La función generatriz para B_k. Polinomios de Bernoulli

Alexey Beshenov (cadadr@gmail.com)

28 de Febrero de 2017

La función generatriz para B_k

Teorema. *Los números de Bernoulli pueden ser definidos por*

$$\frac{t\,e^t}{e^t-1} = \sum_{k\ge 0} B_k\,\frac{t^k}{k!}.$$

Aunque se puede pensar en esta identidad como en la serie de Taylor para $\frac{t\,e^t}{e^t-1}$ en un entorno de 0, para nosotros esto significa nada más que el cociente de series formales $\frac{t\,e^t}{e^t-1}$ en $\mathbb{Q}((t))$ es igual a la serie formal $\sum_{k\ge 0} B_k\,\frac{t^k}{k!}$.

Demostración. Tenemos que ver que la identidad

$$\left(\sum_{k\ge 0} B_k\,\frac{t^k}{k!}\right)\,(e^t-1) = t\,e^t.$$

define los números de Bernoulli. Calculemos el producto al lado izquierdo:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k\ge 0} B_k\,\frac{t^k}{k!}\right)\,(e^t-1) &= \left(\sum_{k\ge 0} B_k\,\frac{t^k}{k!}\right)\,\left(\sum_{k\ge 1} \frac{t^k}{k!}\right)\\
&= \sum_{k\ge 1}\left(\sum_{0\le i\le k-1} \frac{B_i}{i!}\,\frac{1}{(k-i)!}\right)\,t^k\\
&= \sum_{k\ge 1}\left(\sum_{0\le i\le k-1} \frac{B_i}{i!}\,\frac{k!}{(k-i)!}\right)\,\frac{t^k}{k!}\\
&= \sum_{k\ge 1}\left(\sum_{0\le i\le k-1} \binom{k}{i} B_i\right)\,\frac{t^k}{k!}\\
&\overset{???}{=} \sum_{k\ge 1} \frac{t^k}{(k-1)!} = t\,e^t.
\end{aligned}$$

La última igualdad se cumple si y solamente si

$$\sum_{0\le i\le k-1} \binom{k}{i} B_i = k.$$

Como hemos visto, esta identidad define los números de Bernoulli. ∎

Ejemplo. *Calculemos algunos términos de la serie formal* $\frac{t\,e^t}{e^t-1}$. *Tenemos*

$$e^t - 1 = t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + \frac{t^5}{120} + \cdots = t\,\left(1 + \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{3!} + \frac{t^3}{4!} + \frac{t^4}{5!} + \cdots\right).$$

Luego,

$$\frac{t}{e^t-1} = \frac{1}{1 + \dfrac{t}{2!} + \dfrac{t^2}{3!} + \dfrac{t^3}{4!} + \dfrac{t^4}{5!} + \cdots}$$

Podemos calcular la última serie usando la fórmula

$$\frac{1}{1+f(t)} = 1 - f(t) + f(t)^2 - f(t)^3 + f(t)^4 - \cdots$$

Tenemos

$$\begin{aligned}
1 - \left(\frac{t}{2!} + \frac{t^2}{3!} + \frac{t^3}{4!} + \frac{t^4}{5!} + \cdots\right) + \left(\frac{t}{2!} + \frac{t^2}{3!} + \frac{t^3}{4!} + \frac{t^4}{5!} + \cdots\right)^2 \\
- \left(\frac{t}{2!} + \frac{t^2}{3!} + \frac{t^3}{4!} + \frac{t^4}{5!} + \cdots\right)^3 + \left(\frac{t}{2!} + \frac{t^2}{3!} + \frac{t^3}{4!} + \frac{t^4}{5!} + \cdots\right)^4 - \cdots \\
= 1 - \left(\frac{t}{2} + \frac{t^2}{6} + \frac{t^3}{24} + \frac{t^4}{120} + \cdots\right) + \left(\frac{t^2}{4} + \frac{t^3}{6} + \frac{5\,t^4}{72} + \cdots\right) - \left(\frac{t^3}{8} + \frac{t^4}{8} + \cdots\right) + \left(\frac{t^4}{16} + \cdots\right) - \cdots \\
= 1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{12} + 0\cdot t^3 - \frac{t^4}{720} + \cdots
\end{aligned}$$

