Números de Bernoulli y números de Stirling

Alexey Beshenov (cadadr@gmail.com)

2 de Marzo de 2017

Digresión combinatoria: los números de Stirling

Nuestro próximo objetivo es obtener algunas expresiones para los números de Bernoulli que permitan estudiar sus propiedades aritméticas, específicamente sus numeradores y denominadores. En el camino surgen ciertos números combinatorios, conocidos como los **números de Stirling**.

Definición. *Sean k y ℓ dos números naturales positivos.*

*El **número de Stirling de primera clase** $\left[{k \atop \ell}\right]$ es el número de permutaciones en el grupo simétrico S_k que consisten en ℓ ciclos disjuntos.*

*El **número de Stirling de segunda clase** $\left\{{k \atop \ell}\right\}$ es el número de posibilidades de escribir un conjunto de k elementos como una unión disjunta de ℓ conjuntos no vacíos.*

Ejemplo. $\left[{4 \atop 2}\right] = 11$. *Las permutaciones correspondientes en S_4 son*

$$\begin{gathered} (1)\,(2\,3\,4),\ (1)\,(2\,4\,3),\ (2)\,(1\,3\,4),\ (2)\,(1\,4\,3),\\ (3)\,(1\,2\,4),\ (3)\,(1\,4\,2),\ (4)\,(1\,2\,3),\ (4)\,(1\,3\,2),\\ (1\,2)\,(3\,4),\ (1\,3)\,(2\,4),\ (1\,4)\,(2\,3). \end{gathered}$$

▲

Ejemplo. $\left\{{4 \atop 2}\right\} = 7$. *Las descomposiciones de conjuntos correspondientes son*

$$\begin{aligned} \{1,2,3,4\} &= \{1\} \cup \{2,3,4\} = \{2\} \cup \{1,3,4\} = \{3\} \cup \{1,2,4\} = \{4\} \cup \{1,2,3\}\\ &= \{1,2\} \cup \{3,4\} = \{1,3\} \cup \{2,4\} = \{1,4\} \cup \{2,3\}. \end{aligned}$$

▲

De la definición se siguen las identidades

$$\begin{bmatrix} k \\ \ell \end{bmatrix} = 0 \quad \text{para } \ell > k, \tag{1}$$

$$\begin{bmatrix} k \\ k \end{bmatrix} = 1, \tag{2}$$

$$\begin{bmatrix} k \\ 1 \end{bmatrix} = (k-1)!, \tag{3}$$

$$\sum_{1 \le \ell \le k} \begin{bmatrix} k \\ \ell \end{bmatrix} = k!, \tag{4}$$

$$\begin{bmatrix} k+1 \\ \ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ \ell-1 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} k \\ \ell \end{bmatrix}, \tag{5}$$

(6)

$$\begin{Bmatrix} k \\ \ell \end{Bmatrix} = 0 \quad \text{para } \ell > k, \tag{7}$$

$$\begin{Bmatrix} k \\ k \end{Bmatrix} = 1, \tag{8}$$

$$\begin{Bmatrix} k \\ 1 \end{Bmatrix} = 1, \tag{9}$$

$$\sum_{1 \le \ell \le k} \begin{Bmatrix} k \\ \ell \end{Bmatrix} = b(k), \tag{10}$$

$$\begin{Bmatrix} k+1 \\ \ell \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k \\ \ell-1 \end{Bmatrix} + \ell \begin{Bmatrix} k \\ \ell \end{Bmatrix}. \tag{11}$$

(2) significa que la única permutación en S_k que se descompone en el producto de k ciclos disjuntos es la permutación identidad. (3) significa que en S_k hay $(k-1)!$ diferentes k-ciclos (¿por qué?).

