{(p)} := (\mathbb{Z} \setminus (p))^{-1}\mathbb{Z}$ consiste de fracciones $\frac{m}{n}$ donde $p \nmid n$. ▲

2.11. Definición. Si M es un R-módulo, su localización en S es el R-módulo

$$S^{-1}M := M \otimes_R S^{-1}R.$$

Notamos que cada elemento $\sum_i m_i \otimes \frac{r_i}{s_i} \in M \otimes_R S^{-1}R$ puede ser escrito como $m \otimes \frac{1}{s}$ para $m \in M$ y $s \in S$ porque

$$\sum_i m_i \otimes \frac{r_i}{s_i} = \sum_i r_i \cdot m_i \otimes \frac{1}{s_i} = \left(\sum_i (\prod_{j \ne i} s_j) \cdot r_i \cdot m_i \right) \otimes \frac{1}{\prod_i s_i}.$$

2.12. Proposición. *La localización $- \otimes_R S^{-1}R$ es un funtor exacto R-**Mód** $\to S^{-1}R$-**Mód**: cada sucesión exacta de R-módulos*

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

induce una sucesión exacta de $S^{-1}R$-módulos

$$0 \to S^{-1}M' \to S^{-1}M \to S^{-1}M'' \to 0$$

En otras palabras, $S^{-1}R$ es un R-módulo plano.

Demostración. El funtor $- \otimes_R S^{-1}R$ es automáticamente exacto por la derecha; entonces la parte no trivial es que $- \otimes_R S^{-1}R$ sea también exacto por la izquierda. Tenemos que demostrar que un monomorfismo $f \colon M' \to M$ induce un monomorfismo

$$\begin{aligned} f \otimes \mathrm{id} \colon M' \otimes_R S^{-1}R &\to M \otimes_R S^{-1}R, \\ m' \otimes \frac{1}{s} &\mapsto f(m') \otimes \frac{1}{s}. \end{aligned}$$

Nos va a servir una generalización de 2.6:

2.13. Lema. *Para el morfismo canónico*

$$\begin{aligned} \theta_M \colon M &\to M \otimes_R S^{-1}R, \\ m &\mapsto m \otimes 1. \end{aligned}$$

tenemos

$$\ker \theta_M = \{ m \in M \mid t \cdot m = 0 \text{ para algún } t \in S \}$$

(como siempre, se asume que S es multiplicativamente cerrado).

Este lema lo demuestra todo: si tenemos $f(m') \otimes \frac{1}{s} = 0$, entonces $f(m') \otimes 1 = s \cdot (f(m') \otimes \frac{1}{s}) = 0$, y por lo tanto $t \cdot f(m') = f(t \cdot m) = 0$ para algún $t \in S$. Pero f es mono, entonces $t \cdot m' = 0$. Por fin,

$$m' \otimes \frac{1}{s} = \frac{1}{t} (t \cdot m' \otimes \frac{1}{s}) = 0.$$

■

Ahora demostremos lema 2.13. Tenemos $S^{-1}M = \varinjlim_s M_s$ y los límites directos son exactos, de donde es suficiente analizar el caso cuando S contiene un elemento y demostrar que

$$\ker(M \to M_s) = \{m \in M \mid s^n \cdot m = 0 \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}.$$

La inclusión obvia es "$\supseteq$" porque si $s^n \cdot m = 0$, entonces $m \otimes 1 = m \otimes (s^n \cdot \frac{1}{s^n}) = (s^n \cdot m) \otimes \frac{1}{s^n} = 0$. Para ver la otra inclusión, usamos la construcción $R_s \cong R[X]/(s\,X - 1)$. Tenemos una sucesión exacta de R-módulos

$$0 \to (s\,x - 1) \xrightarrow{i} R[X] \xrightarrow{p} R_s \to 0$$

El funtor $M \otimes_R -$ es exacto por la derecha, entonces tenemos una sucesión exacta

$$M \otimes_R (s\,x - 1) \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes i} M \otimes_R R[X] \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes p} M_s \to 0$$

El morfismo $\theta_M \colon M \to M_s$ es la composición

$$M \xrightarrow{m \mapsto m \otimes 1} M \otimes_R R[X] \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes p} M_s$$

y $M \to M \otimes_R R[X]$ es mono (porque $R[X]$ es un R-módulo libre con base $1, X, X^2, \ldots$, de donde es un R-módulo proyectivo, en particular plano). Entonces

$$\ker \theta_M = \{m \in M \mid m \otimes 1 \in \ker(\mathrm{id} \otimes p) = \operatorname{im}(\mathrm{id} \otimes i)\}.$$

Los elementos de $M \otimes_R R[X]$ pueden ser escritos de modo único como

$$x = \sum_{0 \le i \le d} m_i \otimes X^i.$$

Luego $m \in \ker \theta_M$ si y solamente si

$$m \otimes 1 = \left(\sum_{0 \le i \le d} m_i \otimes X^i \right) \cdot (s\,X - 1),$$

y esto implica que

$$m \otimes 1 = -m_0 \otimes 1,\ s \cdot m_0 \otimes X = m_1 \otimes X,\ \ldots,\ s \cdot m_{d-1} \otimes X^d = m_d \otimes X^d,\ s \cdot m_d \otimes X^{d+1} = 0.$$

Finalmente tenemos $s^{d+1} \cdot m \otimes X^{d+1} = 0$ y por lo tanto $s^{d+1} \cdot m = 0$. ■

2.14. Ejemplo. T es un grupo abeliano de torsión (es decir, para cada elemento $x \in T$ existe $n \neq 0$ tal que $n \cdot x = 0$) si y solamente si $T \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$. En una dirección, si T es de torsión, se ve inmediatamente que $T \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$ (¡ejercicio!). En otra dirección, si T no es de torsión, entonces T contiene un subgrupo cíclico isomorfo a $\mathbb{Z}$, y luego $\mathbb{Z} \rightarrowtail T$ induce un monomorfismo $\mathbb{Q} \rightarrowtail T \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, por la exactitud de localización. ▲