Álgebra I. Examen parcial 3
Universidad de El Salvador, 28/06/2019

Ejercicio 1 (2 puntos)**.** Sean G y H dos grupos finitos tales que $\operatorname{mcd}(|G|,|H|) = 1$. Demuestre que el único posible homomorfismo $\phi\colon G \to H$ es trivial (envía todo $g \in G$ a $1 \in H$).

Ejercicio 2 (2 puntos)**.** Sean $H, K \subseteq G$ dos subgrupos normales tales que $H \cap K = 1$.

a) Demuestre que $hk = kh$ para cualesquiera $h \in H$, $k \in K$.

b) Demuestre que si los grupos cociente G/H y G/K son abelianos, entonces G es abeliano.

Ejercicio 3 (2 puntos)**.** Sean G un grupo finito y $H \subseteq G$ un subgrupo.

a) Demuestre que para todo $g \in G$ el conjunto

$$gHg^{-1} := \{ghg^{-1} \mid h \in H\}$$

es también un subgrupo y es isomorfo a H.

b) Demuestre que si en G no hay otros subgrupos de índice $|G : H|$, entonces H es normal.

Ejercicio 4 (2 puntos)**.** Para el grupo diédrico

$$D_{2n} = \{\mathrm{id}, r, r^2, \ldots, r^{2n-1}, f, rf, r^2 f, \ldots, r^{2n-1} f\}$$

demuestre que el cociente $D_{2n}/Z(D_{2n})$ es también isomorfo a un grupo diédrico.

Ejercicio 5 (2 puntos)**.** En el grupo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ consideremos el subconjunto

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \;\middle|\; a, d \text{ son impares, } b, c \text{ son pares} \right\}.$$

a) Demuestre que G es un subgrupo de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

b) Determine si G es normal (encuentre una prueba o contraejemplo).

c**) Punto extra: calcule el índice $|\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : G|$.