Ejercicios sobre categorías

Alexey Beshenov (cadadr@gmail.com)

Universidad de El Salvador. Ciclo impar 2018

El examen parcial sobre categorías será oral y constará de 5 problemas y 5 preguntas teóricas, escogidas al azar de la lista de abajo.

Iso-, epi-, mono-

Ejercicio 1. Demuestre que si f es un isomorfismo en $\mathcal{C}$ y F es un funtor $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$, entonces $F(f)$ es un isomorfismo en $\mathcal{D}$.

Ejercicio 2. Demuestre que las composiciones de iso-, mono-, epimorfismos satisfacen las siguientes propiedades.

1) Si $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ son isomorfismos, entonces $g \circ f\colon X \to Z$ es un isomorfismo.

2) Si $m\colon X \rightarrowtail Y$ y $m'\colon Y \rightarrowtail Z$ son monomorfismos, entonces $m' \circ m\colon X \to Z$ es un monomorfismo.

3) Si $e\colon X \twoheadrightarrow Y$ y $e'\colon Y \twoheadrightarrow Z$ son epimorfismos, entonces $e' \circ e\colon X \to Z$ es un epimorfismo.

4) Si para $m\colon X \to Y$, $f\colon Y \to Z$ la composición $f \circ m$ es un monomorfismo, entonces m es un monomorfismo.

5) Si para $f\colon X \to Y$, $e\colon Y \to Z$ la composición $e \circ f$ es un epimorfismo, entonces e es un epimorfismo.

Ejercicio 3. Demuestre que en la categoría k-**Vect** los isomorfismos, monomorfismos, epimorfismos son las aplicaciones k-lineales biyectivas, inyectivas, sobreyectivas respectivamente.

Lema de Yoneda

Ejercicio 4. Demuestre con todos los detalles la versión covariante del lema de Yoneda.

Ejercicio 5. Sea G un grupo. Consideremos G como una categoría. Note que un funtor $F\colon G \to \mathbf{Conj}$ corresponde a un G-conjunto y una transformación natural entre tales funtores es una aplicación G-equivariante. ¿Qué es un funtor representable en este caso? ¿Qué significa el encajamiento de Yoneda?

Límites y colímites

Ejercicio 6. Consideremos la categoría $\mathbf{Top}_*$ cuyos objetos (X, x_0) son espacios topológicos con un punto marcado $x_0 \in X$ y cuyos morfismos $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ son aplicaciones continuas $f\colon X \to Y$ tales que $f(x_0) = y_0$. Describa objetos terminales e iniciales, productos y coproductos en $\mathbf{Top}_*$.

Ejercicio 7. Describa objetos terminales e iniciales, productos y coproductos en la categoría **Cat** de categorías pequeñas.

Ejercicio 8. Para un grupo fijo G, consideremos la categoría G-**Conj** cuyos objetos son G-conjuntos (conjuntos con acción de G) y cuyos morfismos $f\colon X \to Y$ son aplicaciones G-equivariantes (que satisfacen la condición $f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$ para cualesauiera $g \in G$ y $x \in X$). Describa objetos terminales e iniciales, productos y coproductos en G-**Conj**.

Ejercicio 9. Para una categoría pequeña sea $\widehat{\mathcal{C}}$ la categoría de funtores $F\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Conj}$. Describa los objetos terminales e iniciales, productos y coproductos en $\widehat{\mathcal{C}}$.

Ejercicio 10. Demuestre que los productos fibrados son funtoriales en el siguiente sentido: un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[d] \arrow[dr] & & Y_1 \arrow[dl] \arrow[d] \\
X_2 \arrow[dr] & Z_1 \arrow[d] & Y_2 \arrow[dl] \\
& Z_2 &
\end{tikzcd}$$

induce un morfismo canónico $X_1 \times_{Z_1} Y_1 \to X_2 \times_{Z_2} Y_2$.