(4) es el hecho de que toda permutación puede descomponerse en un producto de ciclos disjuntos. (10) es el análogo de esta identidad: el número total de particiones se conoce como el **número de Bell** $b(k)$. Los primeros números de Bell son $b(1) = 1$, $b(2) = 2$, $b(3) = 5$, $b(4) = 15$, $b(5) = 52$, $b(6) = 203, \ldots$; véase `http://oeis.org/A000110` En este curso, no vamos estudiar estos números (también porque la notación parece mucho a los números de Bernoulli :-)

Las recurrencias (5) y (11) se siguen de la definición combinatoria. Por ejemplo, en (5), consideremos las permutaciones de elementos $\{1, \ldots, k, k+1\}$. Sea $\sigma \in S_{k+1}$ una permutación que se descompone en el producto de ℓ ciclos disjuntos. Si $\sigma(k+1) = k+1$, entonces $(k+1)$ forma un ciclo por sí mismo, y para el resto de los elementos hay $\left[{k \atop \ell-1}\right]$ posibles descomposiciones. Si $\sigma(k+1) \neq k+1$, entonces $k+1$ pertenece a algún ciclo. Para enumerar todas las posibilidades, podemos primero considerar $\left[{k \atop \ell}\right]$ descomposiciones de las permutaciones de $\{1, \ldots, k\}$ en ℓ ciclos disjuntos, y luego para cada descomposición hay k posibilidades de poner $k+1$ en uno de los ciclos. La fórmula (11) se explica de la misma manera: si tenemos un conjunto X de $k+1$ elementos, podemos considerar un elemento $x \in X$. Para las descomposiciones de X en la unión de ℓ subconjuntos hay dos casos: o bien $\{x\}$ forma un conjunto en la descomposición, y quedan $\left\{{k \atop \ell-1}\right\}$ posibilidades para descomponer $X \setminus \{x\}$; o bien x pertenece a algún conjunto. En el segundo caso, hay $\left\{{k \atop \ell}\right\}$ posibilidades de descomponer $X \setminus \{x\}$ en ℓ subconjuntos, y luego en cada caso hay ℓ posibilidades de poner x en uno de los conjuntos.

También será útil definir ${k \brack \ell}$ y ${k \brace \ell}$ para $k, \ell = 0$:

Definición.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1, \quad \begin{bmatrix} k \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \ell \end{bmatrix} = 0 \textit{ para } k, \ell \neq 0,$$
$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 1, \quad \begin{Bmatrix} k \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \ell \end{Bmatrix} = 0 \textit{ para } k, \ell \neq 0.$$

Podemos definir ${k \brack \ell}$ y ${k \brace \ell}$ por los valores iniciales de arriba y las relaciones de recurrencia (5) y (11). Esta definición es compatible con la primera. Por ejemplo, en el caso de ${k \brack \ell}$, podemos ver que las identidades

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1, \quad \begin{bmatrix} k \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \ell \end{bmatrix} = 0 \text{ para } k, \ell \neq 0$$

implican

$$\begin{bmatrix} k \\ 1 \end{bmatrix} = (k-1)! \text{ para } k \geq 1, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ \ell \end{bmatrix} = 0 \text{ para } \ell \geq 1.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} k \\ 1 \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} k \\ 0 \end{bmatrix}}_{0} + (k-1) \begin{bmatrix} k-1 \\ 1 \end{bmatrix} = (k-1)\,(k-2) \begin{bmatrix} k-2 \\ 1 \end{bmatrix} = \cdots \\ &= (k-1)\,(k-2) \cdots 2 \cdot 1 \left(\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{1} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{0} \right) = (k-1)! \end{aligned}$$

y para $\ell > 1$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \ell-1 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \ell \end{bmatrix} = 0.$$

En PARI/GP, `stirling(k,l,2)` $= {k \brace \ell}$ (el parametro “2” significa “de segunda clase”):

```
? stirling (4,2,2)
% = 7
```

PARI/GP usa otra definición de los números de Stirling de primera clase. La única diferencia es el signo: `stirling(k,l)` $= (-1)^{k-\ell} {k \brack \ell}$:

```
? stirling (4,2)
% = 11
? stirling(4,3)
% = -6
```

Ejercicio. *Demuestre que* ${k \brack k-1} = \binom{k}{2}$.

Ejercicio. *Note que las recurrencias de arriba con los valores iniciales para $k, \ell = 0$ nos permiten definir ${k \brack \ell}$ y ${k \brace \ell}$ para todo $k, \ell \in \mathbb{Z}$. Demuestre que*

$$\begin{bmatrix} k \\ \ell \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\ell \\ -k \end{Bmatrix}.$$

Esto significa que los números de Stirling de primera y de segunda clase son esencialmente el mismo objeto.

