Álgebra homológica, día 4

Alexey Beshenov (cadadr@gmail.com)

11 de agosto de 2016

1. Categorías aditivas: objeto cero, adición de morfismos, (bi)productos

1.1. Definición. Una **categoría aditiva A** es una categoría que satisface las siguientes propiedades:

1) Existe un **objeto cero** $0 \in \mathbf{A}$.

2) Cada $\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(M, N)$ admite una estructura de grupo abeliano que es bilineal respecto a la composición:
$$(g + g') \circ f = g \circ f + g' \circ f \quad \text{y} \quad g \circ (f + f') = g \circ f + g \circ f'.$$

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "f'"'] & M \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "g'"'] & N \end{tikzcd}$$

3) Para cada par de objetos M y N existe su producto $M \times N$.

1.2. Ejemplo. Sea R un anillo (no necesariamente conmutativo). Podemos ver R como una categoría donde hay un objeto $*$, cada morfismo $* \to *$ corresponde a algún elemento $r \in R$, y la composición $r \circ s$ corresponde a la multiplicación en R. En particular, $\mathrm{id}_*\colon * \to *$ corresponde a la identidad $1 \in R$. La adición en R corresponde a una estructura de grupo abeliano sobre $\operatorname{Hom}(*, *)$ y es bilineal, por la definición de anillos.

Empero, no es una categoría aditiva: el único objeto $*$ no es objeto cero (a menos que $R = 0$ sea el anillo trivial). ▲

1.3. Ejemplo. En la categoría de R-módulos, los morfismos $\operatorname{Hom}_R(M, N)$ forman un grupo abeliano respecto a la adición “punto por punto”:
$$(f \pm f')(x) := f(x) \pm f'(x).$$
Y esta operación es compatible con la composición de morfismos. Finalmente, para cada pareja M, N de R-módulos se ve que su producto es el R-módulo definido por
$$M \times N = \{(x, y) \mid x \in M,\ y \in N\}$$
con estructura de grupo abeliano $(x, y) + (x', y') := (x + x', y + y')$ y con acción de R definida por $r \cdot (x, y) := (r \cdot x, r \cdot y)$. ▲

1.4. Ejemplo. En la categoría de grupos **Grp** (no necesariamente abelianos), los homomorfismos entre dos grupos no abelianos $\operatorname{Hom}_{\mathbf{Grp}}(G, H)$ no forman un grupo abeliano en ningún sentido natural. Más adelante vamos a ver que de hecho, **Grp** no es una categoría aditiva. ▲

1.5. Observación. *Si una categoría* $\mathbf{A}$ *tiene un objeto cero y si* $\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(M,N)$ *tienen estructura de grupo abeliano, entonces* 0_{MN} *es el cero respecto a esta estructura.*

Demostración. Si $0 \in \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(M,N)$ es el elemento cero respecto a la estructura de grupo abeliano, entonces $0 \circ f = g \circ 0 = 0$ para cada $f\colon M' \to M$ y $g\colon N \to N'$, porque la composición es distributiva respecto a la adición, y por lo tanto $0 \circ f = (0-0) \circ f = 0 \circ f - 0 \circ f = 0$ y $g \circ 0 = g \circ (0-0) = g \circ 0 - g \circ 0 = 0$.

Notamos que $\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(M,0) = \{M \to 0\}$ y $\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(0,N) = \{0 \to N\}$ son grupos abelianos triviales, entonces la composición $M \to 0 \to N$ debe ser el elemento cero en $\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(M,N)$. ∎

1.6. Observación. *En una categoría aditiva, si* $\ker f = 0$*, entonces* f *es un monomorfismo. Si* $\operatorname{coker} f = 0$*, entonces* f *es un epimorfismo.*

Demostración. Si $\ker f = 0$, entonces para dos morfismos $g, g'\colon L \to M$ tales que $f \circ g = f \circ g'$ tenemos $f \circ (g - g') = 0$, y entonces la propiedad universal del núcleo dice que, $g - g'$ se factoriza por 0, y por lo tanto $g - g' = 0$ y $g = g'$. El mismo argumento demuestra que $\operatorname{coker} f = 0$ implica que f es un epimorfismo. ∎

La existencia de la estructura de grupo abeliano sobre $\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(M,N)$ es una propiedad muy fuerte que implica que productos y coproductos binarios son isomorfos:

