Valores especiales de la función zeta

Alexey Beshenov (cadadr@gmail.com)

1 de Marzo de 2017

La función zeta de Riemann

Definición. *La **función zeta de Riemann** está definida por la serie infinita*

$$\zeta(s) := \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \cdots$$

Observación. *La serie de arriba es absolutamente convergente para todo $s \in \mathbb{C}$ tal que* $\operatorname{Re} s > 1$.

Demostración. Si $s = a + i\,b$, tenemos

$$\left|\frac{1}{n^s}\right| = \frac{1}{n^a}.$$

Podemos usar el **criterio integral de convergencia**: $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^a}$ es convergente si y solamente si

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^a}\,dx < \infty.$$

En efecto, tenemos

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^a}\,dx = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{x^{1-a}}{1-a}\right]_1^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^{1-a}}{1-a} - \frac{1}{1-a}\right).$$

Este límite existe precisamente cuando $a > 1$. ∎

Note que para $s = 1$ se obtiene la **serie armónica**

$$\zeta(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

que es divergente.

Demostración (Nicolás Oresme, siglo XIV). En la serie

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \cdots$$

reemplacemos cada término $\frac{1}{n}$ por el número máximo $\frac{1}{2^k} \leq \frac{1}{n}$. Se obtiene una serie

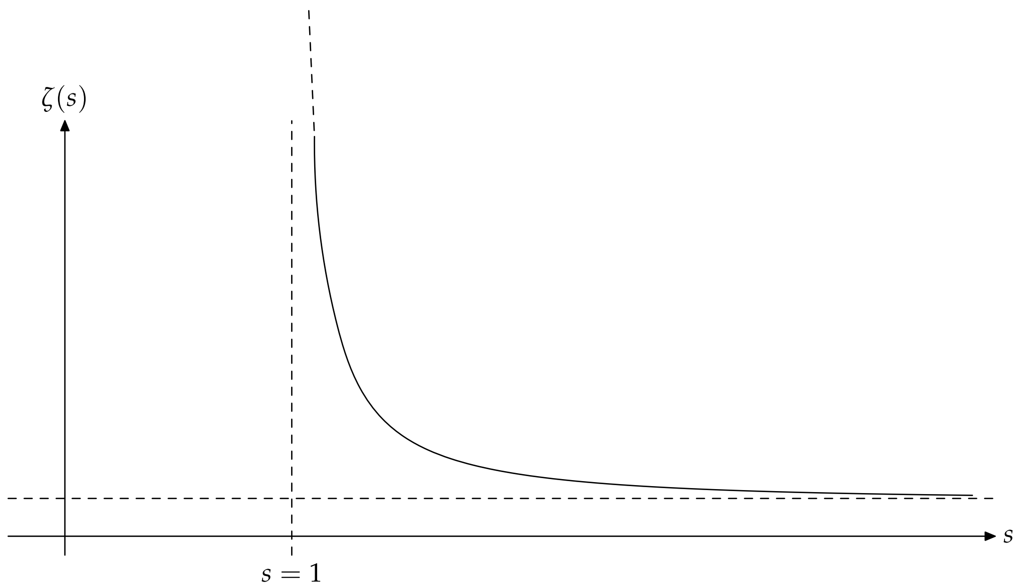
$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)}_{=\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right)}_{=\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right)}_{=\frac{1}{2}} + \cdots$$

que es obviamente divergente. Por tanto la serie armónica es también divergente. ∎

En PARI/GP:

```
? zeta (2)
% = 1.6449340668482264364724151666460251892
```

Para $s > 1$ la función $\zeta(s)$ es monótonamente decreciente, y se tiene $\lim_{s\to\infty} \zeta(s) = 1$:



Teorema (Fórmula del producto de Euler)**.**

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} = \prod_{p\ primo} \frac{1}{1-p^{-s}}.$$

La fórmula de arriba tiene una gran importancia en la teoría de números y fue descubierta por Euler. He aquí la demostración original, reproducida de su artículo "Variae observationes circa series infinitas":

