

# Resoluciones proyectivas y Tor

Alexey Beshenov (cadadr@gmail.com)

Universidad de El Salvador. 2018

En estos apuntes voy a establecer las propiedades básicas de resoluciones proyectivas y definir los funtores Tor para  $R$ -módulos. Esto es un caso particular de la teoría de **funtores derivados** en álgebra homológica, pero aquí vamos a usar la generalidad adecuada para nuestros objetivos.

## Índice

0	El lema de la serpiente.....	1
1	Complejos.....	1
2	Sucesión exacta larga de homología.....	4
3	Resoluciones libres y proyectivas.....	7
4	Funtorialidad de resoluciones proyectivas.....	9
5	El lema de la herradura.....	13
6	Funtores derivados izquierdos.....	15
7	Funtores Tor.....	21

## 0 El lema de la serpiente

*Aquí eventualmente voy a añadir una prueba completa (y aburrida) del lema de la serpiente.*

## 1 Complejos

05.09.18

**1.1. Definición.** Un **complejo** de  $R$ -módulos  $(M_\bullet, d_\bullet)$  es una sucesión de  $R$ -módulos  $M_n$  y aplicaciones  $R$ -lineales  $d_n: M_n \rightarrow M_{n-1}$  (llamados **diferenciales**) para  $n \in \mathbb{Z}$ :

$$\cdots \rightarrow M_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} M_n \xrightarrow{d_n} M_{n-1} \rightarrow \cdots$$

tales que

$$d_n \circ d_{n+1} = 0 \text{ para todo } n.$$

Esta condición significa precisamente que  $\text{im } d_{n+1} \subseteq \text{ker } d_n$ . Luego, el  $n$ -ésimo módulo de **homología** se define como el cociente

$$H_n(M_\bullet) := \text{ker } d_n / \text{im } d_{n+1}.$$

Nota que un complejo es una sucesión exacta si y solo si  $H_n(M_\bullet) = 0$  para todo  $n$ .

**1.2. Definición.** Un **morfismo de complejos**  $f_\bullet: M_\bullet \rightarrow N_\bullet$  es una colección de aplicaciones  $f_n: M_n \rightarrow N_n$  que conmutan con las aplicaciones  $d_\bullet^M$  y  $d_\bullet^N$ :

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & M_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}^M} & M_n & \xrightarrow{d_n^M} & M_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & N_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}^N} & N_n & \xrightarrow{d_n^N} & N_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

En otras palabras, se pide que

$$d_n^N \circ f_n = f_{n-1} \circ d_n^M \text{ para todo } n.$$

Para un complejo  $M_\bullet$  el **morfismo identidad**  $\text{id}_{M_\bullet}$  es el morfismo de complejos con  $\text{id}_{M_n}: M_n \rightarrow M_n$  en cada grado.

Para dos morfismos  $f_\bullet: L_\bullet \rightarrow M_\bullet$  y  $g_\bullet: M_\bullet \rightarrow N_\bullet$  la composición  $g_\bullet \circ f_\bullet: L_\bullet \rightarrow N_\bullet$  es el morfismo de complejos con  $g_n \circ f_n: L_n \rightarrow N_n$  en cada grado.

De esta manera se tiene la categoría **Com**( $R$ -Mód) de complejos de  $R$ -módulos. Los morfismos de complejos  $M_\bullet \rightarrow N_\bullet$  forman un grupo abeliano: para  $f_\bullet$  y  $g_\bullet$  la suma se define como la colección de aplicaciones  $f_n + g_n$  en cada grado.

