Universidad de El Salvador. 25.06.2018
Álgebra I: Estructuras algebraicas y la teoría de grupos. Examen parcial 3

Problema 1 (1 punto)**.** Enumere todos los grupos abelianos de orden 666 salvo isomorfismo.

Problema 2 (1 punto)**.** Sea G un grupo y N su subgrupo normal. Sea $K \subset G/N$ un subgrupo del grupo cociente. Demuestre que $K = H/N$ donde H es un subgrupo de G que contiene a N.
Sugerencia: considere el homomorfismo canónico $p\colon G \twoheadrightarrow G/N$ y $p^{-1}(K) \subset G$.

Problema 3 (2 puntos)**.** Sea p un número primo. Supongamos que el grupo $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ actúa sobre un conjunto X.

1) Demuestre que todo elemento de X es un punto fijo o pertenece a una órbita de orden p.

2) Supongamos que X es finito y $p \mid |X|$. Demuestre que el número de puntos fijos es también divisible por p.

Problema 4 (2 puntos)**.** Sea G un grupo finito y sea p un número primo tal que $p \mid |G|$. En este problema vamos a probar que en G hay un elemento de orden p. Para esto consideremos el conjunto

$$X := \{(g_0, g_1, \ldots, g_{p-1}) \mid g_i \in G,\ g_0 g_1 \cdots g_{p-1} = 1\}.$$

1) Demuestre que $|X| = |G|^{p-1}$.

2) Para $[n]_p \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sea $[n]_p \cdot (g_0, g_1, \ldots, g_{p-1}) := (g_{[0+n]}, g_{[1+n]}, \ldots, g_{[p-1+n]})$. Demuestre que esto define una acción de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sobre X y sus puntos fijos son $(g, g, \ldots, g)$ donde $g^p = 1$.

3) Usando el problema anterior, demuestre que el número de elementos $g \in G$ tales que $g^p = 1$ es divisible por p. Demuestre que existe $g \neq 1$ tal que $g^p = 1$.

Problema 5 (2 puntos)**.**

1) Consideremos el grupo alternante A_4 y sus subgrupos $V := \{\mathrm{id}, (1\,2)\,(3\,4), (1\,3)\,(2\,4), (1\,4)\,(2\,3)\}$ y $H := \langle (1\,2\,3) \rangle$. Demuestre que A_4 es el producto semidirecto de V y H.

2) Demuestre que para $n \geq 5$ el grupo alternante A_n no puede ser isomorfo a un producto semidirecto $N \rtimes_\phi H$ donde N y H no son triviales.

Problema 6 (2 puntos)**.** Se dice que dos sucesiones exactas cortas (extensiones de grupos)

$$1 \to H \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} K \to 1 \quad \text{y} \quad 1 \to H \xrightarrow{i'} G' \xrightarrow{p'} K \to 1$$

son **equivalentes** si existe un homomorfismo $f\colon G \to G'$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & H \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & G \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"] & K \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & 1 \\
1 \arrow[r] & H \arrow[r, "i'"] & G' \arrow[r, "p'"] & K \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

es conmutativo (hemos probado en clase que en este caso f es un isomorfismo).

Sea p un número primo. Consideremos una sucesión de homomorfismos

$$0 \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \xrightarrow{[1]_p \mapsto [p]_{p^2}} \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \xrightarrow{[1]_{p^2} \mapsto [n]_p} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to 0$$

1) Demuestre que para todo $n = 1, 2, \ldots, p-1$ es una sucesión exacta corta.

2) Demuestre que estas sucesiones no son equivalentes para diferentes $n = 1, 2, \ldots, p-1$.