Ejercicio 11. Demuestre que en la categoría k-**Vect** se tiene

$$\mathrm{eq}(f,g) = \ker(f-g) \quad \text{y} \quad \mathrm{coeq}(f,g) = \mathrm{coker}(f-g).$$

Ejercicio 12. Demuestre que los productos fibrados preservan isomorfismos: si la flecha $Y \to Z$ es un isomorfismo, entonces $X \times_Z Y \to X$ es también un isomorfismo:

$$\begin{tikzcd}
X \times_Z Y \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & Y \arrow[d, "\cong"] \\
X \arrow[r] & Z
\end{tikzcd}$$

Ejercicio 13. Demuestre que los productos fibrados

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "e'"] \arrow[d, "e"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & X \arrow[d, "\binom{\mathrm{id}}{g}"] \\
X \arrow[r, "\binom{\mathrm{id}}{f}"'] & X \times Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "e"] \arrow[d, "e'"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & X \arrow[d, "\binom{f}{g}"] \\
X \arrow[r, "\binom{\mathrm{id}}{\mathrm{id}}"'] & Y \times Y
\end{tikzcd}$$

calculan el ecualizador de $f, g\colon X \to Y$. Formule y demuestre la propiedad dual para coecualizadores y coproductos fibrados.

Transformaciones naturales

Ejercicio 14. Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ tres categorías. Sean F, G, H funtores $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y sean I, J, K tres funtores $\mathcal{D} \to \mathcal{E}$. Consideremos transformaciones naturales

$$\alpha\colon F \Rightarrow G, \quad \beta\colon G \Rightarrow H, \quad \sigma\colon I \Rightarrow J, \quad \tau\colon J \Rightarrow K.$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\mathcal{C} \arrow[r, bend left=50, "F"] \arrow[r, "G"] \arrow[r, bend right=50, "H"'] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "\alpha \Downarrow"] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "\beta \Downarrow"] & \mathcal{D} \arrow[r, bend left=50, "I"] \arrow[r, "J"] \arrow[r, bend right=50, "K"'] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "\sigma \Downarrow"] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "\tau \Downarrow"] & \mathcal{E}
\end{tikzcd}
$$

Demuestre que

$$(\tau \circ \sigma) * (\beta \circ \alpha) = (\tau * \beta) \circ (\sigma * \alpha),$$

donde $*$ denota el producto de Godement (véase mis apuntes para la definición).

Ejercicio 15. Demuestre que el producto de Godement es asociativo: para un diagrama

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\mathcal{A} \arrow[r, bend left=50, "F_1"] \arrow[r, bend right=50, "G_1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha"] & \mathcal{B} \arrow[r, bend left=50, "F_2"] \arrow[r, bend right=50, "G_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \beta"] & \mathcal{C} \arrow[r, bend left=50, "F_3"] \arrow[r, bend right=50, "G_3"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \gamma"] & \mathcal{D}
\end{tikzcd}
$$

se cumple

$$(\gamma * \beta) * \alpha = \gamma * (\beta * \alpha).$$

Ejercicio 16. Sea I una categoría pequeña. Consideremos el funtor

$$\begin{aligned} \Delta\colon \mathcal{C} &\to \operatorname{Fun}(I, \mathcal{C}), \\ X &\rightsquigarrow \Delta_X \end{aligned}$$

que a cada objeto $X \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})$ asocia el funtor constante $\Delta_X\colon I \to \mathcal{C}$ (tal que $\Delta_X(i) = X$ para cada $i \in \operatorname{Ob}(I)$). Demuestre que para todo funtor $F\colon I \to \mathcal{C}$ hay biyecciones naturales

$$\begin{aligned} \operatorname{Nat}(\Delta_X, F) &\cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \lim_{I} F), \\ \operatorname{Nat}(F, \Delta_X) &\cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(\operatorname{colím}_{I} F, X). \end{aligned}$$

Adjunciones

Ejercicio 17. Sea $\mathbf{An}_1$ la categoría de anillos con identidad donde los morfismos son los homomorfismos $f\colon R \to S$ que satisfacen $f(1_R) \to 1_S$ y $\mathbf{An}$ la categoría de anillos que no necesariamente tienen identidad.

Para un anillo R consideremos el conjunto $\widehat{R} := \mathbb{Z} \times R$ con la multiplicación

$$(n_1, r_1) \cdot (n_2, r_2) := (n_1 n_2, n_1 r_1 + n_2 r_1 + r_1 r_2).$$

Note que es un anillo con identidad $(1, 0)$. Demuestre que $R \rightsquigarrow \widehat{R}$ es un funtor $\mathbf{An} \to \mathbf{An}_1$ y es adjunto por la izquierda a la inclusión $\mathbf{An}_1 \hookrightarrow \mathbf{An}$.