1.7. Proposición. *Sea* $\mathbf{A}$ *una categoría aditiva. Entonces para cada par de objetos* M, N *las siguientes cosas son isomorfas:*

- *el producto* $M \xleftarrow{p_M} M \times N \xrightarrow{p_N} N$
- *el coproducto* $M \xrightarrow{i_M} M \sqcup N \xleftarrow{i_N} N$
- *el **biproducto*** $M \oplus N$*, que es un objeto junto con morfismos* $M \underset{i_M}{\overset{p_M}{\leftrightarrows}} M \oplus N \underset{i_N}{\overset{p_N}{\rightleftarrows}} N$ *que satisfacen las identidades*

  $$p_M \circ i_M = \mathrm{id}_M, \quad p_N \circ i_N = \mathrm{id}_N, \quad p_N \circ i_M = 0_{MN}, \quad p_M \circ i_N = 0_{NM}, \quad i_M \circ p_M + i_N \circ p_N = \mathrm{id}_{M \oplus N}.$$

  (en particular, i_M *y* i_N *son monomorfismos y* p_N *y* p_M *son epimorfismos.)*

Más precisamente, $M \xleftarrow{p_M} M \oplus N \xrightarrow{p_N} N$ *es un producto,* $M \xrightarrow{i_M} M \oplus N \xleftarrow{i_N} N$ *es un coproducto, y cada producto (coproducto) es un biproducto.*

Demostración. Si $M \oplus N$ es un biproducto, entonces para demostrar que es un producto, para cada objeto L y morfismos $L \xrightarrow{f} M$ y $L \xrightarrow{g} N$ tenemos que ver que existe un morfismo único $\binom{f}{g}\colon L \to M \oplus N$ tal que $p_M \circ \binom{f}{g} = f$ y $p_N \circ \binom{f}{g} = g$.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, shift left, "p_M"', leftarrow] \arrow[r, shift right, "i_M"'] & M \oplus N \arrow[r, shift left, "p_N"] \arrow[r, shift right, "i_N"', leftarrow] & N \\
& L \arrow[ul, "f"] \arrow[u, dashed, "\binom{f}{g}"'] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Notemos que en este caso tendríamos

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \mathrm{id}_{M \oplus N} \circ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = (i_M \circ p_M + i_N \circ p_N) \circ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = i_M \circ f + i_N \circ g,$$

y por lo tanto la única posibilidad es definir

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} := i_M \circ f + i_N \circ g.$$

Luego

$$\begin{aligned}
p_M \circ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} &= p_M \circ (i_M \circ f + i_N \circ g) = \underbrace{p_M \circ i_M}_{=\mathrm{id}} \circ f + \underbrace{p_M \circ i_N}_{=0} \circ g = f, \\
p_N \circ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} &= p_N \circ (i_M \circ f + i_N \circ g) = \underbrace{p_N \circ i_M}_{=0} \circ f + \underbrace{p_N \circ i_N}_{=\mathrm{id}} \circ g = g.
\end{aligned}$$

La demostración de que $M \oplus N$ es un coproducto es similar: para cada objeto L y cada par de morfismos $f\colon M \to L$ y $g\colon N \to L$ existe un morfismo único (f, g) tal que $(f, g) \circ i_M = f$ y $(f, g) \circ i_N = g$.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, shift right, "i_M"'] \arrow[dr, "f"'] & M \oplus N \arrow[l, shift right, "p_M"'] \arrow[r, shift left, "p_N"] \arrow[d, dashed, "(f,g)"] & N \arrow[l, shift left, "i_N"] \arrow[dl, "g"] \\
& L &
\end{tikzcd}$$

De hecho, se ve que la única opción es definir

$$(f, g) := f \circ p_M + g \circ p_N.$$

Ahora tenemos que ver que cada producto $M \times N$ define un biproducto. A saber, por la propiedad universal del producto podemos considerar el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[dl, "\mathrm{id}_M"'] \arrow[d, dashed, "\exists!\ i_M"] \arrow[dr, "0_{MN}"] & \\
M & M \times N \arrow[l, "p_M"'] \arrow[r, "p_N"] & N \\
& N \arrow[ul, "0_{NM}"] \arrow[u, dashed, "\exists!\ i_N"'] \arrow[ur, "\mathrm{id}_N"'] &
\end{tikzcd}$$

