Álgebra I. Tarea 5: Homomorfismos de grupos
Universidad de El Salvador. Fecha límite: 9.05.2018

Por cualquier pregunta, no duden en contactarme por correo electrónico cadadr@gmail.com.

Ejercicio 5.1. *Sea R un anillo conmutativo. Para una matriz invertible $A \in \mathrm{GL}_n(R)$ definamos su matriz **transpuesta inversa** por $A^{-t} := (A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$. Demuestre que la aplicación $A \mapsto A^{-t}$ es un automorfismo $\mathrm{GL}_n(R) \to \mathrm{GL}_n(R)$.*

Ejercicio 5.2. *Sea G cualquier grupo, $\mathbb{Z}$ el grupo aditivo de los números enteros y $\mathbb{Q}$ el grupo aditivo de los números racionales.*

1) *Demuestre que todo homomorfismo $f\colon \mathbb{Z} \to G$ está definido de modo único por el valor de $f(1) \in G$. Esto nos da una biyección natural*
$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G) \xrightarrow{\cong} G, \quad f \mapsto f(1),$$
donde $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G)$ es el conjunto de homomorfismos $\mathbb{Z} \to G$.

2) *Demuestre que todo homomorfismo $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ del grupo aditivo de los números racionales está definido de modo único por el valor $f(1) \in \mathbb{Q}$. Esto nos da una biyección natural*
$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Q}, \quad f \mapsto f(1),$$
donde $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q})$ es el conjunto de homomorfismos $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$.

Ejercicio 5.3.

1) *Encuentre los grupos $\ker f$ e $\operatorname{im} f$ para el homomorfismo*
$$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, \quad x \mapsto nx$$
donde $n = 2, 3, 4, 5$.

2) *Calcule los grupos $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ y $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$.*

Ejercicio 5.4. *Consideremos el conjunto de matrices*
$$G := \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R},\ x^2 + y^2 > 0 \right\}.$$
Demuestre que es un subgrupo de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ que es isomorfo a $\mathbb{C}^\times$.

Ejercicio 5.5. *Encuentre isomorfismos de grupos $D_3 \cong S_3 \cong \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$. ¿Puede haber isomorfismos $D_n \cong S_n$ para $n \neq 3$? ¿$S_n \cong \mathrm{GL}_m(\mathbb{F}_p)$?*

Ejercicio 5.6. *Demuestre que los grupos $\mathbb{R}^\times$ y $\mathbb{C}^\times$ no son isomorfos.*

Ejercicio 5.7. *Asociemos a cada elemento del grupo de cuaterniones Q_8 una matriz compleja de la siguiente manera:*
$$\pm 1 \mapsto \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}, \quad \pm i \mapsto \begin{pmatrix} \pm\sqrt{-1} & 0 \\ 0 & \mp\sqrt{-1} \end{pmatrix},$$
$$\pm j \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \mp 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \pm k \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \pm\sqrt{-1} \\ \pm\sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$
Demuestre que esta correspondencia es un monomorfismo $Q_8 \rightarrowtail \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.

Ejercicio 5.8. *Consideremos las* ***matrices triangulares superiores invertibles*** *(es decir, las matrices invertibles que tienen ceros debajo de la diagonal) y las matrices diagonales invertibles. Note que en ambos casos se tiene un subgrupo de* $\mathrm{GL}_n(R)$. *Demuestre que la aplicación*

$$\begin{pmatrix} * & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}$$

que deja las entradas diagonales intactas y aplica el resto de las entradas a 0 *es un homomorfismo de grupos.*

Ejercicio 5.9. *La función exponencial puede ser definida para cualquier matriz* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *mediante la serie habitual* $e^A := \sum_{n\ge 0} \frac{1}{n!} A^n$, *donde* $A^n := \underbrace{A\cdots A}_{n}$ *son productos de matrices iterados. Esta serie siempre converge a alguna matriz invertible. Demuestre que para* $n > 1$ *la exponencial no es un homomorfismo* $M_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$*; es decir, en general* $e^{A+B} \ne e^A \cdot e^B$.

Indicación: considere $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 5.10. *En los ejercicios para el capítulo anterior hemos mencionado el grupo de matrices ortogonales*

$$O_n(k) = \{A \in \mathrm{GL}_n(k) \mid A^t\, A = A\, A^t = I\}.$$

1) *Demuestre que el determinante de una matriz ortogonal es igual a* ± 1.

   Indicación: el determinante es un homomorfismo y $\det A^t = \det A$.

2) *Demuestre que las matrices ortogonales de determinante* $+1$ *forman un subgrupo*

   $$SO_n(k) := \{A \in \mathrm{GL}_n(k) \mid A^t\, A = A\, A^t = I,\ \det A = +1\} \subset O_n(k).$$

   Este se llama el ***grupo ortogonal especial***.

3) *Demuestre que el grupo* $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ *es isomorfo al grupo del círculo* $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.