Ejercicio. *Demuestre que* $\left\{{k \atop \ell}\right\} = 0$ *para* $k\ell < 0$.

(Los últimos dos ejercicios sirven solo para acostumbrarse a las recurrencias con $\left[{k \atop \ell}\right]$ y $\left\{{k \atop \ell}\right\}$; no vamos a usar los números de Stirling para k y ℓ negativos.)

$k \backslash \ell$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	2	3	1						
4	0	6	11	6	1					
5	0	24	50	35	10	1				
6	0	120	274	225	85	15	1			
7	0	720	1764	1624	735	175	21	1		
8	0	5040	13068	13132	6769	1960	322	28	1	
9	0	40320	109584	118124	67284	22449	4536	546	36	1

Valores de $\left[{k \atop \ell}\right]$

$k \backslash \ell$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	1	3	1						
4	0	1	7	6	1					
5	0	1	15	25	10	1				
6	0	1	31	90	65	15	1			
7	0	1	63	301	350	140	21	1		
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1	
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1

Valores de $\left\{{k \atop \ell}\right\}$

Relación entre B_k y los números de Stirling

Lema. *Para todo $\ell \geq 0$*

$$\frac{(e^t-1)^\ell}{\ell!} = \sum_{k\geq \ell} \left\{ {k \atop \ell} \right\} \frac{t^k}{k!}.$$

Demostración. Tenemos que verificar que

$$\frac{d^k}{dt^k}\left(\frac{(e^t-1)^\ell}{\ell!}\right)(0) = \left\{ {k \atop \ell} \right\}.$$

Los valores iniciales coinciden, y va a ser suficiente demostrar que la recurrencia

$$\left\{ {k+1 \atop \ell} \right\} = \left\{ {k \atop \ell-1} \right\} + \ell \left\{ {k \atop \ell} \right\}$$

se cumple en nuestro caso:

$$\frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}}\left(\frac{(e^t-1)^\ell}{\ell!}\right)(0) = \frac{d^k}{dt^k}\left(\frac{(e^t-1)^{\ell-1}}{(\ell-1)!}\right)(0) + \ell\,\frac{d^k}{dt^k}\left(\frac{(e^t-1)^\ell}{\ell!}\right)(0).$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}}\left(\frac{(e^t-1)^\ell}{\ell!}\right) &= \frac{d^k}{dt^k}\left(\frac{(e^t-1)^{\ell-1}}{(\ell-1)!}\,e^t\right) = \frac{d^k}{dt^k}\left(\frac{(e^t-1)^{\ell-1}\,(1+e^t-1)}{(\ell-1)!}\right)\\
&= \frac{d^k}{dt^k}\left(\frac{(e^t-1)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} + \frac{(e^t-1)^\ell}{(\ell-1)!}\right)\\
&= \frac{d^k}{dt^k}\left(\frac{(e^t-1)^{\ell-1}}{(\ell-1)!}\right) + \ell\,\frac{d^k}{dt^k}\left(\frac{(e^t-1)^\ell}{\ell!}\right).
\end{aligned}$$

∎

Ejercicio. *Demuestre la identidad*

$$\frac{(-\ln(1-t))^\ell}{\ell!} = \sum_{k\geq \ell} \left[{k \atop \ell} \right] \frac{t^k}{k!}.$$

(De nuevo, es suficiente considerar las derivadas formales y verificar que se cumple la misma recurrencia que define los números de Stirling correspondientes: $\left[{k+1 \atop \ell} \right] = \left[{k \atop \ell-1} \right] + k \left[{k \atop \ell} \right]$.)

Lo que acabamos de ver son las funciones generatrices para los números de Stirling, pero no soy tan sádico para dar esto como la definición de $\left\{ {k \atop \ell} \right\}$ y $\left[{k \atop \ell} \right]$.

