

Álgebra homológica, día 10

Alexey Beshenov (cadadr@gmail.com)

19 de agosto de 2016

1. Resoluciones proyectivas

1.1. Definición. Sea \mathbf{A} una categoría abeliana. Se dice que en \mathbf{A} hay **suficientes objetos proyectivos** si para cada $M \in \mathbf{A}$ existe un epimorfismo $P \rightarrow M$ desde algún objeto proyectivo P .

Esto significa que cada objeto de la categoría es un cociente de un objeto proyectivo: $M \cong P/K$ donde K es el núcleo de un epimorfismo $P \rightarrow M$. En particular, en la categoría $R\text{-Mód}$ hay suficientes objetos proyectivos:

1.2. Observación. Para cada R -módulo M existe un epimorfismo $P \rightarrow M$ desde algún R -módulo proyectivo.

Demostración. Para cada módulo M sea X un conjunto de sus generadores. Podemos considerar el módulo libre $R\langle X \rangle$ y el epimorfismo correspondiente $R\langle X \rangle \rightarrow M$ (que simplemente aplica $x \in X$ a x). No importa si M no es finitamente generado, por ejemplo siempre se puede tomar $X = M$. Cada módulo libre es proyectivo. ■

1.3. Definición. Sea $M \in \mathbf{A}$ un objeto. Entonces su **resolución proyectiva** es un complejo P^\bullet formado por objetos proyectivos, con cuasi-isomorfismo de complejos $\epsilon: P^\bullet \rightarrow M$, donde M es el complejo correspondiente concentrado en el grado 0:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \longrightarrow & P^{-2} & \longrightarrow & P^{-1} & \longrightarrow & P^0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\ & & & & & & \downarrow \epsilon & & & & \\ \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Se ve que es la misma cosa que una sucesión exacta

$$\dots \rightarrow P^{-2} \rightarrow P^{-1} \rightarrow P^0 \xrightarrow{\epsilon} M \rightarrow 0$$

donde cada P^n es proyectivo. La numeración $P^0, P^{-1}, P^{-2}, \dots$ es un poco rara y sirve solo para que el complejo P^\bullet sea co-homológico (con diferenciales que incrementan el grado).

1.4. Ejemplo. Cada grupo abeliano A puede ser representado como F/R donde F es un grupo abeliano libre y R es su subgrupo de relaciones (que es también libre, como subgrupo de un grupo libre). Por lo tanto, los \mathbb{Z} -módulos tienen resoluciones proyectivas muy sencillas de la forma

$$0 \rightarrow R \rightarrow F \rightarrow A \rightarrow 0$$

Por ejemplo, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ no es proyectivo, pero tiene una resolución proyectiva

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times n} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

▲

La cohomología $H^n(P^\bullet)$ es, por la definición, poco interesante:

$$H^n(P^\bullet) \cong \begin{cases} M, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

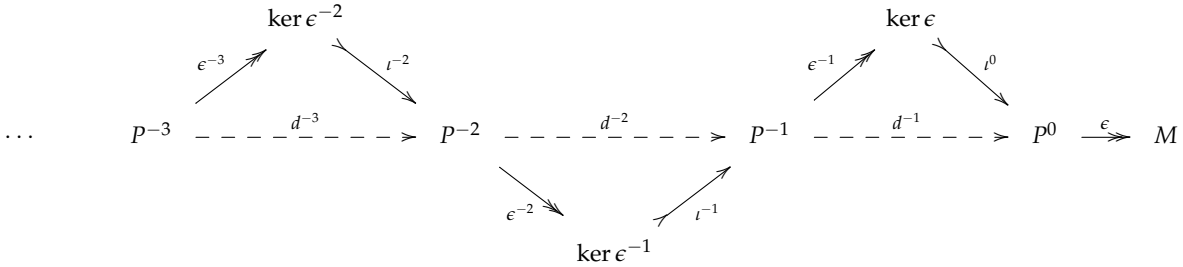
Sin embargo, en un rato las resoluciones nos van a servir para calcular funtores derivados. Antes de todo, tenemos que ver que resoluciones proyectivas siempre existen y, en cierto sentido, son únicas.