Multiplicando las seres, se obtiene

$$\frac{t\,e^t}{e^t-1} = \left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots\right)\cdot\left(1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{12} + 0\cdot t^3 - \frac{t^4}{720} + \cdots\right) = 1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{12} - \frac{t^4}{720} + \cdots$$

y entonces

$$B_0 = 1, \quad B_1 = \frac{1}{2}, \quad B_2 = 2!\cdot\frac{1}{12} = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -4!\cdot\frac{1}{720} = -\frac{1}{30}.$$

▲

Por supuesto, el último ejemplo es un poco masoquista: todo esto se puede hacer en PARI/GP.

```
? ser = (t*exp(t))/(exp(t)-1)
% = 1 + 1/2*t + 1/12*t^2 - 1/720*t^4 + 1/30240*t^6 - 1/1209600*t^8 + 1/47900160*t^10
- 691/1307674368000*t^12 + 1/74724249600*t^14 + O(t^16)

? vector (11,k, polcoeff(ser,(k-1),t)*(k-1)!)
% = [1, 1/2, 1/6, 0, -1/30, 0, 1/42, 0, -1/30, 0, 5/66]
```

En muchos libros (y también en PARI/GP) se usa otra convención para los números de Bernoulli según la cual $B_1 = -\frac{1}{2}$. En este caso la función generatriz es $\frac{t\,e^t}{e^t-1} - t = \frac{t}{e^t-1}$.

Ejemplo. *La fórmula* $\frac{t\,e^t}{e^t-1} = \sum_{k\ge 0} \frac{B_k}{k!}\,t^k$ *nos permite demostrar que* $B_k = 0$ *para* $k \ge 3$ *impar. En efecto, para ignorar el caso excepcional* $B_1 = \frac{1}{2}$*, examinemos la función*

$$f(t) := \frac{t\,e^t}{e^t-1} - \frac{t}{2} = B_0 + \frac{B_2}{2!}\,t^2 + \frac{B_3}{3!}\,t^3 + \frac{B_4}{4!}\,t^4 + \frac{B_5}{5!}\,t^5 + \cdots$$

Tenemos

$$f(t) = \frac{t\,e^t}{e^t-1} - \frac{t}{2} = \frac{t\,(e^t-1+1)}{e^t-1} - \frac{t}{2} = \frac{t}{e^t-1} + \frac{t}{2}.$$

Luego,

$$f(-t) = \frac{(-t)\,e^{-t}}{e^{-t}-1} - \frac{(-t)}{2} = \frac{t}{e^t-1} + \frac{t}{2}.$$

Entonces, $f(t) = f(-t)$*, lo que implica que los coeficientes impares de* $f(t)$ *son nulos.* ▲

Los números de Bernoulli también surgen en otras series. Por ejemplo, tenemos la siguiente

Proposición.

$$t\,\cot(t) = 1 + \sum_{k\ge 1} (-1)^k\, 2^{2k}\, \frac{B_{2k}}{(2k)!}\, t^{2k}.$$

Esto ya tiene que ser interpretado analíticamente. Las series con números de Bernoulli para varias funciones como $\tan(t)$, $\cot(t)$, $\tanh(t)$, $\coth(t)$ fueron descubiertas por Euler.