Si

$$x = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \cdots, \tag{1}$$

entonces

$$\frac{1}{2^s}\,x = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{8^s} + \frac{1}{10^s} + \frac{1}{12^s} + \cdots, \tag{2}$$

y subtraendo (1) − (2) se obtiene

$$\frac{2^s-1}{2^s}\,x = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{11^s} + \cdots \tag{3}$$

Luego,

$$\left(\frac{2^s-1}{2^s}\right)\frac{1}{3^s}\,x=\frac{1}{3^s}+\frac{1}{9^s}+\frac{1}{15^s}+\frac{1}{21^s}+\frac{1}{27^s}+\cdots \tag{4}$$

y (3) − (4) nos da

$$\left(\frac{2^s-1}{2^s}\right)\left(\frac{3^s-1}{3^s}\right)x=1+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{7^s}+\frac{1}{11^s}+\cdots$$

Después de aplicar operaciones similares para todos los números primos, todos los términos excepto el primero se eliminan:

$$1=\left(\frac{2^s-1}{2^s}\right)\left(\frac{3^s-1}{3^s}\right)\left(\frac{5^s-1}{5^s}\right)\left(\frac{7^s-1}{7^s}\right)\left(\frac{11^s-1}{11^s}\right)\cdots x,$$

de donde se encuentra la serie x:

$$\left(\frac{2^s}{2^s-1}\right)\left(\frac{3^s}{3^s-1}\right)\left(\frac{5^s}{5^s-1}\right)\left(\frac{7^s}{7^s-1}\right)\left(\frac{11^s}{11^s-1}\right)\cdots=x=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{6^s}+\cdots$$

Q.E.D.

Dejo al lector pensar por qué esta demostración es esencialmente correcta.

Los valores $\zeta(2k)$

El siguiente resultado fue descubierto por Euler:

Teorema. *Para todo $k\ge 1$*

$$\zeta(2k):=1+\frac{1}{2^{2k}}+\frac{1}{3^{2k}}+\frac{1}{4^{2k}}+\cdots=(-1)^{k+1}\,B_{2k}\,\frac{2^{2k-1}}{(2k)!}\,\pi^{2k}.$$

Es algo sorprendente: ¡los números de Bernoulli surgen del estudio de las sumas de potencias $\sum_{1\le i\le n} i^k$, y ahora los mismos números aparecen en sumas de potencias infinitas! Los primeros valores de $\zeta(2k)$ son entonces

$$\begin{aligned}
\zeta(2)&=\frac{\pi^2}{6}\approx 1{,}644934\ldots,\\
\zeta(4)&=\frac{\pi^4}{90}\approx 1{,}082323\ldots,\\
\zeta(6)&=\frac{\pi^6}{945}\approx 1{,}017343\ldots,\\
\zeta(8)&=\frac{\pi^8}{9450}\approx 1{,}004077\ldots,\\
\zeta(10)&=\frac{\pi^{10}}{93\,555}\approx 1{,}000994\ldots,\\
\zeta(12)&=\frac{691\,\pi^{12}}{638\,512\,875}\approx 1{,}000246\ldots
\end{aligned}$$

En particular, el cálculo de $\zeta(2) = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots$ se conoce como el **problema de Basilea** que fue formulado por el matemático italiano Pietro Mengoli (1626–1686) en 1644. La primera solución fue encontrada por Euler en 1735.