1.5. Observación. Si \mathbf{A} es una categoría abeliana con suficientes objetos proyectivos (por ejemplo, la categoría de R -módulos), entonces para cada objeto $M \in \mathbf{A}$ existe una resolución proyectiva.

Demostración. Vamos a construir paso a paso una sucesión exacta

$$\dots \rightarrow P^{-2} \xrightarrow{d^{-2}} P^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} P^0 \xrightarrow{\epsilon} M \rightarrow 0$$

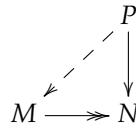
Primero, escojamos un epimorfismo $\epsilon: P^0 \rightarrow M$ desde un objeto proyectivo P^0 . Este epimorfismo tiene algún núcleo $\iota^0: \ker \epsilon \rightarrow P^0$. Luego, existe un epimorfismo $\epsilon^{-1}: P^{-1} \rightarrow \ker \epsilon$, donde P^{-1} es otro módulo libre. Este epimorfismo también tiene algún núcleo, etcétera. Así inductivamente construimos un diagrama



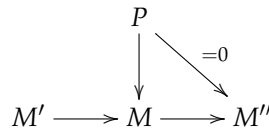
Definamos $d^n := \iota^{n+1} \circ \epsilon^n$. Se ve que todo esto da una resolución de M . ■

1.6. Ejercicio. Termine la demostración: verifique que la sucesión es exacta ("im $d^{n-1} = \ker d^n$ " para cada n ; es una caza de diagramas sencilla).

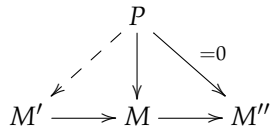
1.7. Ejercicio. Sea P un objeto proyectivo. Recuerde que esto es equivalente a la siguiente propiedad de extensión:



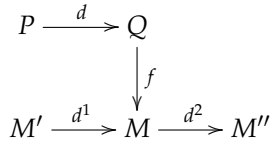
0) Deduzca la siguiente propiedad: si P es proyectivo y tenemos un diagrama conmutativo



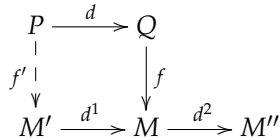
donde la fila $M' \rightarrow M \rightarrow M''$ es exacta y la composición $P \rightarrow M \rightarrow M''$ es el morfismo cero, entonces existe un morfismo $P \rightarrow M'$ tal que el diagrama conmuta:



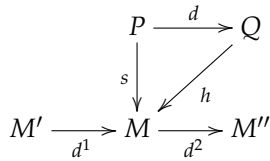
1) Sea P un objeto proyectivo. Supongamos que en el diagrama



la fila $M' \rightarrow M \rightarrow M''$ es exacta y además $d^2 \circ f \circ d = 0$. Entonces existe un morfismo $f' : P \rightarrow M'$ tal que $f \circ d = d^1 \circ f'$:

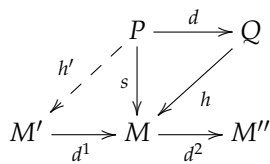


2) Sea P un objeto proyectivo. Supongamos que en el siguiente diagrama (*¡no necesariamente conmutativo!*) tenemos $d^2 \circ h \circ d = d^2 \circ s$ y la fila $M' \rightarrow M \rightarrow M''$ es exacta:



Entonces existe un morfismo $h' : P \rightarrow M'$ tal que

$$d^1 \circ h' + h \circ d = s.$$



1.8. Proposición. Sea $P^\bullet \rightarrow M$ una resolución proyectiva de M y $Q^\bullet \rightarrow N$ otro complejo exacto (en particular, $Q^\bullet \rightarrow N$ puede ser una resolución proyectiva de N). Entonces cada morfismo $f : M \rightarrow N$ induce un morfismo de complejos $f^\bullet : P^\bullet \rightarrow Q^\bullet$ tal que $f_0^* : H^0(P^\bullet) \rightarrow H^0(Q^\bullet)$ coincide con $f : M \rightarrow N$. Además, f^\bullet es único salvo homotopía.