Demostración. Se tiene

$$\cos(t) = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}, \quad \operatorname{sen}(t) = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} t\,\cot(t) &= t\,\frac{\cos(t)}{\operatorname{sen}(t)} = it\,\frac{e^{it}+e^{-it}}{e^{it}-e^{-it}} = it\,\frac{e^{2it}+1}{e^{2it}-1} = -it + \frac{2it\,e^{2it}}{e^{2it}-1} \\ &= -it + \sum_{k\ge 0} \frac{B_k\cdot(2it)^k}{k!} = 1 + \sum_{k\ge 1} (-1)^k\, 2^{2k}\, \frac{B_{2k}}{(2k)!}\, t^{2k}. \end{aligned}$$

■

Ejercicio (Euler). *Demuestre la identidad*

$$(2k+1)\,B_{2k} = -\sum_{1\le \ell\le k-1} \binom{2k}{2\ell} B_{2\ell}\, B_{2\,(k-\ell)} \quad \textit{para } k\ge 2.$$

Por ejemplo, para $k = 3$ *tenemos*

$$-7\,\underbrace{B_6}_{=\frac{1}{42}} = \underbrace{\binom{6}{2} B_2\, B_4}_{=15\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{1}{30}\right)} + \underbrace{\binom{6}{4} B_4\, B_2}_{=15\cdot\left(-\frac{1}{30}\right)\cdot\frac{1}{6}}.$$

Indicación: considere la función generatriz para los números pares $f(t) := \frac{t\,e^t}{e^t-1} - \frac{t}{2} = \sum_{k\ge 0} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\,t^{2k}$*. Demuestre la identidad con la derivada formal* $f(t) - t\,f(t)' = f(t)^2 - \frac{t^2}{4}$*; sustituya* $f(t)$ *por* $\sum_{k\ge 0} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\,t^{2k}$ *y compare los coeficientes de* t^{2k}*.*

Ejercicio. *Demuestre por inducción que* $(-1)^{k+1}\,B_{2k} > 0$ *para todo* $k \ge 1$*.*
Indicación: use el ejercicio anterior.

Polinomios de Bernoulli

Hay varios modos de definir los polinomios de Bernoulli; el más común es por una función generatriz. Vamos a necesitar las series de potencias formales en dos variables:

$$\sum_{k,\ell \geq 0} a_{k,\ell}\, t^k\, x^\ell,$$

respecto a la suma término por término y multiplicación que extiende la multiplicación de polinomios en dos variables. Tenemos la serie formal $\frac{t}{e^t-1} \in \mathbb{Q}[\![t]\!] \subset \mathbb{Q}[\![t,x]\!]$ y podemos multiplicarla por la serie

$$e^{tx} := \sum_{k\geq 0} \frac{t^k\, x^k}{k!} \in \mathbb{Q}[\![t,x]\!].$$

Un momento de reflexión demuestra que el resultado es de la forma

$$\frac{t\, e^{tx}}{e^t-1} := \sum_{k\geq 0} B_k(x)\, \frac{t^k}{k!}, \tag{1}$$

donde $B_k(x)$ son algunos *polinomios* en x.

Definición. *El **polinomio de Bernoulli** $B_k(x)$ es el polinomio definido por (1).*

Ejemplo. *Vamos a ver un poco más adelante cómo calcular los polinomios $B_k(x)$; por el momento podemos obtener algunos de los primeros. Como hemos calculado arriba,*

$$\frac{t}{e^t-1} = 1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{12} - \frac{t^4}{720} + \cdots$$

Luego,

$$\frac{t}{e^t-1}\, e^{tx} = \left(1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{12} - \cdots\right) \left(1 + t\,x + \frac{t^2\, x^2}{2} + \cdots\right) = 1 + \left(x - \frac{1}{2}\right) t + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12}\right) t^2 + \cdots$$

de donde

$$B_0(x) = 1, \quad B_1(x) = x - \frac{1}{2}, \quad B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}.$$

▲

Observación. *Para todo $k \geq 0$,*

$$B_k(1) = B_k$$

es el k-ésimo número de Bernoulli.