Ejercicio. *Calcule las sumas parciales $\sum_{1 \le n \le N} \frac{1}{n^2}$ en PARI/GP. Note que su convergencia a $\zeta(2)$ es bastante lenta. Esto explica un siglo de sufrimiento de los matemáticos que trataban de obtener un valor aproximado de $\zeta(2)$… hasta la llegada de Euler.*

Corolario. *$(-1)^{k+1} B_{2k} > 0$ para todo $k \ge 1$. Es decir, $B_{2k} \ne 0$ y los signos de los números de Bernoulli pares se alternan.*

Demostración.

$$(-1)^{k+1} B_{2k} = \frac{(2k)!\,\zeta(2k)}{2^{2k-1}\,\pi^{2k}}.$$

∎

También se ve que $|B_{2k}| \xrightarrow{k\to\infty} \infty$, y que $|B_{2k}|$ crece muy rápido con k:

$$\begin{aligned}
B_2 &\approx +0{,}166667,\\
B_4 &\approx -0{,}033333,\\
B_6 &\approx +0{,}023810,\\
B_8 &\approx -0{,}033333,\\
B_{10} &\approx +0{,}075758,\\
B_{12} &\approx -0{,}253114,\\
B_{14} &\approx +1{,}166667,\\
B_{16} &\approx -7{,}092157,\\
B_{18} &\approx +54{,}971178,\\
B_{20} &\approx -529{,}124242.
\end{aligned}$$

Primera demostración de la fórmula para $\zeta(2k)$. Hemos visto en la lección de ayer la serie

$$t\,\cot(t) = 1 + \sum_{k\ge1} (-1)^k\, 2^{2k}\, \frac{B_{2k}}{(2k)!}\, t^{2k}. \tag{5}$$

En el análisis complejo se deduce otra serie [Ahlfors, “Complex analysis”, Chapter 5, §2]

$$\cot(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{t - \pi n},$$

que corresponde a la “descomposición en fracciones simples” de una función meromorfa: $\cot(t)$ tiene polos simples en $t = \pi n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ con residuo

$$\lim_{t\to\pi n} (t - \pi n)\,\cot(t) = \lim_{t\to0} \cos(t + \pi n)\,\frac{t}{\operatorname{sen}(t + \pi n)} = \lim_{t\to0} (-1)^n\,\cos(t)\,\frac{t}{(-1)^n\,\operatorname{sen}(t)} = 1.$$

Por “$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{t-\pi n}$” se entiende $\lim_{N\to\infty} \sum_{-N\le n\le N} \frac{1}{t-\pi n}$. Luego,

$$
\begin{aligned}
t\cot(t) &= t\left(\frac{1}{t}+\sum_{n\ge 1}\left(\frac{1}{t-\pi n}+\frac{1}{t+\pi n}\right)\right) = 1-2\sum_{n\ge 1}\left(\frac{t^2}{(\pi n)^2-t^2}\right) = 1-2\sum_{n\ge 1}\frac{t^2}{(\pi n)^2}\,\frac{1}{1-(\frac{t}{\pi n})^2}\\
&= 1-2\sum_{n\ge 1}\frac{t^2}{(\pi n)^2}\sum_{k\ge 0}\left(\frac{t}{\pi n}\right)^{2k} = 1-2\sum_{n\ge 1}\sum_{k\ge 1}\left(\frac{t}{\pi n}\right)^{2k} \quad \text{(la serie geométrica)}\\
&= 1-2\sum_{k\ge 1}\left(\sum_{n\ge 1}\frac{1}{n^{2k}}\right)\frac{t^{2k}}{\pi^{2k}} = 1-2\sum_{k\ge 1}\frac{\zeta(2k)\,t^{2k}}{\pi^{2k}}. \quad \text{(cambiando el orden de sumación)}
\end{aligned}
$$

Comparando coeficientes con (5), tenemos

$$(-1)^k\,2^{2k}\,\frac{B_{2k}}{(2k)!} = -2\,\frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k}}.$$

■

Series de Fourier para $B_k(x)$

Vamos a necesitar el siguiente resultado del análisis armónico, que es un caso especial de las **series de Fourier**:

