

Álgebra II. Hoja de ejercicios 9: Cuerpos (continuación)

Universidad de El Salvador, ciclo par 2018

Por cualquier pregunta, no duden en escribir al grupo ues-algebra-2@googlegroups.com.

Ejercicio 1. Sea n un número entero. Encuentre el polinomio mínimo sobre \mathbb{Q} para $n + \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$.

Ejercicio 2. Para una extensión L/K y un elemento algebraico $\alpha \in L$ asumamos que el grado $[K(\alpha) : K]$ es impar. Demuestre que $K(\alpha) = K(\alpha^2)$.

Ejercicio 3. Para $p = 2, 3$ demuestre que el polinomio $X^3 - p$ es irreducible en $K[X]$ donde $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$.
Sugerencia: considere la extensión $\mathbb{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt[3]{p})/\mathbb{Q}$.

Ejercicio 4. Sean $m, n \in \mathbb{Z}$ dos números enteros tales que $\sqrt{m}, \sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$. Consideremos $\alpha := \sqrt{m} + \sqrt{n} \in \mathbb{C}$.

1) Demuestre que $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{n})$.

2) Para

$$\alpha_1 := \alpha, \quad \alpha_2 := -\sqrt{m} + \sqrt{n}, \quad \alpha_3 := -\alpha_1, \quad \alpha_4 := -\alpha_2,$$

demuestre que el polinomio $f := (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)(X - \alpha_3)(X - \alpha_4)$ tiene coeficientes enteros.

3) Demuestre que si $\sqrt{mn} \notin \mathbb{Q}$, entonces f es el polinomio mínimo de α sobre \mathbb{Q} .

4) Demuestre que si $\sqrt{mn} \in \mathbb{Q}$, entonces $\mathbb{Q}(\sqrt{m}) = \mathbb{Q}(\sqrt{n})$.

Cuerpos ciclotómicos

Ejercicio 5. Demuestre que si $m > 1$ es impar, entonces $\Phi_{2m} = \Phi_m(-X)$.

Sugerencia: compare las expresiones

$$\prod_{d|2m} \Phi_d = X^{2m} - 1 = (X^m - 1)(X^m + 1) = -(X^m - 1)((-X)^m - 1) = - \prod_{d|m} \Phi_d(X) \Phi_d(-X)$$

usando inducción sobre m .

Ejercicio 6. Encuentre un par de cuerpos ciclotómicos $\mathbb{Q}(\zeta_m)$ y $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ tales que $[\mathbb{Q}(\zeta_m) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\zeta_n) : \mathbb{Q}]$ pero $\mathbb{Q}(\zeta_m) \not\cong \mathbb{Q}(\zeta_n)$.

Ejercicio 7. Demuestre que toda extensión finita K/\mathbb{Q} contiene un número finito de raíces de la unidad.

Ejercicio 8. Denotemos por $\mathbb{Q}(\zeta_\infty) = \mathbb{Q}(\zeta_3, \zeta_4, \zeta_5, \zeta_6, \dots)$ la extensión de \mathbb{Q} generada por todas las raíces de la unidad. Demuestre que $\mathbb{Q}(\zeta_\infty) = \bigcup_{n \geq 1} \mathbb{Q}(\zeta_n)$.

Derivadas formales

Ejercicio 9. Sea R un anillo conmutativo. Para una serie de potencias $f = \sum_{n \geq 0} a_n X^n \in R[[X]]$ definamos su derivada formal como la serie

$$f' := \sum_{n \geq 1} n a_n X^{n-1}.$$

Demuestre que para cualesquiera $f, g \in R[[X]]$ se cumple

$$(f + g)' = f' + g', \quad (fg)' = f'g + fg'.$$

La traza, norma y el polinomio característico

Ejercicio 15. Consideremos la extensión ciclotómica $\mathbb{Q}(\zeta_3)/\mathbb{Q}$.

- 1) Usando la base $1, \zeta_3$, calcule el polinomio característico para un elemento $\alpha := a + b\zeta_3$, donde $a, b \in \mathbb{Q}$.
- 2) Note que $\mathbb{Q}(\zeta_3) = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$. Verifique que el resultado de 1) coincide con el cálculo para las extensiones cuadráticas que hicimos en clase.

Ejercicio 16. Demuestre que $1 + \sqrt[3]{2}$ no es una n -ésima potencia en $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ para ningún $n = 2, 3, 4, \dots$

Ejercicio 17. Consideremos $\alpha := \zeta_5 + \zeta_5^2$, donde $\zeta_5 := e^{2\pi\sqrt{-1}/5}$.

- 1) Calcule el polinomio característico de α respecto a la extensión ciclotómica $\mathbb{Q}(\zeta_5)/\mathbb{Q}$.
- 2) Demuestre que $\mathbb{Q}(\zeta_5) = \mathbb{Q}(\alpha)$ y el polinomio obtenido es el polinomio mínimo de α .