Tenemos $p_N \circ i_N = \mathrm{id}_N$, $p_M \circ i_M = \mathrm{id}_M$, $p_M \circ i_N = 0_{NM}$, $p_N \circ i_M = 0_{MN}$. Además, $\mathrm{id}_{M \times N} = i_M \circ p_M + i_N \circ p_N$:

$$\begin{aligned}
p_M \circ \mathrm{id}_{M\times N} &= p_M = \underbrace{p_M \circ i_M}_{=\mathrm{id}} \circ p_M + \underbrace{p_M \circ i_N}_{=0} \circ p_N = p_M \circ (i_M \circ p_M + i_N \circ p_N), \\
p_N \circ \mathrm{id}_{M\times N} &= p_N = \underbrace{p_N \circ i_M}_{=0} \circ p_M + \underbrace{p_N \circ i_N}_{=\mathrm{id}} \circ p_N = p_N \circ (i_M \circ p_M + i_N \circ p_N).
\end{aligned}$$

De modo similar, cada coproducto $M \sqcup N$ es un biproducto:

$$
\begin{tikzcd}
 & M \arrow[dl, "\mathrm{id}_M"'] \arrow[d, "i_M"] \arrow[dr, "0_{MN}"] & \\
M & M \sqcup N \arrow[l, dashed, "p_M", "\exists!"'] \arrow[r, dashed, "p_N", "\exists!"'] & N \\
 & N \arrow[ul, "0_{NM}"] \arrow[u, "i_N"'] \arrow[ur, "\mathrm{id}_N"'] &
\end{tikzcd}
$$

■

1.8. Ejemplo. En la categoría de grupos **Grp** el producto $G \times H$ es el producto de grupos habitual, pero el coproducto es el **producto libre** $G * H$, que es una cosa muy diferente (por ejemplo, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$). Entonces **Grp** no es una categoría aditiva. ▲

A partir de ahora, si **A** es una categoría aditiva, vamos a denotar el producto, coproducto y biproducto de M y N por el mismo símbolo $M \oplus N$, porque es la misma cosa.

1.9. Ejemplo. En la categoría de R-módulos, el producto $M \times N = \{(x, y) \mid x \in M,\ y \in N\}$ es también coproducto y biproducto.

Notemos que en la proposición 1.7 se trata de productos y coproductos *finitos*. Si $\{M_k\}_{k \in I}$ es una familia infinita de R-módulos, se ve que el producto $\prod_k M_k$ es isomorfo al conjunto de sucesiones

$$\prod_k M_k = \{(x_k \in M_k)_{k \in I}\}$$

con la estructura obvia de R-módulo

$$
\begin{aligned}
(x_k)_{k \in I} + (x'_k)_{k \in I} &:= (x_k + x'_k)_{k \in I}, \\
r \cdot (x_k)_{k \in I} &:= (r \cdot x_k)_{k \in I}.
\end{aligned}
$$

Sin embargo, el coproducto $\coprod_k M_k$ no es la misma cosa: es isomorfo al submódulo de $\prod_k M_k$

$$\coprod_k M_k = \{(x_k \in M_k)_{k \in I} \mid x_k = 0 \text{ para cada } k \in I, \text{ excepto un número finito}\}.$$

Entonces, en las categorías abelianas productos infinitos no son la misma cosa que coproductos. ▲

1.10. Ejercicio. *Demuestre que $\prod_k M_k$ definido arriba satisface la propiedad universal de productos en la categoría de R-módulos y que $\coprod_k M_k$ satisface la propiedad universal de coproductos.*

Para R-módulos normalmente $\bigoplus_k M_k$ denota el coproducto $\coprod_k M_k$. Para productos (coproductos, biproductos) finitos se usa la notación $M \oplus N$. Recordamos la notación que hemos usado en la demostración de 1.7:

1.11. Notación. En una categoría aditiva con productos (coproductos, biproductos)

- para morfismos $f\colon L \to M$ y $g\colon L \to N$, el morfismo $\binom{f}{g}\colon L \to M \oplus N$ es el único morfismo que satisface
  $$p_M \circ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = f \quad \text{y} \quad p_N \circ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = g,$$
  y tenemos $\binom{f}{g} = i_M \circ f + i_N \circ g$;

- para morfismos $f\colon M \to L$ y $g\colon N \to L$ el morfismo $(f,g)\colon M \oplus N \to N$ es el único que satisface

  $$(f,g) \circ i_M = f \quad \text{y} \quad (f,g) \circ i_N = g,$$

  y tenemos $(f,g) = f \circ p_M + g \circ p_N$.