Hecho. *Sea $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función continua por trozos y periódica:*

$$f(x+1) = f(x).$$

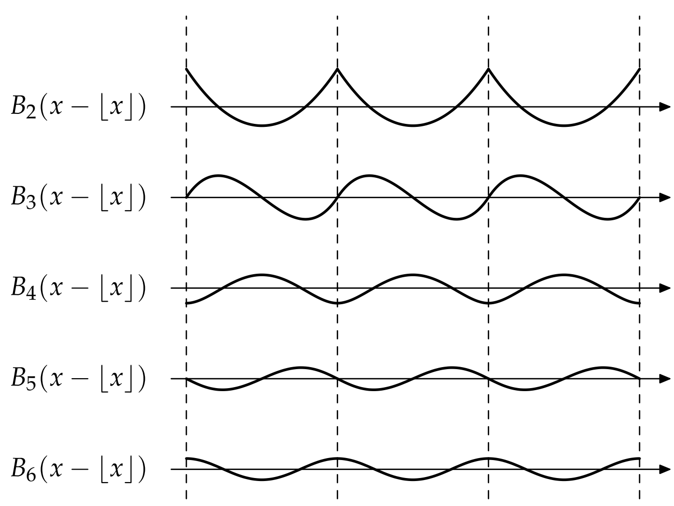
Entonces para todo $x_0\in\mathbb{R}$ donde f es continua y la derivada izquierda y derecha de f existen (pero no necesariamente coinciden) se tiene

$$f(x_0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(n)\,e^{2\pi i n x_0}, \quad \text{donde } \widehat{f}(n) := \int_0^1 e^{-2\pi i n x}\,f(x)\,dx.$$

En nuestro caso, nos interesan las funciones

$$f(x) := B_k(x-\lfloor x\rfloor),$$

donde $B_k(x)$ es el k-ésimo polinomio de Bernoulli. Para $k>1$ la función $B_k(x-\lfloor x\rfloor)$ es continua y para $k=1$ es discontinua en los puntos $x=n\in\mathbb{Z}$. También $B_k(x-\lfloor x\rfloor)$ es lisa para $k>2$, pero $B_2(x)$ no es lisa en los puntos $x=n\in\mathbb{Z}$, donde existen la derivada izquierda y derecha, pero son diferentes.



Los coeficientes de la serie de Fourier para $f(x)$ se calculan fácilmente. Para $n = 0$ tenemos

$$\widehat{f}(0) = \int_0^1 B_k(x)\,dx = 0.$$

Luego, para $n \neq 0$ y $k = 1$ podemos usar integración por partes ($\int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx = [f(x)\,g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx$):

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{-2\pi inx}\left(x - \frac{1}{2}\right) dx &= -\frac{1}{2\pi in}\int_0^1 \left(e^{-2\pi inx}\right)'\left(x - \frac{1}{2}\right) dx \\ &= -\frac{1}{2\pi in}\left(\left[e^{-2\pi inx}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right]_0^1 - \underbrace{\int_0^1 e^{-2\pi inx}\,dx}_{=0}\right) = -\frac{1}{2\pi in}.\end{aligned}$$

Para $k > 1$ integración por partes y la relación $B_k'(x) = k\,B_{k-1}(x)$ nos dan

$$\begin{aligned}\widehat{f}(n) = \int_0^1 e^{-2\pi inx}\,B_k(x)\,dx &= -\frac{1}{2\pi in}\int_0^1 (e^{-2\pi inx})'\,B_k(x)\,dx \\ &= -\frac{1}{2\pi in}\left(\left[e^{-2\pi inx}\,B_k(x)\right]_0^1 - k\int_0^1 e^{-2\pi inx}\,B_{k-1}(x)\,dx\right) \\ &= \frac{k}{2\pi in}\int_0^1 e^{-2\pi inx}\,B_{k-1}(x)\,dx \\ &= \frac{k\,(k-1)}{(2\pi in)^2}\int_0^1 e^{-2\pi inx}\,B_{k-2}(x)\,dx \\ &= \cdots \\ &= \frac{k!}{(2\pi in)^{k-1}}\int_0^1 e^{-2\pi inx}\left(x - \frac{1}{2}\right) dx \\ &= \frac{k!}{(2\pi in)^{k-1}}\cdot\left(-\frac{1}{2\pi in}\right) = -\frac{k!}{(2\pi in)^k}.\end{aligned}$$