Ejercicio 18. Digamos que en una categoría $\mathcal{C}$ dos objetos X e Y están en la misma componente conexa si existe una cadena de morfismos de X a Y, que no necesariamente van en la misma dirección, por ejemplo

$$X \to \bullet \to \bullet \leftarrow \bullet \to \bullet \to \bullet \leftarrow Y$$

Para una categoría pequeña $\mathcal{C}$ sea $\pi_0(\mathcal{C})$ el conjunto de sus componentes conexas. Demuestre que π_0 es un funtor **Cat** $\to$ **Conj**. Demuestre que es adjunto por la izquierda al funtor **Conj** $\to$ **Cat** que a cada conjunto X asocia la categoría donde los objetos son los elementos de X y los únicos morfismos son los morfismos identidad.

Ejercicio 19. Sean X e Y dos conjuntos. Consideremos 2^X y 2^Y como conjuntos parcialmente ordenados por la relación $\subseteq$, y en particular como categorías.

Sea $f\colon X \to Y$ una aplicación. Para $A \in 2^X$ definamos

$$f_*(A) := \{y \in Y \mid f^{-1}(y) \subseteq A\},$$
$$\mathrm{im}(A) := \{f(x) \mid x \in A\},$$

y para $B \in 2^Y$ definamos

$$f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

Demuestre que f_* e im son funtores $2^X \to 2^Y$ y f^{-1} es un funtor $2^Y \to 2^X$. Demuestre que

1) im es adjunto por la izquierda a f^{-1},

2) f^{-1} es adjunto por la izquierda a f_*.

¿Qué significa en este caso la preservación de objetos iniciales y coproductos (resp. objetos terminales y productos) por adjunto por la izquierda (resp. adjunto por la derecha)?

Equivalencias de categorías

Ejercicio 20. Demuestre que si $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es una equivalencia de categorías, entonces F envía un objeto terminal (resp. inicial) de $\mathcal{C}$ en un objeto terminal (resp. inicial) de $\mathcal{D}$.

Supongamos que existe una equivalencia de categorías $F\colon$ **Conj** $\to$ $\mathbf{Conj}^{\mathrm{op}}$. Note que en este caso para cada conjunto X tendríamos

$$X \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Conj}}(\{*\}, X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Conj}}(F(X), \emptyset).$$

Concluya que las categorías **Conj** y $\mathbf{Conj}^{\mathrm{op}}$ no son equivalentes.

Preguntas teóricas

1. Defina qué es una categoría y dé algunos ejemplos.
2. Defina qué es un isomorfismo, epimorfismo, monomorfismo y dé algunos ejemplos.
3. Defina qué es un funtor y dé algunos ejemplos.
4. Defina qué es la categoría opuesta a una categoría.
5. Defina qué es una transformación natural y dé algunos ejemplos.
6. Formule el lema de Yoneda y describa las aplicaciones mutualmente inversas involucradas.
7. Define qué es una adjunción entre funtores y dé algunos ejemplos.
8. Formule el criterio de funtor adjunto en términos de representabilidad.
9. Define qué es la unidad y counidad de una adjunción y dé algunos ejemplos.
10. Define qué es un objeto terminal e inicial y dé algunos ejemplos.
11. Define qué es un producto y coproducto y dé algunos ejemplos.
12. Demuestre que todo funtor adjunto por la izquierda preserva coproductos y todo funtor adjunto por la derecha preserva productos. Dé algunos ejemplos.
13. Define qué es un producto y coproducto fibrado y dé algunos ejemplos.
14. Define qué es un ecualizador y coecualizador y dé algunos ejemplos.
15. Define qué es un límite y colímite y dé algunos ejemplos.
16. Define qué es una equivalencia de categorías y dé algunos ejemplos.
17. Demuestre que un funtor es una equivalencia si y solamente si es fielmente pleno y esencialmente sobreyectivo.

En cada pregunta “algunos ejemplos” significa “al menos tres ejemplos interesantes”.