1.12. Notación. A veces vamos a usar “matrices”

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} : M_1 \oplus M_2 \to N_1 \oplus N_2.$$

Es el morfismo que está definido de modo único por los cuatro morfismos

$$\begin{aligned}
f_{11} &= p_1 \circ \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \circ i_1 \colon M_1 \to N_1, \\
f_{12} &= p_1 \circ \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \circ i_2 \colon M_2 \to N_1, \\
f_{21} &= p_2 \circ \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \circ i_1 \colon M_1 \to N_2, \\
f_{22} &= p_2 \circ \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \circ i_2 \colon M_2 \to N_2.
\end{aligned}$$

1.13. Ejercicio. *1) La composición de estos morfismos corresponde al producto habitual de matrices:*

$$\underbrace{\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}}_{Y} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} g_{11} \circ f_{11} + g_{12} \circ f_{21} & g_{11} \circ f_{12} + g_{12} \circ f_{22} \\ g_{21} \circ f_{11} + g_{22} \circ f_{21} & g_{21} \circ f_{12} + g_{22} \circ f_{22} \end{pmatrix}}_{Y \cdot X}$$

2) Esta notación con matrices es consistente con nuestras notaciones de arriba: para morfismos $g_1\colon L \to M_1$, $g_2\colon L \to M_2$ y $h_1\colon N_1 \to L$, $h_2\colon N_2 \to L$ tenemos

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} &:= i_1 \circ g_1 + i_2 \circ g_2 \colon L \to M_1 \oplus M_2 \\
(h_1, h_2) &:= h_1 \circ p_1 + h_2 \circ p_2 \colon N_1 \oplus N_2 \to L.
\end{aligned}$$

Las composiciones de estos morfismos con $\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} : M_1 \oplus M_2 \to N_1 \oplus N_2$ corresponden a productos de matrices

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f_{11} \circ g_1 + f_{12} \circ g_2 \\ f_{21} \circ g_1 + f_{22} \circ g_2 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} h_1 \circ f_{11} + h_2 \circ f_{21} & h_1 \circ f_{12} + h_2 \circ f_{22} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

3) Si quieren, pueden generalizar a la situación al caso de un morfismo

$$M_1 \oplus \cdots \oplus M_n \to N_1 \oplus \cdots \oplus N_m$$

que se escribe en términos de una matriz de $m \times n$.

(Indicación: puede ser útil la identidad $\mathrm{id} = i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2$*.)*

En términos de elementos, cuando se trabaja con R-módulos, pensamos en un elemento $x \in M_1 \oplus M_2$ como un vector columna $\binom{m_1}{m_2}$ para $m_1 \in M_1$ y $m_2 \in M_2$, y para aplicar una matriz como arriba, tenemos que multiplicarla por la izquierda a $\binom{m_1}{m_2}$:

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} (x) = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11}(m_1) + f_{12}(m_2) \\ f_{21}(m_1) + f_{22}(m_2) \end{pmatrix}.$$

Aquí seguimos la tradición del álgebra lineal de escribir la acción de las matrices por la izquierda, de modo que los vectores son columnas. Muchos algebristas prefieren usar vectores fila y la acción de matrices por la derecha; en su notación todas nuestras matrices están transpuestas.

Terminamos con una observación importante: si tenemos una categoría con productos y coproductos y alguna estructura de grupos abelianos sobre $\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(M,N)$, tal estructura es rígida. En efecto, la adición de morfismos es una propiedad intrínseca de la categoría, porque $f+f'$ se expresa como composición de morfismos definidos por las propiedades universales de productos (coproductos, biproductos):

1.14. Observación. *Para cualquier categoría aditiva* $\mathbf{A}$ *con productos (coproductos, biproductos) el morfismo* $f+f'$ *es la composición*

$$M \xrightarrow{\Delta_M} M \oplus M \xrightarrow{f \oplus f'} N \oplus N \xrightarrow{\nabla_N} N$$

donde

- $\Delta_M := \binom{\mathrm{id}_M}{\mathrm{id}_M}$ *es el* ***morfismo diagonal****.*
- $\nabla_N := (\mathrm{id}_N, \mathrm{id}_N)$ *es el* ***morfismo codiagonal****.*
- $f \oplus f' := \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f' \end{pmatrix}$.