Entonces, la serie de Fourier es

$$B_k(x - \lfloor x \rfloor) = -\frac{k!}{(2\pi i)^k}\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}}\frac{e^{2\pi inx}}{n^k}. \tag{6}$$

Como un caso especial, se obtiene la fórmula para $\zeta(2k)$:

Segunda demostración de la fórmula para $\zeta(2k)$. Para $x = 0$ la identidad (6) nos da

$$B_{2k} = B_{2k}(0) = -\frac{(2k)!}{(-1)^k\,(2\pi)^{2k}}\,2\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k+1}\frac{(2k)!}{2^{2k-1}\,\pi^{2k}}\,\zeta(2k).$$

∎

Note que los valores en los enteros impares $\zeta(2k+1)$ no se obtienen con este método.

Los valores $\zeta(2k+1)$

Los valores en los enteros positivos impares

$$\zeta(3),\ \zeta(5),\ \zeta(7),\ \zeta(9),\ \zeta(11),\ \ldots$$

son más misteriosos. *Al parecer*, son números trascendentes.

Recordemos que un número $z \in \mathbb{C}$ es **irracional** si $z \notin \mathbb{Q}$.

Por otro lado, un número z es **algebraico** si z es una raíz de algún polinomio con coeficientes en $\mathbb{Z}$. Por ejemplo, $\sqrt{2}$ es un número algebraico irracional.

Si z no es algebraico, se dice que es **trascendente**. Puede demostrarse que los números algebraicos forman un conjunto numerable, y entonces ¡casi todos los números son trascendentes! Lamentablemente, es muy difícil demostrar que un número específico es trascendente. Por ejemplo, π y e son trascendentes—es un corolario del célebre **teorema de Lindemann–Weierstrass**.

Por supuesto, los números

$$\zeta(2k) = (-1)^{k+1}\, B_{2k}\, \frac{2^{2k-1}}{(2k)!}\, \pi^{2k}$$

son también transcendentes, ya que π es trascendente (¡de hecho, es uno de los pocos números específicos cuya trascendencia se puede demostrar!). Los valores $\zeta(2k+1)$ deberían de ser trascendentes por alguna razón más sofisticada, y se supone que entre $\zeta(2k+1)$ distintos no hay ninguna relación algebraica.

Sin embargo, todavía no hay demostraciones ni siquiera de que los $\zeta(2k+1)$ sean irracionales. En 1977 el matemático francés Roger Apéry demostró que el número

$$\zeta(3) \approx 1{,}2020569031595942853997381\,6\ldots$$

es irracional. La tumba de Apéry en París lleva la inscripción

Roger APÉRY
1916–1994

$$1 + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{27} + \tfrac{1}{64} + \cdots \neq \tfrac{p}{q}$$

Los métodos de Apéry no se generalizan para demostrar que $\zeta(5)$ es irracional; hay pocos resultados en esta dirección. El matemático francés Tanguy Rivoal demostró en 2000 que entre los números $\zeta(3), \zeta(7), \zeta(9), \ldots$ hay una infinidad de irracionales, mientras que el matemático ruso Wadim Zudilin demostró en 2001 que por lo menos un número entre $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$ y $\zeta(11)$ es irracional.

Valores $\zeta(-1), \zeta(-2), \zeta(-3), \ldots$

La función zeta puede ser definida en todo plano complejo (véase [Ahlfors, “Complex analysis”, Chapter 5, §4] o cualquier libro de la teoría de números):

Hecho. *La función $\zeta(s)$ puede prolongarse analíticamente al plano complejo como una función meromorfa con un polo simple de residuo 1 en $s = 1$. Esta prolongación, que también se denota por $\zeta(s)$, satisface la siguiente* ***ecuación funcional****:*

$$\zeta(s) = 2^s\, \pi^{s-1}\, \operatorname{sen}\left(\frac{\pi s}{2}\right)\, \Gamma(1-s)\, \zeta(1-s). \tag{7}$$