Demostración. Comparando (1) con la función generatriz $\frac{t\,e^t}{e^t-1} = \sum_{k\geq 0} B_k \frac{t^k}{k!}$. ■

Resulta que el término constante de $B_k(x)$ es también igual a B_k:

Observación. *Para todo $k \geq 0$*

$$B_k(x+1) - B_k(x) = k\, x^{k-1}. \tag{2}$$

En particular, para $x = 0$ y $k \neq 1$ tenemos

$$B_k(1) = B_k(0) = B_k.$$

Demostración. Tenemos la identidad

$$\frac{t\,e^{(x+1)\,t}}{e^t-1} - \frac{t\,e^{t\,x}}{e^t-1} = t\,e^{t\,x},$$

de donde

$$\sum_{k\geq 0} (B_k(x+1) - B_k(x))\,\frac{t^k}{k!} = \sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!}\,t^{k+1}.$$

Comparando los coeficientes de t^k, se obtiene (2). ∎

Note que para $k=1$ tenemos $B_1(0) = -\frac{1}{2}$ y $B_1(1) = +\frac{1}{2}$.

Observación. *Para todo $k \geq 0$*

$$B_k(1-x) = (-1)^k\,B_k(x).$$

(En particular, para $x=0$ tenemos $B_k = (-1)^k\,B_k$ para $k\geq 3$, lo que implica que $B_k = 0$ para $k \geq 3$ impar, como ya hemos visto.)

Demostración. Usando funciones generatrices,

$$\sum_{k\geq 0} B_k(1-x)\,\frac{t^k}{k!} = \frac{t\,e^{(1-x)\,t}}{e^t-1} = \frac{(-t)\,e^{x\,(-t)}}{e^{-t}-1} = \sum_{k\geq 0} (-1)^k\,B_k(x)\,\frac{t^k}{k!}.$$

∎

Los polinomios de Bernoulli pueden ser expresados en términos de los números de Bernoulli:

Proposición.

$$B_k(x) = \sum_{0\leq i\leq k} (-1)^i \binom{k}{i}\,B_i\,x^{k-i}.$$

Demostración. Calculemos el producto de series de potencias

$$\frac{t}{e^t-1}\cdot e^{tx}.$$

Tenemos

$$\frac{t}{e^t-1} = \frac{(-t)\,e^{-t}}{e^{-t}-1} = \sum_{k\geq 0} (-1)^k\,B_k\,\frac{t^k}{k!}, \quad e^{tx} = \sum_{k\geq 0} \frac{(tx)^k}{k!}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k\geq 0} (-1)^k\,B_k\,\frac{t^k}{k!}\right)\cdot\left(\sum_{k\geq 0}\frac{(tx)^k}{k!}\right) &= \sum_{k\geq 0}\left(\sum_{0\leq i\leq k} (-1)^i\,\frac{1}{i!\,(k-i)!}\,B_i\,x^{k-i}\right)t^k \\ &= \sum_{k\geq 0}\left(\sum_{0\leq i\leq k} (-1)^i\binom{k}{i}\,B_i\,x^{k-i}\right)\frac{t^k}{k!}.\end{aligned}$$

∎

Proposición. *Para todo $k\geq 1$ se tiene*

$$B_k'(x) = k\,B_{k-1}(x), \qquad \int_0^1 B_k(x)\,dx = 0.$$

Demostración. Hay varios modos de verificar esto. Se puede usar la expresión $B_k(x) = \sum_{0 \le i \le k} (-1)^i \binom{k}{i} B_i\, x^{k-i}$. También podemos tomar las derivadas formales de la identidad (**??**):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{t\, e^{tx}}{e^t - 1}\right) = \frac{t \cdot t\, e^{tx}}{e^t - 1} = t \sum_{k \ge 0} B_k(x)\, \frac{t^k}{k!} = \sum_{k \ge 1} B_{k-1}(x)\, \frac{t^k}{(k-1)!} = \sum_{k \ge 0} B_k'(x)\, \frac{t^k}{k!}.$$