Demostración.

$$\nabla_N \circ (f \oplus f') \circ \Delta_M = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_N & \mathrm{id}_N \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f' \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \mathrm{id}_M \\ \mathrm{id}_M \end{pmatrix} = f + f'.$$

∎

2. Funtores aditivos

2.1. Definición. Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son dos categorías aditivas, entonces se dice que un funtor $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es **aditivo** si las aplicaciones correspondientes

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(M,N) &\to \operatorname{Hom}_{\mathbf{B}}(F(M),F(N)), \\ f &\mapsto F(f) \end{aligned}$$

son homomorfismos de grupos abelianos.

Hay otra caracterización de los funtores aditivos que suele ser más fácil de verificar:

2.2. Observación. $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *es aditivo si y solamente si* F *preserva (co)productos, es decir para cada* $M, N \in \mathbf{A}$ *tenemos isomorfismos naturales*

$$F(M \oplus N) \cong F(M) \oplus F(N).$$

Demostración. El biproducto

$$M \underset{i_M}{\overset{p_M}{\leftrightarrows}} M \oplus N \underset{i_N}{\overset{p_N}{\rightleftarrows}} N$$

se caracteriza por las identidades

$$p_M \circ i_M = \mathrm{id}_M, \quad p_N \circ i_N = \mathrm{id}_N, \quad p_N \circ i_M = 0_{MN}, \quad p_M \circ i_N = 0_{NM}, \quad i_M \circ p_M + i_N \circ p_N = \mathrm{id}_{M \oplus N}.$$

Si F es aditivo, entonces aplicando F al diagrama de arriba se obtiene el biproducto

$$F(M) \underset{F(i_M)}{\overset{F(p_M)}{\leftrightarrows}} F(M \oplus N) \underset{F(i_N)}{\overset{F(p_N)}{\rightleftarrows}} F(N)$$

con identidades

$$\begin{aligned}
F(p_M) \circ F(i_M) &= \mathrm{id}_{F(M)},\\
F(p_N) \circ F(i_N) &= \mathrm{id}_{F(N)},\\
F(p_N) \circ F(i_M) &= 0_{F(M)F(N)},\\
F(p_M) \circ F(i_N) &= 0_{F(N)F(M)},\\
F(i_M) \circ F(p_M) + F(i_N) \circ F(p_N) &= \mathrm{id}_{F(M \oplus N)}.
\end{aligned}$$

Entonces, $F(M \oplus N) \cong F(M) \oplus F(N)$. Finalmente, 1.14 demuestra que si F preserva (co)productos, entonces F preserva la adición de morfismos. ■

2.3. Ejemplo. Hemos observado en la segunda lección que para cada categoría $\mathbf{C}$ tenemos funtores

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, -)\colon \mathbf{C} \to \mathbf{Set} \quad \text{y} \quad \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-, X)\colon \mathbf{C}^\circ \to \mathbf{Set}.$$

Ahora si tenemos una categoría aditiva $\mathbf{A}$, entonces $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(M, N)$ son grupos abelianos, y de hecho, si $f\colon N \to N'$ y $g\colon M \to M'$ son morfismos en $\mathbf{A}$, se ve que los morfismos correspondientes

$$f_*\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(M, N) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(M, N') \quad \text{y} \quad g^*\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(M', N) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(M, N)$$

son homomorfismos de grupos abelianos (porque la composición es distributiva respecto a la suma de morfismos). Entonces tenemos funtores

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(M, -)\colon \mathbf{A} \to \mathbf{Ab} \quad \text{y} \quad \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(-, M)\colon \mathbf{A}^\circ \to \mathbf{Ab}.$$

Son aditivos porque

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(-, N \oplus N') \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(-, N) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(-, N'), \quad \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(M \oplus M', -) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(M, -) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(M', -)$$

(porque en general $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-, \prod_i X_i) \cong \prod_i \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-, X_i)$ y $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\coprod_i X_i, -) \cong \prod_i \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X_i, -)$ en cualquier categoría $\mathbf{C}$). ▲

3. Funtores adjuntos y funtores aditivos

Recordemos que tenemos adjunciones

$$\operatorname{Hom}_R(L\otimes_R M, N) \cong \operatorname{Hom}_R(L, \underline{\operatorname{Hom}}_R(M,N)),$$
$$\operatorname{Hom}_R(M\otimes_R L, N) \cong \operatorname{Hom}_R(L, \underline{\operatorname{Hom}}_R(M,N)),$$
$$\operatorname{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Mód}^\circ}(\underline{\operatorname{Hom}}_R(L,N), M) \cong \operatorname{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Mód}}(L, \underline{\operatorname{Hom}}_R(M,N)).$$

