Álgebra computacional. Tarea 2. Fecha límite: 11/04/2019
Universidad de El Salvador, ciclo impar 2019

Fijemos un orden monomial sobre $k[x_1, \ldots, x_n]$.

Ejercicio 1. Sea $I \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ un ideal. Demuestre que para cualquier polinomio $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ existe único $r \in k[x_1, \ldots, x_n]$ con las siguientes propiedades:

1) los términos que aparecen en r no son divisibles por ningún elemento de $LT(I)$;

2) $f = g + r$ para algún $g \in I$.

Ejercicio 2. Para un ideal $I \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$, sea $\{g_1, \ldots, g_s\}$ un conjunto tal que $I = (g_1, \ldots, g_s)$ y para todo $f \in I$ el resto de división de f por $g_1, \ldots, g_s$ es nulo. Demuestre que $\{g_1, \ldots, g_s\}$ es una base de Gröbner para I.

Ejercicio 3. Sean $\{g_1, \ldots, g_s\}$ y $\{g'_1, \ldots, g'_t\}$ dos bases de Gröbner para un ideal $I \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$. Demuestre que para cualquier polinomio $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ el resto de la división de f por $g_1, \ldots, g_s$ y por $g'_1, \ldots, g'_t$ coinciden.

Ejercicio 4.

1) Demuestre que
$$\operatorname{multideg}(S(f,g)) < \gamma,$$
donde
$$x^\gamma = \operatorname{mcm}(LM(f), LM(g)).$$

2) Encuentre un par de polinomios f, g tales que $S(f,g)$ es diferente respecto a diferentes órdenes monomiales.

Ejercicio 5. Consideremos el anillo $k[x,y,z]$.

1) Para
$$g_1 := z^2 - x, \quad g_2 := z^3 - y,$$
usando el criterio de Buchberger, determine respecto a cuáles órdenes monomiales entre lex, grlex y grevlex los polinomios g_1 y g_2 forman una base de Gröbner.

2) La misma pregunta para
$$g_1 := z^2 - x, \quad g_2 := xz - y, \quad g_3 := x^2 - yz.$$

En los siguientes ejercicios se puede/se debe usar la computadora.

Ejercicio 6. Analice todos los pasos del algoritmo de Buchberger y el algoritmo de reducción para calcular la base de Gröbner reducida de $I = (f_1, f_2)$, donde

$$f_1 := x^2 + y, \quad f_2 := x^3 + 2x^2 y + y^2 + 3,$$

respecto al orden lexicográfico y graduado lexicográfico.

Ejercicio 7. Use las bases de Gröbner para determinar si

1) $xy^3 - z^2 + y^5 - z^3 \in (-x^3 + y, x^2 y - z)$;

2) $x^3 z - 2y^2 \in (xz - y, xy + 2z^2, y - z)$.

Ejercicio 8. Para la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) := (x^2 + y^2 - 4)(x^2 + y^2 - 1) + (x - 3/2)^2 + (y - 3/2)^2$$

determine sus **puntos críticos** usando las bases de Gröbner; es decir, los puntos donde

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Sugerencia: para las derivadas en Macaulay2, consulte la documentación sobre la función `diff`.

Ejercicio 9.

1) Calcule la base de Gröbner reducida para $I := (f_1, f_2, f_3) \subset k[x, y, z]$, donde

$$f_1 := x + 2y + z - 1, \quad f_2 := 2x - y + z = 0, \quad f_3 := x + 2y - z - 2.$$

2) En general, sean $f_1, \ldots, f_s \in k[x_1, \ldots, x_n]$ polinomios lineales; es decir, polinomios de la forma

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n + c, \quad a_1, \ldots, a_n, c \in k.$$

Explique por qué el cálculo de la base de Gröbner reducida para $I = (f_1, \ldots, f_s)$ corresponde al método de Gauss para resolver el sistema de ecuaciones

$$f_1(x) = \cdots = f_s(x) = 0.$$

Ejercicio 10. Usando nuestro código para el algoritmo de Buchberger, implemente en Macaulay2 las siguientes funciones.

- Una función que para f y $f_1, \ldots, f_s$ determina si $f \in (f_1, \ldots, f_s)$.
- Una función que para f y $f_1, \ldots, f_s$ determina si $f \in \sqrt{(f_1, \ldots, f_s)}$.
- Una función que para $f_1, \ldots, f_s, g_1, \ldots, g_t$ determina si $(f_1, \ldots, f_s) \subseteq (g_1, \ldots, g_t)$.
- Una función que para $f_1, \ldots, f_s, g_1, \ldots, g_t$ determina si $(f_1, \ldots, f_s) = (g_1, \ldots, g_t)$.
- Una función que para $f_1, \ldots, f_s$ determina si el ideal $(f_1, \ldots, f_s)$ es propio.