Luego, para ver que $\int_0^1 B_k(x)\, dx = 0$, es suficiente observar que $\int B_k(x)\, dx = \frac{1}{k+1} B_{k+1}(x) + C$, donde $B_{k+1}(0) = B_{k+1}(1)$. ■

Esto nos da otra definición de los polinomios de Bernoulli:

Definición alternativa. *Los polinomios $B_k(x)$ están definidos por*

$$B_0(x) := 1$$

y

$$B_k'(x) = k\, B_{k-1}(x), \quad \int_0^1 B_k(x)\, dx = 0 \quad \textit{para } k \ge 1.$$

(En efecto, la identidad $B_k'(x) = k\, B_{k-1}(x)$ define $B_k(x)$ salvo el término constante, pero el último se recupera de la condición $\int_0^1 B_k(x)\, dx = 0$.) Recordemos que los polinomios $S_k(x)$ que hemos estudiado en la primera lección satisfacen la identidad

$$S_k'(x) = k\, S_{k-1}(x) + B_k.$$

Esto significa que las derivadas $S_k'(x)$ satisfacen la misma identidad que $B_k(x)$:

$$S_k''(x) = k\, S_{k-1}'(x).$$

Además, para $k \ne 1$ tenemos $B_k(0) = S_k'(0) =: B_k$, y se ve que los polinomios de Bernoulli son simplemente las derivadas de los polinomios $S_k(x)$:

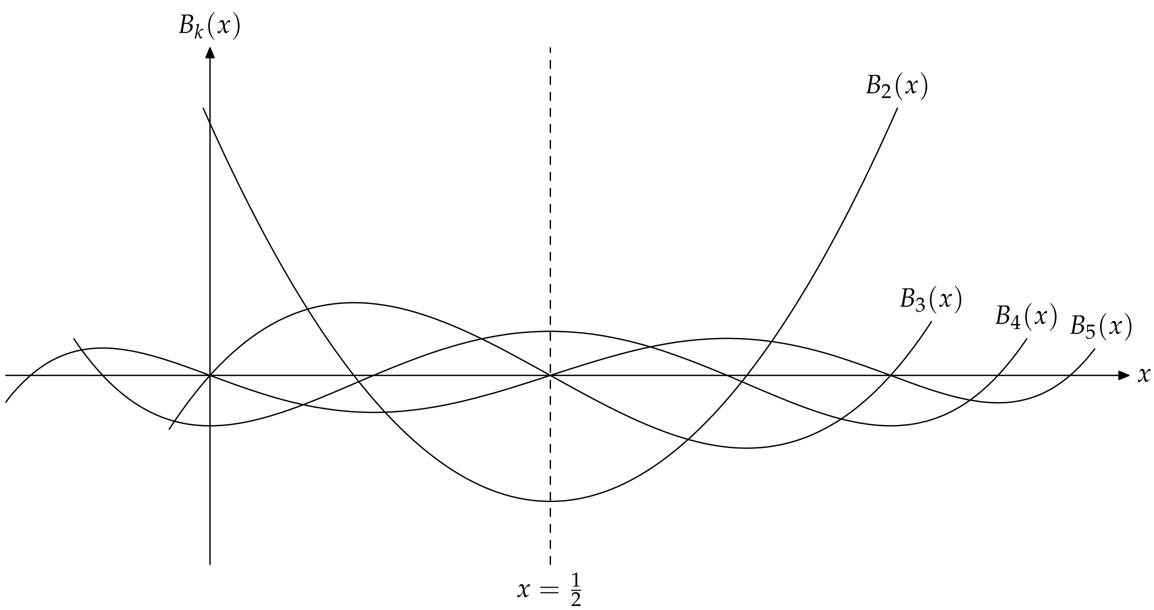
$$B_k(x) = S_k'(x), \quad \text{para } k \ne 1.$$

(El caso $k = 1$ es excepcional: $S_1(x) = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} x$, $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$.)

