Álgebra I. Hoja de ejercicios 2: Anillos
Universidad de El Salvador, ciclo impar 2019

Por cualquier pregunta, no duden en escribir al grupo ues-algebra-2019@googlegroups.com.

Ejercicio 1. Demuestre las identidades trigonométricas

$$\operatorname{sen}(\phi+\psi) = \operatorname{sen}\phi\cos\psi + \cos\phi\operatorname{sen}\psi, \quad \cos(\phi+\psi) = \cos\phi\cos\psi - \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\psi$$

usando la identidad de Euler para los números complejos.

Ejercicio 2. Sea $n = 2,3,4,\ldots$ un número fijo y $\zeta_n := e^{2\pi i/n}$.

1) Para un polinomio complejo $f = a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ de grado $< n$ demuestre que

$$\frac{1}{n}\sum_{0\le k\le n-1} f(\zeta_n^k) = a_0.$$

2) Demuestre que $\prod_{1\le k\le n-1}(1-\zeta_n^k) = n$.

Ejercicio 3. Sea X un conjunto y 2^X el conjunto de los subconjuntos de X. Demuestre que 2^X es un anillo conmutativo de característica 2 respecto a la suma $A\triangle B$ (diferencia simétrica) y producto $A\cap B$ (intersección).

Ejercicio 4 (Los números duales)**.** Inmitando la definición de los números complejos, consideremos las expresiones $x+y\epsilon$, donde $x,y\in\mathbb{R}$, respecto a la suma y producto

$$(x_1+y_1\epsilon)+(x_2+y_2\epsilon) := (x_1+x_2)+(y_1+y_2)\epsilon,$$
$$(x_1+y_1\epsilon)\cdot(x_2+y_2\epsilon) := x_1x_2+(x_1y_2+x_2y_1)\epsilon.$$

1) Demuestre que de esta manera se obtiene un anillo conmutativo.

2) Demuestre que no es un dominio.

3) Determine cuándo un elemento $x+y\epsilon$ es invertible y encuentre la fórmula para su inverso.

Ejercicio 5 (Cuaterniones)**.** Denotemos por $u\cdot v$ y $u\times v$ el producto escalar y producto cruz sobre $\mathbb{R}^3$ respectivamente.

1) Demuestre que en general, $(u\times v)\times w \ne u\times(v\times w)$, pero se cumple la **identidad de Jacobi**

$$u\times(v\times w)+v\times(w\times u)+w\times(u\times v) = 0.$$

2) Identifiquemos los elementos de $\mathbb{R}^4$ con pares (a,u), donde $a\in\mathbb{R}$ y $u\in\mathbb{R}^3$. Demuestre que $\mathbb{R}^4$ forma un anillo no conmutativo respecto a las operaciones

$$(a,u)+(b,v) := (a+b,u+v), \quad (a,u)\cdot(b,v) := (ab-u\cdot v,\, av+bu+u\times v).$$

Este se llama el **anillo de cuaterniones** y se denota por $\mathbb{H}$.

3) Demuestre que todo elemento no nulo en $\mathbb{H}$ es invertible.
Sugerencia: defina $\overline{(a,u)} := (a,-u)$ y calcule $(a,u)\cdot\overline{(a,u)}$.

Ejercicio 6 (Enteros ciclotómicos)**.** Para un número primo p consideremos el conjunto

$$\mathbb{Z}[\zeta_p] := \{a_0 + a_1\,\zeta_p + a_2\,\zeta_p^2 + \cdots + a_{p-2}\,\zeta_p^{p-2} \mid a_i \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}.$$

1) Demuestre que $\mathbb{Z}[\zeta_p]$ es un subanillo de $\mathbb{C}$.

2) Calcule $(1+\zeta_5^3)^2$, $(1+\zeta_5^3)^3$, $(1+\zeta_5^3)^{-1}$ en $\mathbb{Z}[\zeta_5]$.

Ejercicio 7. Para un número fijo $n = 1,2,3,\ldots$ consideremos el conjunto de fracciones con potencias de n en el denominador:

$$\mathbb{Z}\Big[\frac{1}{n}\Big] := \Big\{\frac{m}{n^k} \;\Big|\; m \in \mathbb{Z},\ k = 0,1,2,3,\ldots\Big\} \subset \mathbb{Q}.$$

De modo similar, para un número primo fijo $p = 2,3,5,7,11,\ldots$ consideremos las fracciones con denominador no divisible por p:

$$\mathbb{Z}_{(p)} := \Big\{\frac{a}{b} \;\Big|\; a,b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0,\ p \nmid b\Big\} \subset \mathbb{Q}.$$

Verifique que $\mathbb{Z}\big[\frac{1}{n}\big]$ y $\mathbb{Z}_{(p)}$ son subanillos de $\mathbb{Q}$.

Ejercicio 8. Sea A un anillo y $A_i \subseteq A$ una familia de subanilos. Demuestre que $\bigcap_i A_i$ es un subanillo de A.

Ejercicio 9 (Series formales de potencias)**.** Sea A un anillo conmutativo. Una **serie formal de potencias** con coeficientes en A en una variable X es una suma formal

$$f(X) = \sum_{i\ge 0} a_i\,X^i,$$

donde $a_i \in A$. A diferencia de polinomios, se puede tener un número infinito de coeficientes no nulos. Las sumas y productos de series formales están definidos por

$$\sum_{i\ge 0} a_i\,X^i + \sum_{i\ge 0} b_i\,X^i := \sum_{i\ge 0}(a_i+b_i)\,X^i, \quad \Big(\sum_{i\ge 0} a_i\,X^i\Big)\cdot\Big(\sum_{i\ge 0} b_i\,X^i\Big) := \sum_{k\ge 0}\Big(\sum_{i+j=k} a_i\,b_j\Big)\,X^k.$$

1) Demuestre que las series formales forman un anillo conmutativo. Este se denota por $A[[X]]$.

2) Demuestre que $A[X]$ es un subanillo de $A[[X]]$.

3) Demuestre que si A es un dominio, entonces $A[[X]]$ es también un dominio.

   Sugerencia: para dos series no nulas $f(X), g(X) \in A[[X]]$, sean a_m y b_n el primer coeficiente no nulo de $f(X)$ y $g(X)$ respectivamente:

   $$f(X) = a_m\,X^m + a_{m+1}\,X^{m+1} + \cdots, \quad g(X) = b_n\,X^n + b_{n+1}\,X^{n+1} + \cdots$$

   Analice los coeficientes del producto $f(X)\,g(X)$.

4) Verifique la identidad

   $$(1+X)\cdot(1 - X + X^2 - X^3 + X^4 - X^5 + \cdots) = 1$$

   en el anillo de series formales $A[[X]]$.

5) Verifique la identidad $\Big(\sum_{i\ge 0}\frac{X^i}{i!}\Big)^n = \sum_{i\ge 0}\frac{n^i}{i!}\,X^i$ en el anillo de series formales $\mathbb{Q}[[X]]$.

Ejercicio 10. En el anillo de matrices de 2×2, para

$$e_{12} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{21} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

calcule las matrices

$$(e_{12}\,e_{21})^2, \quad e_{12}^2\,e_{21}^2, \quad (e_{12}+e_{21})^2, \quad e_{12}^2 + 2\,e_{12}\,e_{21} + e_{21}^2.$$