Álgebra I: Estructuras algebraicas y la teoría de grupos
Examen parcial 2

Universidad de El Salvador, 22.05.2018

Problema 1 (1 punto). Determine todos los subgrupos del grupo $\mu_{12}(\mathbb{C}) := \{z \in \mathbb{C} \mid z^{12} = 1\}$.

Problema 2 (1 punto). Demuestre que las siguientes matrices pertenecen al grupo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ y encuentre sus órdenes correspondientes:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Problema 3 (2 puntos). Demuestre que el subgrupo de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ generado por las matrices

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

es isomorfo al grupo diédrico $D_4 = \{\mathrm{id}, r, r^2, r^3, f, fr, fr^2, fr^3\}$.

Problema 4 (2 puntos). Sea n un número entero positivo. Consideremos el anillo

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-n}] := \{a + b\sqrt{-n} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Calcule el grupo de unidades correspondiente $\mathbb{Z}[\sqrt{-n}]^\times$ para todo $n = 1, 2, 3, \ldots$
Indicación: defina la aplicación de la norma $N\colon \mathbb{Z}[\sqrt{-n}] \to \mathbb{Z}$. El caso de $n = 1$ fue considerado en clase y no hace falta repetir el cálculo.

Problema 5 (2 puntos). Consideremos $M_n(R)$, el anillo de matrices de $n \times n$ con coeficientes en un anillo conmutativo R. Sea

$$N = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1,n-2} & x_{1,n-1} & x_{1n} \\ 0 & 0 & x_{23} & \cdots & x_{2,n-2} & x_{2,n-1} & x_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{3,n-2} & x_{3,n-1} & x_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_{n-2,n-1} & x_{n-2,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & x_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

una matriz triangular superior con ceros en la diagonal. Demuestre que N es nilpotente en $M_n(R)$. (Indicación: use la inducción sobre n.)

Problema 6 (2 puntos). Consideremos $\mathbb{Q}$, el grupo de los números racionales respecto a la adición. Demuestre que todo subgrupo finitamente generado de $\mathbb{Q}$ es cíclico.