Aquí $\Gamma(z) := \int_0^\infty x^{z-1}\, e^{-x}\, dx$ denota la **función Gamma**. En particular, $\Gamma(n) = (n-1)!$ para $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

Gracias a la ecuación funcional y la fórmula de Euler

$$\zeta(2k) = (-1)^{k+1}\, B_{2k}\, \frac{2^{2k-1}}{(2k)!}\, \pi^{2k},$$

podemos obtener los valores de la función en los enteros negativos. En efecto, para los enteros negativos pares $s = -2k$ tenemos

$$\zeta(-2k) = 2^{-2k}\, \pi^{-2k-1}\, \underbrace{\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi k}{2}\right)}_{=0}\, \Gamma(2k+1)\, \zeta(2k+1) = 0.$$

Y para los $s = -(2k+1)$ impares,

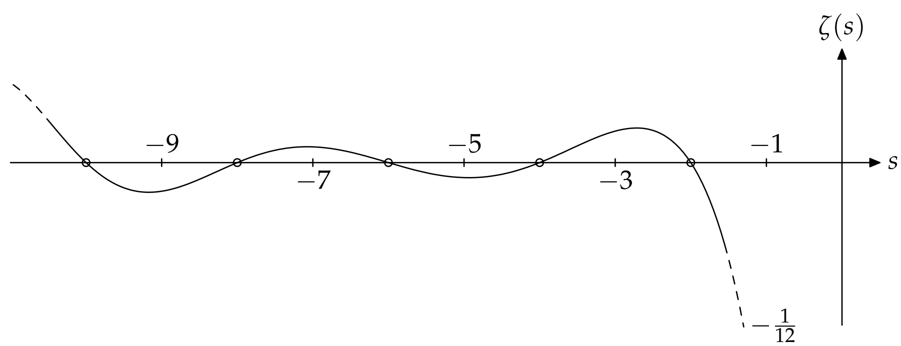
$$\begin{aligned} \zeta(-(2k+1)) &= 2^{-(2k+1)}\, \pi^{-(2k+2)}\, \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi\,(2k+1)}{2}\right)\, (2k+1)!\, \zeta(2k+2) \\ &= \cancel{2^{-(2k+1)}}\, \cancel{\pi^{-(2k+2)}}\, (-1)^{k+1}\, (2k+1)!\, (-1)^k\, B_{2k+2}\, \frac{\cancel{2^{2k+1}}}{(2k+2)!}\, \cancel{\pi^{2k+2}} \\ &= -\frac{B_{2k+2}}{2k+2}. \end{aligned}$$

Ya que $B_n = 0$ para n impar, en ambos casos se tiene

$$\zeta(-n) = -\frac{B_{n+1}}{n+1}.$$

Además, para $n = 0$ la prolongación analítica nos da $\zeta(0) = -\frac{1}{2} = -B_1$, así que esta fórmula es válida también para $n = 0$.

n:	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	$\cdots$
$\zeta(n)$:	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{120}$	0	$-\frac{1}{252}$	0	$\frac{1}{240}$	0	$-\frac{1}{132}$	0	$\cdots$



(Después $\zeta(s)$ es decreciente hasta su polo en $s = 1$.)

Terminamos por el cálculo de $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$ encontrado por Euler:

Para la serie geométrica

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

la derivada formal nos da

$$1 + 2\,x + 3\,x^2 + 4\,x^3 + 5\,x^4 + 6\,x^5 + 7\,x^6 + 8\,x^7 + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2},$$

de donde para $x = -1$ (¡sic!)

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + \cdots = \frac{1}{4}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} -3\,\zeta(-1) &= \zeta(-1) - 4\,\zeta(-1) \\ &= (1 + 2 + 3 + 4 + \cdots) - (4 + 8 + 12 + 16 + \cdots) \\ &= 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + \cdots = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

lo que implica $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$, Q.E.D.

El lector no debería tomar en serio el argumento de arriba ni usar métodos similares en sus demostraciones.