Entonces la teoría general implica que $-\otimes_R M$ y $M\otimes_R -$ preservan coproductos, $\underline{\operatorname{Hom}}_R(M,-)$ preserva productos, y el funtor contravariante $\underline{\operatorname{Hom}}_R(-,N)\colon R\text{-}\mathbf{Mód}^\circ \to R\text{-}\mathbf{Mód}$ preserva productos en $R\text{-}\mathbf{Mód}^\circ$, es decir, convierte coproductos de R-módulos en productos. En una categoría aditiva productos y coproductos finitos coinciden con biproductos, por lo que tenemos isomorfismos naturales

$$(M\oplus M')\otimes_R N \cong (M\otimes_R N)\oplus(M'\otimes_R N),$$
$$M\otimes_R(N\oplus N') \cong (M\otimes_R N)\oplus(M\otimes_R N'),$$
$$\underline{\operatorname{Hom}}_R(M, N\oplus N') \cong \underline{\operatorname{Hom}}_R(M,N)\oplus\underline{\operatorname{Hom}}_R(M,N'),$$
$$\underline{\operatorname{Hom}}_R(M\oplus M', N) \cong \underline{\operatorname{Hom}}_R(M,N)\oplus\underline{\operatorname{Hom}}_R(M',N).$$

Esto quiere decir que $-\otimes_R N$, $M\otimes_R -$, $\underline{\operatorname{Hom}}_R(M,-)$, $\underline{\operatorname{Hom}}_R(-,N)$ son funtores aditivos. En general tenemos la siguiente

3.1. Observación. *Sean $F\colon \mathbf{A}\to\mathbf{B}$ y $G\colon \mathbf{B}\to\mathbf{A}$ dos funtores adjuntos entre categorías aditivas $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$:*

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{B}}(F(M),N) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(M, G(N)).$$

Entonces

1) *F y G son automáticamente funtores aditivos;*

2) *la biyección natural de arriba es automáticamente un isomorfismo de grupos abelianos.*

Demostración. En efecto, como adjunto por la izquierda, F preserva coproductos (y por lo tanto productos, biproductos); como adjunto por la derecha, G preserva productos (y por lo tanto coproductos, biproductos).

Luego, como hemos observado en la última lección, la biyección es dada por

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{B}}(F(M),N) \to \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(M, G(N)),$$
$$f \mapsto G(f)\circ\eta_X.$$

Pero aquí G es un funtor aditivo, entonces $G(f+f') = G(f)+G(f')$. Y ya que η_X es un morfismo en la categoría aditiva $\mathbf{A}$, se sigue que $(G(f)+G(f'))\circ\eta_X = G(f)\circ\eta_X + G(f')\circ\eta_X$. ■

3.2. Ejercicio. 1) *Describa explícitamente los isomorfismos naturales*

$$(M\oplus M')\otimes_R N \cong (M\otimes_R N)\oplus(M'\otimes_R N),$$
$$M\otimes_R(N\oplus N') \cong (M\otimes_R N)\oplus(M\otimes_R N'),$$
$$\underline{\operatorname{Hom}}_R(M, N\oplus N') \cong \underline{\operatorname{Hom}}_R(M,N)\oplus\underline{\operatorname{Hom}}_R(M,N'),$$
$$\underline{\operatorname{Hom}}_R(M\oplus M', N) \cong \underline{\operatorname{Hom}}_R(M,N)\oplus\underline{\operatorname{Hom}}_R(M',N).$$

2) *Verifique directamente que para los funtores* $\underline{\mathrm{Hom}}_R(M,-)$ *y* $\underline{\mathrm{Hom}}_R(-,N)$ *tenemos*

$$(f+g)_* = f_* + g_*, \quad (f+g)^* = f^* + g^*,$$

y que para los funtores $-\otimes_R N$ *y* $M \otimes_R -$

$$(f_1+f_2)\otimes \mathrm{id}_N = (f_1\otimes \mathrm{id}_N) + (f_2\otimes \mathrm{id}_N), \quad \mathrm{id}_M \otimes (g_1+g_2) = (\mathrm{id}_M\otimes g_1) + (\mathrm{id}_M \otimes g_2).$$