Álgebra II. Hoja de ejercicios 7: Aritmética II
Universidad de El Salvador, ciclo par 2018

Por cualquier pregunta, no duden en escribir al grupo ues-algebra-2@googlegroups.com.

Ejercicio 1. *Sea $p = 2, 3, 5, 7, \ldots$ un número primo y $k = 1, 2, 3, 4, \ldots$ Calcule que*

$$v_p\left(\binom{p^k}{n}\right) = k - v_p(n) \quad \text{para todo } n = 1, 2, \ldots, p^k.$$

Indicación: calcule las valuaciones p-ádicas de ambos lados de la identidad

$$n!\binom{p^k}{n} = p^k\,(p^k-1)\,(p^k-2)\cdots(p^k-n+1).$$

Note que $v_p(p^k - a) = v_p(a)$ para todo $a = 1, 2, \ldots, p^k - 1$

Ejercicio 2 (Fórmula de Legendre)**.** *Demuestre que para todo primo p y todo número natural n se tiene*

$$v_p(n!) = \sum_{i\ge 1} \lfloor n/p^i \rfloor.$$

En particular, calcule $v_2(100!)$.

Ejercicio 3 (Normas p-ádicas)**.** *Sea R un dominio de factorización única y $p \in R$ un elemento primo. Fijemos un número real $0 < \rho < 1$ y pongamos para todo $x \in R$*

$$|x|_p := \rho^{v_p(x)}.$$

Demuestre que $|\cdot|_p$ cumple las siguientes propiedades.

N1) $|x|_p = 0$ *si y solo si* $x = 0$.

N2) $|xy|_p = |x|_p \cdot |y|_p$.

N3) $|x+y|_p \le \max\{|x|_p, |y|_p\}$, *y se cumple la igualdad si* $|x|_p \ne |y|_p$.

Ejercicio 4. *Compile una lista de los polinomios cuadráticos irreducibles en $\mathbb{F}_3[X]$.*

Ejercicio 5. *Sean k un cuerpo y $f \in k[X]$ un polinomio de grado 2 o 3. Demuestre que f es irreducible en $k[X]$ si y solo si f no tiene raíces en k.*

Ejercicio 6. *Consideremos el polinomio $f := X^3 + 2X + 1 \in \mathbb{Z}[X]$.*

1) *Demuestre que $\overline{f} \in \mathbb{F}_2[X]$ es reducible.*
2) *Demuestre que $\overline{f} \in \mathbb{F}_3[X]$ es irreducible.*
   Indicación: use el ejercicio anterior.
3) *Demuestre que f es irreducible en $\mathbb{Z}[X]$.*