

Ejercicios sobre categorías

Alexey Beshenov (cadadr@gmail.com)

Universidad de El Salvador. Ciclo impar 2018

El examen parcial sobre categorías será oral y constará de 5 problemas y 5 preguntas teóricas, escogidas al azar de la lista de abajo.

Iso-, epi-, mono-

Ejercicio 1. Demuestre que si f es un isomorfismo en \mathcal{C} y F es un funtor $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, entonces $F(f)$ es un isomorfismo en \mathcal{D} .

Ejercicio 2. Demuestre que las composiciones de iso-, mono-, epimorfismos satisfacen las siguientes propiedades.

- 1) Si $f: X \rightarrow Y$ e $g: Y \rightarrow Z$ son isomorfismos, entonces $g \circ f: X \rightarrow Z$ es un isomorfismo.
- 2) Si $m: X \rightarrow Y$ y $m': Y \rightarrow Z$ son monomorfismos, entonces $m' \circ m: X \rightarrow Z$ es un monomorfismo.
- 3) Si $e: X \rightarrow Y$ y $e': Y \rightarrow Z$ son epimorfismos, entonces $e' \circ e: X \rightarrow Z$ es un epimorfismo.
- 4) Si para $m: X \rightarrow Y$, $f: Y \rightarrow Z$ la composición $f \circ m$ es un monomorfismo, entonces m es un monomorfismo.
- 5) Si para $f: X \rightarrow Y$, $e: Y \rightarrow Z$ la composición $e \circ f$ es un epimorfismo, entonces e es un epimorfismo.

Ejercicio 3. Demuestre que en la categoría $k\text{-Vect}$ los isomorfismos, monomorfismos, epimorfismos son las aplicaciones k -lineales biyectivas, inyectivas, sobreyectivas respectivamente.

Lema de Yoneda

Ejercicio 4. Demuestre con todos los detalles la versión covariante del lema de Yoneda.

Ejercicio 5. Sea G un grupo. Consideremos G como una categoría. Note que un funtor $F: G \rightarrow \mathbf{Conj}$ corresponde a un G -conjunto y una transformación natural entre tales funtores es una aplicación G -equivariante. ¿Qué es un funtor representable en este caso? ¿Qué significa el encajamiento de Yoneda?

Límites y colímites

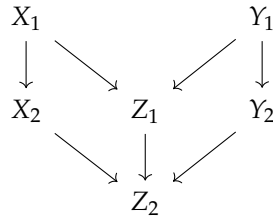
Ejercicio 6. Consideremos la categoría \mathbf{Top}_* cuyos objetos (X, x_0) son espacios topológicos con un punto marcado $x_0 \in X$ y cuyos morfismos $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ son aplicaciones continuas $f: X \rightarrow Y$ tales que $f(x_0) = y_0$. Describa objetos terminales e iniciales, productos y coproductos en \mathbf{Top}_* .

Ejercicio 7. Describa objetos terminales e iniciales, productos y coproductos en la categoría \mathbf{Cat} de categorías pequeñas.

Ejercicio 8. Para un grupo fijo G , consideremos la categoría $G\text{-Conj}$ cuyos objetos son G -conjuntos (conjuntos con acción de G) y cuyos morfismos $f: X \rightarrow Y$ son aplicaciones G -equivariantes (que satisfacen la condición $f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$ para cualesquiera $g \in G$ y $x \in X$). Describe objetos terminales e iniciales, productos y coproductos en $G\text{-Conj}$.

Ejercicio 9. Para una categoría pequeña sea \widehat{C} la categoría de funtores $F: C^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Conj}$. Describe los objetos terminales e iniciales, productos y coproductos en \widehat{C} .

Ejercicio 10. Demuestre que los productos fibrados son functoriales en el siguiente sentido: un diagrama conmutativo

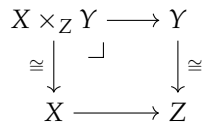


induce un morfismo canónico $X_1 \times_{Z_1} Y_1 \rightarrow X_2 \times_{Z_2} Y_2$.