Lema. *Para $k, \ell \geq 0$*

$$\left\{ {k \atop \ell} \right\} = \frac{(-1)^\ell}{\ell!} \sum_{0\leq i\leq \ell} (-1)^i \binom{\ell}{i} i^k.$$

Demostración. De nuevo, podemos verificar que los valores iniciales coinciden y la suma satisface la misma recurrencia que $\left\{ {k \atop \ell} \right\}$:

$$\left\{ {k+1 \atop \ell} \right\} = \left\{ {k \atop \ell-1} \right\} + \ell \left\{ {k \atop \ell} \right\}.$$

Para los valores iniciales, si $k = \ell = 0$, la suma nos da $\left\{{0 \atop 0}\right\} = 1$ (como siempre en el contexto algebraico/combinatorio, $0^0 = 1$); si $k > 0$, $\ell = 0$, la suma nos da 0; si $k = 0$, $\ell > 0$, la suma también nos da $\sum_{0\le i\le \ell}(-1)^i \binom{\ell}{i} = 0$. Para la recurrencia,

$$\begin{aligned}
\frac{(-1)^\ell}{\ell!} \sum_{0\le i\le \ell} (-1)^i \binom{\ell}{i} i^{k+1} &= \frac{(-1)^\ell}{(\ell-1)!} \sum_{0\le i\le \ell} (-1)^i \frac{i}{\ell} \binom{\ell}{i} i^k \\
&= \frac{(-1)^\ell}{(\ell-1)!} \sum_{0\le i\le \ell} (-1)^i \left(\binom{\ell}{i} - \binom{\ell-1}{i}\right) i^k \\
&= \frac{(-1)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} \sum_{0\le i\le \ell-1} (-1)^i \binom{\ell-1}{i} i^k + \ell\, \frac{(-1)^\ell}{\ell!} \sum_{0\le i\le \ell} (-1)^i \binom{\ell}{i} i^k.
\end{aligned}$$

Aquí hemos usado la identidad

$$\binom{\ell}{i} - \binom{\ell-1}{i} = \frac{i}{\ell}\binom{\ell}{i}.$$

■

Teorema.

$$B_k = (-1)^k \sum_{0\le \ell\le k} \frac{(-1)^\ell\, \ell!\, \left\{{k \atop \ell}\right\}}{\ell+1} = (-1)^k \sum_{0\le \ell\le k} \frac{1}{\ell+1} \sum_{0\le i\le \ell} (-1)^i \binom{\ell}{i} i^k.$$

La segunda igualdad viene de la expresión de los números de Stirling en términos de los coeficientes binomiales y (¡por fin!) nos da una expresión para B_k sin recurrencias.

Demostración. La función generatriz para B_k es $\frac{t\,e^t}{e^t-1}$. Ya que la exponencial y el logaritmo formales son inversos, podemos escribir

$$\frac{t\,e^t}{e^t-1} = \frac{t}{1-e^{-t}} = \frac{-\ln(1-(1-e^{-t}))}{1-e^{-t}}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\frac{-\ln(1-(1-e^{-t}))}{1-e^{-t}} &= \frac{1}{1-e^{-t}} \sum_{\ell\ge 1} \frac{(1-e^{-t})^\ell}{\ell} \\
&= \sum_{\ell\ge 1} \frac{(1-e^{-t})^{\ell-1}}{\ell} \\
&= \sum_{\ell\ge 0} \frac{(-1)^\ell\,\ell!}{\ell+1} \sum_{k\ge \ell} \left\{{k \atop \ell}\right\} \frac{(-t)^k}{k!} \quad \text{por} \\
&= \sum_{k\ge 0} (-1)^k \left(\sum_{0\le \ell\le k} \frac{(-1)^\ell\,\ell!\,\left\{{k \atop \ell}\right\}}{\ell+1} \right) \frac{t^k}{k!}.
\end{aligned}$$

■

```
? bernbin (k) = (-1)^k * sum (l=0,k, 1/(l+1)*sum(i=0,l, (-1)^i*binomial(l,i)*i^k));
? vector (10,k,bernbin(k))
% = [1/2, 1/6, 0, -1/30, 0, 1/42, 0, -1/30, 0, 5/66]
```