Demostración. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo donde las filas son exactas:

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & P^{-2} & \xrightarrow{d^{-2}} & P^{-1} & \xrightarrow{d^{-1}} & P^0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0 \\
& & & & & & \downarrow f \\
\cdots & \longrightarrow & Q^{-2} & \xrightarrow{\partial^{-2}} & Q^{-1} & \xrightarrow{\partial^{-1}} & Q^0 \xrightarrow{\epsilon'} N \longrightarrow 0
\end{array}$$

El punto 1) del ejercicio 1.7 nos permite construir inductivamente morfismos $f^n: P^n \rightarrow Q^n$ que dan el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & P^{-2} & \xrightarrow{d^{-2}} & P^{-1} & \xrightarrow{d^{-1}} & P^0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow f^{-2} & & \downarrow f^{-1} & & \downarrow f^0 \\
& & Q^{-2} & \xrightarrow{\partial^{-2}} & Q^{-1} & \xrightarrow{\partial^{-1}} & Q^0 \xrightarrow{\epsilon'} N \longrightarrow 0
\end{array}$$

Este f^\bullet no es necesariamente único, pero si existe otro morfismo de complejos $g^\bullet: P^\bullet \rightarrow Q^\bullet$, entonces podemos aplicar el punto 2) del ejercicio 1.7 a los morfismos $s^n := f^n - g^n$ para obtener h^n tales que

$$s^n = h^{n+1} \circ d^n + \partial^{n-1} \circ h^n.$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & P^{-2} & \xrightarrow{d^{-2}} & P^{-1} & \xrightarrow{d^{-1}} & P^0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow f^{-2} & \swarrow h^{-1} & \downarrow f^{-1} & \swarrow h^0 & \downarrow f^0 \\
& & Q^{-2} & \xrightarrow{\partial^{-2}} & Q^{-1} & \xrightarrow{\partial^{-1}} & Q^0 \xrightarrow{\epsilon'} N \longrightarrow 0
\end{array}$$

1.9. Ejercicio. Provea los detalles necesarios.

1.10. Corolario. La resolución proyectiva $P^\bullet \rightarrow M$ está definida de modo único salvo homotopía de complejos.

Demostración. Sean $P^\bullet \rightarrow M$ y $Q^\bullet \rightarrow M$ dos resoluciones proyectivas de M . Entonces existen morfismos de complejos $f^\bullet: P^\bullet \rightarrow Q^\bullet$ y $g^\bullet: Q^\bullet \rightarrow P^\bullet$ que inducen en H^0 el morfismo $\text{id}_M: M \rightarrow M$. Luego, las composiciones $g^\bullet \circ f^\bullet$ y $f^\bullet \circ g^\bullet$ deben ser equivalentes por una homotopía de cadenas a los morfismos identidades $P^\bullet \rightarrow P^\bullet$ y $Q^\bullet \rightarrow Q^\bullet$. ■

2. Resoluciones inyectivas

2.1. Definición. Sea \mathbf{A} una categoría abeliana. Se dice que en \mathbf{A} hay **suficientes objetos inyectivos** si para cada $M \in \mathbf{A}$ existe un monomorfismo $M \rightarrow I$ hacia algún objeto inyectivo I .

Esto significa que cada objeto de la categoría es un sub-objeto de un objeto inyectivo: $M \subset I$.

2.2. Hecho. Hay suficientes R -módulos inyectivos; es decir, para cada R -módulo M existe un R -módulo inyectivo I tal que M es un submódulo de I .

Este resultado es un poco más técnico que la existencia de suficientes proyectivos en $R\text{-Mód}$, así que vamos a postponer su demostración a la siguiente sección.