Ahora podemos compilar fácilmente una lista de los primeros polinomios de Bernoulli:

$$
\begin{aligned}
B_0(x) &= 1, \\
B_1(x) &= x - \frac{1}{2}, \\
B_2(x) &= x^2 - x + \frac{1}{6}, \\
B_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}\,x^2 + \frac{1}{2}\,x, \\
B_4(x) &= x^4 - 2\,x^3 + x^2 - \frac{1}{30}, \\
B_5(x) &= x^5 - \frac{5}{2}\,x^4 + \frac{5}{3}\,x^3 - \frac{1}{6}\,x, \\
B_6(x) &= x^6 - 3\,x^5 + \frac{5}{2}\,x^4 - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{42}, \\
B_7(x) &= x^7 - \frac{7}{2}\,x^6 + \frac{7}{2}\,x^5 - \frac{7}{6}\,x^3 + \frac{1}{6}\,x, \\
B_8(x) &= x^8 - 4\,x^7 + \frac{14}{3}\,x^6 - \frac{7}{3}\,x^4 + \frac{2}{3}\,x^2 - \frac{1}{30}, \\
B_9(x) &= x^9 - \frac{9}{2}\,x^8 + 6\,x^7 - \frac{21}{5}\,x^5 + 2\,x^3 - \frac{3}{10}\,x, \\
B_{10}(x) &= x^{10} - 5\,x^9 + \frac{15}{2}\,x^8 - 7\,x^6 + 5\,x^4 - \frac{3}{2}\,x^2 + \frac{5}{66}.
\end{aligned}
$$

Podemos dibujar algunas gráficas para visualizar la relación $B_k(1-x) = (-1)^k\, B_k(x)$:



```
? Bpoly (k) = sum (i=0,k, (-1)^i * binomial(k,i) * B(i) * x^(k-i));

? vector (10,k,Bpoly(k))
% = [x - 1/2,
     x^2 - x + 1/6,
     x^3 - 3/2*x^2 + 1/2*x,
     x^4 - 2*x^3 + x^2 - 1/30,
     x^5 - 5/2*x^4 + 5/3*x^3 - 1/6*x,
     x^6 - 3*x^5 + 5/2*x^4 - 1/2*x^2 + 1/42,
     x^7 - 7/2*x^6 + 7/2*x^5 - 7/6*x^3 + 1/6*x,
     x^8 - 4*x^7 + 14/3*x^6 - 7/3*x^4 + 2/3*x^2 - 1/30,
     x^9 - 9/2*x^8 + 6*x^7 - 21/5*x^5 + 2*x^3 - 3/10*x,
     x^10 - 5*x^9 + 15/2*x^8 - 7*x^6 + 5*x^4 - 3/2*x^2 + 5/66]

? deriv (Bpoly(10),x)
% = 10*x^9 - 45*x^8 + 60*x^7 - 42*x^5 + 20*x^3 - 3*x
? 10 * Bpoly(9)
% = 10*x^9 - 45*x^8 + 60*x^7 - 42*x^5 + 20*x^3 - 3*x
```

Para comprobar los resultados, podemos directamente calcular la serie $\frac{t\,e^{tx}}{e^t-1}$:

```
? ser = t*exp (t*x) / (exp (t) - 1);
? polcoeff(ser,10,t)*10!
% = x^10 - 5*x^9 + 15/2*x^8 - 7*x^6 + 5*x^4 - 3/2*x^2 + 5/66
```

También podemos calcular las derivadas de $S_k(x)$:

```
? deriv (S(10),x)
% = x^10 + 5*x^9 + 15/2*x^8 - 7*x^6 + 5*x^4 - 3/2*x^2 + 5/66
```

En PARI/GP, la función predefinida `bernpol(k)` devuelve el polinomio de Bernoulli $B_k(x)$:

```
? bernpol(1)
% = x - 1/2
? bernpol(2)
% = x^2 - x + 1/6
? bernpol(3)
% = x^3 - 3/2*x^2 + 1/2*x
```