**1.3. Observación (Funtorialidad de homología).** Un morfismo de complejos  $f_\bullet: M_\bullet \rightarrow N_\bullet$  induce de manera funtorial aplicaciones  $R$ -lineales

$$\begin{aligned} f_{n*}: H_n(M_\bullet) &\rightarrow H_n(N_\bullet), \\ x_n + \text{im } d_{n+1}^M &\mapsto f_n(x_n) + \text{im } d_{n+1}^N. \end{aligned}$$

La funtorialidad quiere decir que  $\text{id}: M_\bullet \rightarrow M_\bullet$  induce  $\text{id}: H_n(M_\bullet) \rightarrow H_n(M_\bullet)$  y que para dos morfismos  $f_\bullet: L_\bullet \rightarrow M_\bullet$  y  $g_\bullet: M_\bullet \rightarrow N_\bullet$  la composición  $g_\bullet \circ f_\bullet$  induce las aplicaciones  $g_{n*} \circ f_{n*}: H_n(L_\bullet) \rightarrow H_n(N_\bullet)$ . En otras palabras, se tiene una familia funtores

$$H_n: \mathbf{Com}(R\text{-Mód}) \rightarrow R\text{-Mód}.$$

*Demostración.* Notamos que para  $x_n \in \ker d_n^M$  se tiene

$$d_n^N \circ f_n(x_n) = f_{n-1} \circ d_n^M(x_n) = 0,$$

así que  $f_n(x_n) \in \ker d_n^N$ . Además, si  $x_n - x'_n \in \text{im } d_{n+1}^M$ , entonces  $x_n - x'_n = d_{n+1}^M(x_{n+1})$  para algún elemento  $x_{n+1} \in M_{n+1}$ . Luego,

$$f_n(x_n) - f_n(x'_n) = f_n(x_n - x'_n) = f_n \circ d_{n+1}^M(x_{n+1}) = d_{n+1}^N \circ f_{n+1}(x_{n+1}),$$

así que  $f_n(x_n) - f_n(x'_n) \in \text{im } d_{n+1}^N$ . Esto demuestra que la aplicación  $f_{n*}$  está bien definida. Es  $R$ -lineal, dado que  $f_n$  lo es.

La funtorialidad debe estar clara de la definición de  $f_{n*}$ . ■

**1.4. Definición.**

1) Se dice que un morfismo de complejos  $s_\bullet: M_\bullet \rightarrow N_\bullet$  es **homotópico a cero** si existe una familia de aplicaciones  $R$ -lineales  $h_n: M_n \rightarrow N_{n+1}$  que satisfacen

$$s_n = h_{n-1} \circ d_n^M + d_{n+1}^N \circ h_n \text{ para todo } n.$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & M_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}^M} & M_n & \xrightarrow{d_n^M} & M_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\
& & \downarrow s_{n+1} & \swarrow h_n & \downarrow s_n & \swarrow h_{n-1} & \downarrow s_{n-1} & & \\
\cdots & \longrightarrow & N_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}^N} & M_n & \xrightarrow{d_n^N} & M_{n-1} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

En este caso se escribe  $s_\bullet \simeq 0$ .

- 1) Se dice que dos morfismos  $f_\bullet, g_\bullet: M_\bullet \rightarrow N_\bullet$  son **homotópicos** si su diferencia  $f_\bullet - g_\bullet$  es homotópica a cero; es decir, si existen  $h_n: M_n \rightarrow N_{n+1}$  tales que

$$f_n - g_n = h_{n-1} \circ d_n^M + d_{n+1}^N \circ h_n \text{ para todo } n.$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & M_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}^M} & M_n & \xrightarrow{d_n^M} & M_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\
& & \downarrow \begin{array}{c} f_{n+1} \\ g_{n+1} \end{array} & \swarrow h_n & \downarrow \begin{array}{c} f_n \\ g_n \end{array} & \swarrow h_{n-1} & \downarrow \begin{array}{c} f_{n-1} \\ g_{n-1} \end{array} & & \\
\cdots & \longrightarrow & N_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}^N} & M_n & \xrightarrow{d_n^N} & M_{n-1} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

En este caso se escribe  $f_\bullet \simeq g_\bullet$ .