3. Suficientes R -módulos inyectivos

Como hemos visto, hay suficientes R -módulos proyectivos: para cada R -módulo M existe un R -módulo proyectivo P junto con un epimorfismo $P \rightarrow M$. La demostración era muy fácil porque se podía considerar el R -módulo libre apropiado $R \langle X \rangle$. La situación con módulos inyectivos es más sutil: no es tan obvio cómo a partir de un R -módulo M se puede construir un R -módulo inyectivo I tal que $M \subset I$ es su submódulo. Hay dos métodos diferentes para demostrar que hay suficientes inyectivos: uno es construirlos directamente y otro es demostrar que la categoría $R\text{-Mód}$ satisface ciertos axiomas adicionales que se tratan de productos infinitos (les recuerdo que los axiomas básicas de categorías abelianas se tratan solo de productos finitos $M \oplus N$) y usar un teorema general del artículo de Tohoku de Grothendieck. El último método fue descubierto para demostrar que la categoría de haces de R -módulos tiene suficientes objetos inyectivos (y en general no tiene suficientes objetos proyectivos). Para nuestros objetivos va a ser suficiente el método explícito porque no nos interesan otras categorías abelianas, sino solamente la de R -módulos.

3.1. Definición. Si M es un R -módulo, sea

$$\widehat{M} := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

el grupo de homomorfismos de grupos abelianos $f: M \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ con acción de R definida por $(r \cdot f)(x) := f(r \cdot x)$.

\mathbb{Q}/\mathbb{Z} es un grupo abeliano inyectivo, lo que significa que el funtor contravariante $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ es exacto (visto como un funtor con valores en \mathbf{Ab} o en $R\text{-Mód}$, gracias a la estructura de R -módulo sobre $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ definida arriba). Entonces tenemos la siguiente

3.2. Observación. *Tenemos un funtor exacto contravariante*

$$\widehat{\cdot}: R\text{-Mód}^{\circ} \rightarrow R\text{-Mód}.$$

Notamos que tenemos un isomorfismo natural en M

$$\widehat{M} = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \underline{\text{Hom}}_R(M, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})),$$

(es decir, isomorfismo de funtores $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \underline{\text{Hom}}_R(-, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}))$), lo que significa que $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ es un R -módulo inyectivo.

3.3. Observación. *Si $M \neq 0$, entonces $\widehat{M} \neq 0$. Es decir, si $M \neq 0$, entonces existe un morfismo de grupos abelianos no trivial $M \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.*

Demostración. Si $M \neq 0$, entonces M contiene un subgrupo abeliano cíclico no trivial $M' \subset M$, donde $M' \cong \mathbb{Z}$ o $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Luego, como el grupo \mathbb{Q}/\mathbb{Z} es inyectivo, el monomorfismo $M' \hookrightarrow M$ induce un epimorfismo $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M', \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Entonces es suficiente encontrar algún homomorfismo no trivial $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ o $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. En el primer caso, tenemos $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, y entonces hay un montón de homomorfismos no triviales; en el segundo caso $1 \mapsto [1/n]$ define correctamente un homomorfismo no trivial. ■

El funtor $\widehat{\cdot}: R\text{-Mód}^{\circ} \rightarrow R\text{-Mód}$ es exacto y contravariante, de donde el funtor $\widehat{\cdot}$ es exacto covariante $R\text{-Mód} \rightarrow R\text{-Mód}$. Para cada M consideremos el morfismo de evaluación

*Como siempre, si R no es conmutativo, la acción correcta es por la derecha: para un R -módulo izquierdo M el R -módulo \widehat{M} es naturalmente derecho.

$$\eta_M: M \rightarrow \widehat{M} = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}),$$

$$x \mapsto (f \mapsto f(x)).$$

Se ve que estos morfismos son naturales: cada morfismo de R -módulos $f: M \rightarrow N$ induce un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\eta_M} & \widehat{M} \\ f \downarrow & & \downarrow \widehat{f} \\ N & \xrightarrow{\eta_N} & \widehat{N} \end{array}$$

