

# Álgebra II: Anillos y cuerpos

## Preguntas sobre el curso

---

### Unidad 1

- Defina qué es un subanillo y un homomorfismo de anillos.
- Defina qué es un ideal.
- Defina qué es el anillo cociente  $R/I$ .
- Caracterice los ideales en el anillo cociente  $R/I$  en términos de los ideales en  $R$ .
- Formule el primer teorema de isomorfía para anillos.
- Formule el teorema chino del resto para anillos.

### Unidad 2

- Defina qué es un ideal primo y maximal en un anillo conmutativo.
- Caracterice los ideales primos y maximales en términos del cociente  $R/I$ .
- Demuestre que todo ideal maximal es primo.
- Defina qué es un anillo noetheriano.

### Unidad 3

- Defina qué es un elemento primo e irreducible en un dominio. Demuestre que “primo” implica “irreducible”.
- Defina qué es un dominio de factorización única.
- Defina qué es un dominio euclidiano.
- Demuestre que  $k[X]$  (polinomios con coeficientes en un cuerpo) y  $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$  (enteros de Gauss) son dominios euclidianos.
- Dé algunos ejemplos de dominios de factorización única que no son dominios de ideales principales.
- Formule el criterio de irreducibilidad con reducción módulo  $p$ .
- Formule el criterio de Eisenstein.
- Defina qué es el polinomio ciclotómico  $\Phi_n$  y explique sus propiedades que hemos visto en clase. Escriba, por ejemplo, las expansiones de los primeros 10 polinomios ciclotómicos.
- Usando el criterio de Eisenstein, demuestre la irreducibilidad de  $\Phi_p$  para  $p$  primo.

## Unidad 4

- Defina qué es una extensión algebraica y demuestre que toda extensión finita es algebraica.
- Defina la traza y la norma y explique su relación con el polinomio característico.
- Defina qué es el polinomio mínimo y el polinomio característico y explique la relación entre ellos.
- Defina qué es un cuerpo de descomposición.
- Dé la fórmula de Gauss para los polinomios mónicos irreducibles en  $\mathbb{F}_p[X]$ . Haga algunos cálculos con esta fórmula.
- Explique cómo se puede construir, por ejemplo, el cuerpo finito  $\mathbb{F}_9$ .
- Defina qué es el automorfismo de Frobenius y demuestre que es un automorfismo.
- Describa todos los automorfismos y subcuerpos del cuerpo finito  $\mathbb{F}_{p^n}$ . ¿Cuál es la relación entre los automorfismos y subcuerpos?
- Defina qué es un polinomio separable y una extensión separable.
- Formule el criterio de separabilidad de  $f$  en términos de su derivada  $f'$ .
- Defina qué es un cuerpo perfecto. ¿Qué propiedad especial de cuerpos perfectos hemos visto en clase?
- Formule el teorema del elemento primitivo.
- Defina qué es un cuerpo algebraicamente cerrado y una cerradura algebraica.