Universidad de El Salvador. 27.10.2018
Álgebra II. Examen parcial 1 (repetido)

Problema 1 (2 puntos)**.** Sea $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ el anillo de las funciones continuas $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con operaciones punto por punto.

1) ¿Es un dominio de integridad? Justifique su respuesta. [*1 punto*]

2) Para cualquier $x \in \mathbb{R}$ demuestre que

$$\mathfrak{m}_x := \{\text{funciones continuas } f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$$

es un ideal maximal en $\mathcal{C}(\mathbb{R})$. [*1 punto*]

Problema 2 (2 puntos)**.**

1) Demuestre que para cualquier cuerpo k el anillo de polinomios $k[X]$ *no es* local. [*1 punto*]

2) Demuestre que el anillo de series de potencias $\mathbb{Z}[\![X]\!]$ *no es* local. [*1 punto*]

Problema 3 (2 puntos)**.** Determine si el ideal generado por el polinomio $X^2 + 1$ es maximal en el anillo

$$\mathbb{R}[X], \quad \mathbb{C}[X], \quad \mathbb{Z}[X], \quad \mathbb{F}_2[X].$$

[$\frac{1}{2}$ *punto por cada respuesta correcta y justificada*]

Problema 4 (2 puntos)**.** Sea R un anillo conmutativo. Denotemos por

$$N(R) := \{x \in R \mid x^n = 0 \text{ para algún } n = 1, 2, 3, \ldots\}$$

el nilradical. Demuestre que para todo subconjunto multiplicativo $U \subseteq R$ se tiene

$$N(R[U^{-1}]) = N(R)R[U^{-1}].$$

[1 *punto por cada una de las inclusiones "$\subseteq$" y "$\supseteq$"*]

Problema 5 (2 puntos)**.** Sean R un anillo conmutativo y $x \in R$ algún elemento no nulo.

1) Demuestre que $\operatorname{Ann}(x) := \{r \in R \mid rx = 0\}$ es un ideal propio en R. [1 *punto*]

2) Demuestre que existe un ideal maximal $\mathfrak{m} \subset R$ tal que $\frac{x}{1} \neq \frac{0}{1}$ en la localización $R_{\mathfrak{m}}$. [1 *punto*]