Álgebra computacional. Examen parcial 1
Universidad de El Salvador, 12/04/2019

Ejercicio 1 (2 puntos). Consideremos el ideal

$$I = (xy, x^3 - y^2 + x) \subset k[x, y].$$

a) Encuentre la base de Gröbner reducida de I respecto al orden graduado lexicográfico.

b) Encuentre una base monomial de $k[x, y]/I$ como un espacio vectorial sobre k.

Ejercicio 2 (4 puntos). Los polinomios de la forma $x^\alpha - x^\beta \in k[x_1, \ldots, x_n]$ se llaman **binomios**. Se dice que un ideal I es **binomial** si I puede ser generado por algunos binomios. En este ejercicio vamos a probar que I es binomial si y solo si su base de Gröbner reducida consiste en binomios.

a) Demuestre que para dos binomios $f_1 = x^{\alpha(1)} - x^{\beta(1)}$ y $f_2 = x^{\alpha(2)} - x^{\beta(2)}$ el polinomio $S(f_1, f_2)$ es también un binomio si $f_1 \neq f_2$.

b) Sean $f = x^\alpha - x^\beta$, $f_1 = x^{\alpha(1)} - x^{\beta(1)}, \ldots, f_s = x^{\alpha(s)} - x^{\beta(s)}$ binomios. Demuestre que el algoritmo de división con resto de f por $(f_1, \ldots, f_s)$ produce

$$f = q_1 f_1 + \cdots + q_s f_s + r,$$

donde $r = 0$ o r es también un binomio.

c) Demuestre que todo ideal binomial tiene una base de Gröbner que consiste en binomios.

d) Demuestre que la base de Gröbner reducida de un ideal binomial consiste en binomios.

Ejercicio 3 (4 puntos). En este ejercicio vamos a calcular el radical de un ideal monomial.

a) Demuestre que un ideal monomial $I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ es primo si y solo si $I = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_s})$ es el ideal generado por algunas variables $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}\} \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$.

b) Demuestre que si A es cualquier anillo conmutativo e $I, J \subseteq A$ son ideales, entonces

$$\sqrt{I + J} = \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}, \quad \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}.$$

c) Para un monomio $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ demuestre que $\sqrt{(x^\alpha)} = (\sqrt{x^\alpha})$, donde

$$\sqrt{x^\alpha} := x_1^{\text{mín}(1,\alpha_1)} \cdots x_n^{\text{mín}(1,\alpha_n)} = \text{producto de las variables que están en } x^\alpha.$$

d) Demuestre que el ideal $(\sqrt{x^{\alpha(1)}}, \ldots, \sqrt{x^{\alpha(s)}})$ es radical.
Sugerencia: note que si $\sqrt{x^\alpha} = x_{i_1} \cdots x_{i_k}$, entonces $\sqrt{(x^\alpha)} = (x_{i_1}) \cap \cdots \cap (x_{i_k})$. Usando esta observación, exprese $(\sqrt{x^{\alpha(1)}}, \ldots, \sqrt{x^{\alpha(s)}}) = \bigcap_i \mathfrak{p}_i$, donde $\mathfrak{p}_i$ son algunos ideales monomiales primos.

e) Demuestre que $\sqrt{(x^{\alpha(1)}, \ldots, x^{\alpha(s)})} = \sqrt{(\sqrt{x^{\alpha(1)}}, \ldots, \sqrt{x^{\alpha(s)}})} = (\sqrt{x^{\alpha(1)}}, \ldots, \sqrt{x^{\alpha(s)}})$.

** En este ejercicio puede ser útil la identidad* $\sqrt{I} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \\ I \subseteq \mathfrak{p}}} \mathfrak{p}$.