### 1.5. Observación (Morfismos homotópicos inducen las mismas aplicaciones en homología).

- 1) Si un morfismo de complejos  $s_\bullet: M_\bullet \rightarrow N_\bullet$  es homotópico a cero, entonces las aplicaciones correspondientes  $s_{n*}: H_n(M_\bullet) \rightarrow H_n(N_\bullet)$  son nulas.
- 2) Si  $f_\bullet, g_\bullet: M_\bullet \rightarrow N_\bullet$  son homotópicos, entonces para todo  $n$  las aplicaciones correspondientes en homología  $f_{n*}, g_{n*}: H_n(M_\bullet) \rightarrow H_n(N_\bullet)$  coinciden.

*Demostración.* Bastaría probar la primera parte; la segunda parte sigue del hecho de que las aplicaciones inducidas por  $f_\bullet - g_\bullet$  son  $f_{n*} - g_{n*}$ .

Si  $s_\bullet$  es un morfismo homotópico a cero, entonces para todo  $x_n + \text{im } d_{n+1}^M \in H_n(M_\bullet) := \ker d_n^M / \text{im } d_{n+1}^M$  se tiene

$$s_n(x_n) = h_{n-1} \circ \underbrace{d_n^M(x_n)}_{=0} + d_{n+1}^N \circ h_n(x_n) = d_{n+1}^N \circ h_n(x_n) \in \text{im } d_{n+1}^N,$$

así que  $s_{n*}(x_n + \text{im } d_{n+1}^M) = 0$  en  $H_n(N_\bullet) := \ker d_n^N / \text{im } d_{n+1}^N$ . ■

**1.6. Definición.** Una **equivalencia homotópica** entre dos complejos  $M_\bullet$  y  $N_\bullet$  es un par de morfismos  $f_\bullet: M_\bullet \rightarrow N_\bullet$  y  $g_\bullet: N_\bullet \rightarrow M_\bullet$  tales que

$$g_\bullet \circ f_\bullet \simeq \text{id}_{M_\bullet} \text{ y } f_\bullet \circ g_\bullet \simeq \text{id}_{N_\bullet}.$$

**1.7. Observación.** Una equivalencia homotópica entre  $M_\bullet$  y  $N_\bullet$  induce isomorfismos en homología

$$H_n(M_\bullet) \cong H_n(N_\bullet)$$

para todo  $n$ .

presenté  
este  
material  
el 7.09.18

*Demostración.* Si tenemos morfismos  $f_\bullet: M_\bullet \rightarrow N_\bullet$  y  $g_\bullet: N_\bullet \rightarrow M_\bullet$  que satisfacen  $g_\bullet \circ f_\bullet \simeq \text{id}_{M_\bullet}$  y  $f_\bullet \circ g_\bullet \simeq \text{id}_{N_\bullet}$ , entonces por la funtorialidad de homología y por la observación 1.5, las aplicaciones correspondientes  $f_{n*}: H_n(M_\bullet) \rightarrow H_n(N_\bullet)$  y  $g_{n*}: H_n(N_\bullet) \rightarrow H_n(M_\bullet)$  van a satisfacer

$$g_{n*} \circ f_{n*} = \text{id}_{H_n(M_\bullet)} \quad \text{y} \quad f_{n*} \circ g_{n*} = \text{id}_{H_n(N_\bullet)}.$$

■

**1.8. Comentario.** En general, para dos complejos puede haber un morfismo  $f_\bullet: M_\bullet \rightarrow N_\bullet$  que induce isomorfismos  $f_{n*}: H_n(M_\bullet) \xrightarrow{\cong} H_n(N_\bullet)$  para todo  $n$ , pero no haber una equivalencia homotópica entre  $M_\bullet$  y  $N_\bullet$ . Tener una equivalencia homotópica es algo mucho más fuerte.

