Álgebra I: Estructuras algebraicas y la teoría de grupos
Preguntas sobre el curso

---

1. Defina qué es un grupo. Dé por lo menos tres ejemplos diferentes de grupos. Demuestre que el elemento neutro es único y para cada elemento su inverso es único.
2. Defina qué es un subgrupo y un subgrupo normal. Dé tres ejemplos diferentes de subgrupos normales y tres ejemplos diferentes de subgrupos que no son normales.
3. Defina qué es el grupo simétrico S_n y el grupo alternante A_n. ¿Cuántos elementos hay en S_n y A_n? ¿Cuándo estos grupos son abelianos? Describa los subgrupos normales en S_n y A_n para diferente n.
4. Escriba los tipos de ciclo diferentes que ocurren en el grupo simétrico S_5 y calcule el número de elementos de cada tipo de ciclo. ¿Cuáles elementos pertenecen a A_5?
5. Defina qué es el grupo diédrico D_n. ¿Cuántos elementos hay en D_n? ¿Cómo se multiplican sus elementos?
6. Defina qué es el centro de un grupo. Demuestre que el centro es un subgrupo normal. Calcule el centro del grupo simétrico S_n y el grupo diédrico D_n.
7. Defina qué es un anilo y un cuerpo. Defina el anillo de polinomios $R[X]$ y el anillo de matrices $M_n(R)$. Demuestre que el último anillo no es conmutativo. Dé tres ejemplos diferentes de anillos que no son cuerpos y tres ejemplos diferentes de cuerpos. Demuestre que un cuerpo no puede tener divisores de cero.
8. Defina el anillo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Demuestre que es un cuerpo si y solamente si n es primo. Describa el grupo de unidades $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.
9. Defina qué es un homomorfismo, monomorfismo, epimorfismo, isomorfismo de grupos. Dé ejemplos diferentes para cada una de estas nociones. Demuestre que todo homomorfismo preserva el elemento neutro y elementos inversos.
10. Defina qué es la imagen y el núcleo de un homomorfismo. Demuestre que son subgrupos. Demuestre que el núcleo es un subgrupo normal. Dé por lo menos tres ejemplos diferentes de núcleos no triviales.
11. Defina qué es el orden de un elemento. Demuestre que para un elemento de orden finito se cumple $\operatorname{ord} g^k = \operatorname{ord} g / \operatorname{mcd}(\operatorname{ord} g, k)$. Calcule los órdenes de los elementos en el grupo simétrico S_n y el grupo diédrico D_n.
12. Defina qué es un grupo cíclico. Demuestre que todo grupo cíclico es isomorfo a $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Describa los posibles generadores de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
13. Defina qué son las clases laterales. Formule y demuestre el teorema de Lagrange. Demuestre que si G es un grupo finito y H es un subgrupo, entonces $|H|$ divide a $|G|$. Demuestre que si G es un grupo finito y $g \in G$, entondes $\operatorname{ord} g$ divide a $|G|$.
14. Defina qué es el grupo cociente. Formule y demuestre el primer teorema de isomorfía. Dé por lo menos tres ejemplos de su aplicación.
15. Defina qué es el subgrupo conmutador. Demuestre que es normal. Formule y demuestre la propiedad universal de la abelianización. Calcule la abelianización del grupo simétrico S_n y el grupo alternante A_n para todo n.

16. Defina qué es una acción (un G-conjunto). Defina qué es la órbita O_x y el estabilizador G_x de un punto. Demuestre que un G-conjunto es una unión disjunta de las órbitas. Establezca la biyección entre la órbita O_x y las clases laterales G/G_x.

17. Describa la acción de un grupo sobre sí mismo por multiplicación. Demuestre que esta acción es fiel. Demuestre el teorema de Cayley: para todo grupo existe un monomorfismo $G \rightarrowtail S_G$. Describa la acción de un grupo sobre sí mismo por conjugación. Demuestre que esto es una acción por automorfismos. Describa las órbitas, puntos fijos y estabilizadores en este caso.

18. Defina qué es el producto directo y semidirecto de dos grupos (verifique que la multiplicación en el producto semidirecto nos da un grupo). Dé tres ejemplos diferentes de productos directos y semidirectos.

19. Defina qué es una sucesión exacta corta de grupos y dé por lo menos tres ejemplos diferentes.

20. Formule y demuestre el teorema chino del resto. Formule el teorema sobre la esctructura de grupos abelianos finitamente generados. Enumere los grupos abelianos de orden ≤ 10 salvo isomorfismo.