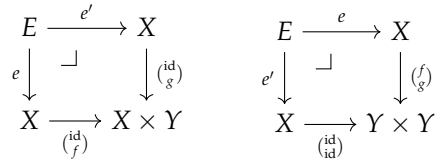
Ejercicio 11. Demuestre que en la categoría $k\text{-Vect}$ se tiene

$$\text{eq}(f, g) = \ker(f - g) \quad \text{y} \quad \text{coeq}(f, g) = \text{coker}(f - g).$$

Ejercicio 12. Demuestre que los productos fibrados preservan isomorfismos: si la flecha $Y \rightarrow Z$ es un isomorfismo, entonces $X \times_Z Y \rightarrow X$ es también un isomorfismo:



Ejercicio 13. Demuestre que los productos fibrados

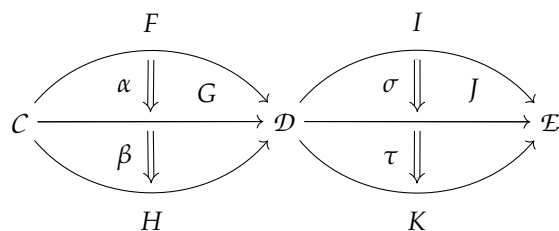


calculan el ecualizador de $f, g: X \rightarrow Y$. Formule y demuestre la propiedad dual para coequalizadores y coproductos fibrados.

Transformaciones naturales

Ejercicio 14. Sean C, D, E tres categorías. Sean F, G, H funtores $C \rightarrow D$ y sean I, J, K tres funtores $D \rightarrow E$. Consideremos transformaciones naturales

$$\alpha: F \Rightarrow G, \quad \beta: G \Rightarrow H, \quad \sigma: I \Rightarrow J, \quad \tau: J \Rightarrow K.$$

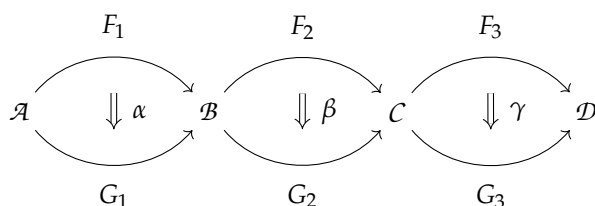


Demuestre que

$$(\tau \circ \sigma) * (\beta \circ \alpha) = (\tau * \beta) \circ (\sigma * \alpha),$$

donde $*$ denota el producto de Godement (véase mis apuntes para la definición).

Ejercicio 15. Demuestre que el producto de Godement es asociativo: para un diagrama



se cumple

$$(\gamma * \beta) * \alpha = \gamma * (\beta * \alpha).$$

Ejercicio 16. Sea I una categoría pequeña. Consideremos el funtor

$$\begin{aligned} \Delta: \mathcal{C} &\rightarrow \text{Fun}(I, \mathcal{C}), \\ X &\rightsquigarrow \Delta_X \end{aligned}$$

que a cada objeto $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ asocia el funtor constante $\Delta_X: I \rightarrow \mathcal{C}$ (tal que $\Delta_X(i) = X$ para cada $i \in \text{Ob}(I)$). Demuestre que para todo funtor $F: I \rightarrow \mathcal{C}$ hay biyecciones naturales

$$\begin{aligned} \text{Nat}(\Delta_X, F) &\cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \lim_I F), \\ \text{Nat}(F, \Delta_X) &\cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{colim}_I F, X). \end{aligned}$$

Adjunciones

Ejercicio 17. Sea \mathbf{An}_1 la categoría de anillos con identidad donde los morfismos son los homomorfismos $f: R \rightarrow S$ que satisfacen $f(1_R) = 1_S$ y \mathbf{An} la categoría de anillos que no necesariamente tienen identidad.

Para un anillo R consideremos el conjunto $\widehat{R} := \mathbb{Z} \times R$ con la multiplicación

$$(n_1, r_1) \cdot (n_2, r_2) := (n_1 n_2, n_1 r_1 + n_2 r_1 + r_1 r_2).$$

Note que es un anillo con identidad $(1, 0)$. Demuestre que $R \rightsquigarrow \widehat{R}$ es un funtor $\mathbf{An} \rightarrow \mathbf{An}_1$ y es adjunto por la izquierda a la inclusión $\mathbf{An}_1 \hookrightarrow \mathbf{An}$.