3.4. Observación. Para cada R -módulo M el morfismo natural $\eta_M: M \rightarrow \widehat{M}$ es mono.

Demostración. Sea $i: K \rightarrow M$ el núcleo de η_M . Tenemos que ver que $K = 0$. Gracias a 3.3, es suficiente demostrar que $\widehat{K} = 0$. El funtor $\widehat{}$ es exacto, y entonces induce un monomorfismo $\widehat{i}: \widehat{K} \rightarrow \widehat{M}$. Tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\eta_K} & \widehat{K} \\ i \downarrow & & \downarrow \widehat{i} \\ M & \xrightarrow{\eta_M} & \widehat{M} \end{array}$$

Tenemos $\widehat{i} \circ \eta_K = \eta_M \circ i = 0$ y \widehat{i} es mono, y entonces $\eta_K = 0$. Pero esto implica que $\widehat{K} = 0$. De hecho, si $\widehat{K} \neq 0$, de donde existe un morfismo $f: \widehat{K} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tal que $f(x) \neq 0$ para algún $x \in \widehat{K}$. Pero en este caso $\eta_K(x)(f) \neq 0$ que contradice el hecho que $\eta_K = 0$. ■

Ahora estamos listos para demostrar que en la categoría de R -módulos hay suficientes objetos inyectivos:

3.5. Proposición. Para cualquier R -módulo M existe un monomorfismo $M \rightarrow I$ donde I es un R -módulo inyectivo.

Demostración. Consideremos el R -módulo \widehat{M} . Existe un epimorfismo $R\langle X \rangle \rightarrow \widehat{M}$ desde algún R -módulo libre con generadores X . El funtor $\widehat{}$ es contravariante exacto, entonces tenemos un monomorfismo

$$\widehat{M} \rightarrow \widehat{R\langle X \rangle}$$

Además, como hemos visto, $M \rightarrow \widehat{M}$, entonces nos falta solo demostrar que $\widehat{R\langle X \rangle}$ es inyectivo. Pero

$$\widehat{R\langle X \rangle} = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R\langle X \rangle, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \underline{\text{Hom}}_R(R\langle X \rangle, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \cong \prod_{x \in X} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

es un producto de R -módulos inyectivos. ■

3.6. Ejercicio. Demuestre que de hecho, el funtor $\widehat{}$ es adjunto a sí mismo (ya que puede ser visto como un funtor $R\text{-Mód}^\circ \rightarrow R\text{-Mód}$ o $R\text{-Mód} \rightarrow R\text{-Mód}^\circ$) y $\eta_M: M \rightarrow \widehat{M}$ es precisamente la unidad de la adjunción.

En general, si $F: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ es adjunto por la izquierda a $G: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$, entonces

- 1) si F es exacto, entonces G preserva objetos inyectivos,
- 2) si G es exacto, entonces F preserva objetos proyectivos.

En efecto, por ejemplo, en el primer caso, si $I \in \mathbf{B}$ es inyectivo, entonces

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(-, G(I)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(F(-), I): \mathbf{A}^{\circ} \rightarrow \mathbf{Ab}$$

es exacto, siendo la composición de un funtor exacto $F: \mathbf{A}^{\circ} \rightarrow \mathbf{B}^{\circ}$ con un funtor exacto $\mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(-, I): \mathbf{B}^{\circ} \rightarrow \mathbf{Ab}$.

En nuestro caso, el funtor contravariante $\widehat{}$ es exacto y adjunto a sí mismo, y entonces preserva los objetos proyectivos en la categoría opuesta $R\text{-}\mathbf{Mód}^{\circ}$; en otras palabras, convierte cada R -módulo proyectivo en inyectivo. En particular, $\widehat{R\langle X \rangle}$ es inyectivo.