Ejercicio 18. Digamos que en una categoría \mathcal{C} dos objetos X e Y están en la misma componente conexa si existe una cadena de morfismos de X a Y , que no necesariamente van en la misma dirección, por ejemplo

$$X \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet \leftarrow \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet \leftarrow Y$$

Para una categoría pequeña C sea $\pi_0(C)$ el conjunto de sus componentes conexas. Demuestre que π_0 es un funtor $\mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Conj}$. Demuestre que es adjunto por la izquierda al funtor $\mathbf{Conj} \rightarrow \mathbf{Cat}$ que a cada conjunto X asocia la categoría donde los objetos son los elementos de X y los únicos morfismos son los morfismos identidad.

Ejercicio 19. Sean X e Y dos conjuntos. Consideremos 2^X y 2^Y como conjuntos parcialmente ordenados por la relación \subseteq , y en particular como categorías.

Sea $f: X \rightarrow Y$ una aplicación. Para $A \in 2^X$ definamos

$$f_*(A) := \{y \in Y \mid f^{-1}(y) \subseteq A\},$$

$$\text{im}(A) := \{f(x) \mid x \in A\},$$

y para $B \in 2^Y$ definamos

$$f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

Demuestre que f_* e im son funtores $2^X \rightarrow 2^Y$ y f^{-1} es un funtor $2^Y \rightarrow 2^X$. Demuestre que

- 1) im es adjunto por la izquierda a f^{-1} ,
- 2) f^{-1} es adjunto por la izquierda a f_* .

¿Qué significa en este caso la preservación de objetos iniciales y coproductos (resp. objetos terminales y productos) por adjunto por la izquierda (resp. adjunto por la derecha)?

Equivalencias de categorías

Ejercicio 20. Demuestre que si $F: C \rightarrow D$ es una equivalencia de categorías, entonces F envía un objeto terminal (resp. inicial) de C en un objeto terminal (resp. inicial) de D .

Supongamos que existe una equivalencia de categorías $F: \mathbf{Conj} \rightarrow \mathbf{Conj}^{\text{op}}$. Note que en este caso para cada conjunto X tendríamos

$$X \cong \text{Hom}_{\mathbf{Conj}}(\{*\}, X) \cong \text{Hom}_{\mathbf{Conj}}(F(X), \emptyset).$$

Concluya que las categorías \mathbf{Conj} y $\mathbf{Conj}^{\text{op}}$ no son equivalentes.

Preguntas teóricas

1. Defina qué es una categoría y dé algunos ejemplos.
2. Defina qué es un isomorfismo, epimorfismo, monomorfismo y dé algunos ejemplos.
3. Defina qué es un funtor y dé algunos ejemplos.
4. Defina qué es la categoría opuesta a una categoría.
5. Defina qué es una transformación natural y dé algunos ejemplos.
6. Formule el lema de Yoneda y describa las aplicaciones mutuamente inversas involucradas.
7. Defina qué es una adjunción entre funtores y dé algunos ejemplos.
8. Formule el criterio de funtor adjunto en términos de representabilidad.
9. Defina qué es la unidad y counidad de una adjunción y dé algunos ejemplos.
10. Defina qué es un objeto terminal e inicial y dé algunos ejemplos.
11. Defina qué es un producto y coproducto y dé algunos ejemplos.
12. Demuestre que todo funtor adjunto por la izquierda preserva coproductos y todo funtor adjunto por la derecha preserva productos. Dé algunos ejemplos.
13. Defina qué es un producto y coproducto fibrado y dé algunos ejemplos.
14. Defina qué es un ecualizador y coequalizador y dé algunos ejemplos.
15. Defina qué es un límite y colímite y dé algunos ejemplos.
16. Defina qué es una equivalencia de categorías y dé algunos ejemplos.
17. Demuestre que un funtor es una equivalencia si y solamente si es fielmente pleno y esencialmente sobreyectivo.

En cada pregunta “algunos ejemplos” significa “al menos tres ejemplos interesantes”.