## 2 Sucesión exacta larga de homología

**2.1. Definición.** Una sucesión exacta corta de complejos

$$0 \rightarrow M'_\bullet \xrightarrow{i_\bullet} M_\bullet \xrightarrow{p_\bullet} M''_\bullet \rightarrow 0$$

viene dada por dos morfismos de complejos  $i_\bullet: M'_\bullet \rightarrow M_\bullet$  y  $p_\bullet: M_\bullet \rightarrow M''_\bullet$  tales que para todo  $n$  las aplicaciones  $i_n$  y  $p_n$  forman una sucesión exacta corta:

$$0 \rightarrow M'_n \xrightarrow{i_n} M_n \xrightarrow{p_n} M''_n \rightarrow 0$$

En otras palabras, se trata de un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & M'_{n+1} & \xrightarrow{i_{n+1}} & M_{n+1} & \xrightarrow{p_{n+1}} & M''_{n+1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow d'_{n+1} & & \downarrow d_{n+1} & & \downarrow d''_{n+1} \\ 0 & \longrightarrow & M'_n & \xrightarrow{i_n} & M_n & \xrightarrow{p_n} & M''_n \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow d'_n & & \downarrow d_n & & \downarrow d''_n \\ 0 & \longrightarrow & M'_{n-1} & \xrightarrow{i_{n-1}} & M_{n-1} & \xrightarrow{p_{n-1}} & M''_{n-1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

donde las columnas son complejos y las filas son sucesiones exactas cortas.

**2.2. Teorema (Sucesión exacta larga en homología).** Sea

$$0 \rightarrow M'_\bullet \xrightarrow{i_\bullet} M_\bullet \xrightarrow{p_\bullet} M''_\bullet \rightarrow 0$$

una sucesión exacta corta de complejos. Entonces, existen aplicaciones  $R$ -lineales  $\delta_n: H_n(M''_\bullet) \rightarrow H_{n-1}(M'_\bullet)$  que junto con las aplicaciones  $i_{n*}: H_n(M'_\bullet) \rightarrow H_n(M_\bullet)$  y  $p_{n*}: H_n(M_\bullet) \rightarrow H_n(M''_\bullet)$  forman una sucesión exacta natural

$$\cdots \rightarrow H_n(M'_\bullet) \xrightarrow{i_{n*}} H_n(M_\bullet) \xrightarrow{p_{n*}} H_n(M''_\bullet) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(M'_\bullet) \xrightarrow{i_{n-1,*}} H_{n-1}(M_\bullet) \xrightarrow{p_{n-1,*}} H_{n-1}(M''_\bullet) \rightarrow \cdots$$

**2.3. Ejemplo.** Consideremos un diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M'_1 & \xrightarrow{i_1} & M_1 & \xrightarrow{p_1} & M''_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f' & & \downarrow f & & \downarrow f'' & & \\ 0 & \longrightarrow & M'_0 & \xrightarrow{i_0} & M_0 & \xrightarrow{p_0} & M''_0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Notamos que una aplicación  $f: M_1 \rightarrow M_0$  puede ser vista como un complejo

$$\cdots \rightarrow 0 \xrightarrow{3} 0 \xrightarrow{2} M_1 \xrightarrow{f} M_0 \xrightarrow{-1} 0 \xrightarrow{-2} 0 \rightarrow \cdots$$

Su homología viene dada por

$$H_n = \begin{cases} \text{coker } f, & n = 0, \\ \ker f, & n = 1, \\ 0, & n \neq 0, 1. \end{cases}$$

De esta manera el teorema nos da una sucesión exacta

$$0 \rightarrow \ker f' \rightarrow \ker f \rightarrow \ker f'' \xrightarrow{\delta} \text{coker } f' \rightarrow \text{coker } f \rightarrow \text{coker } f'' \rightarrow 0$$

así que se trata de una generalización del lema de la serpiente. ▲

De hecho, nuestra prueba del teorema va a utilizar el lema de la serpiente.

*Demostación de 2.2.* Para un complejo  $M_\bullet$  podemos considerar las aplicaciones

$$\begin{aligned} \bar{d}_n: \text{coker } d_{n+1} &:= \frac{M_n}{\text{im } d_{n+1}} \rightarrow \ker d_{n-1}, \\ x_n + \text{im } d_{n+1} &\mapsto d_n(x_n). \end{aligned}$$

Tenemos  $d_n(x_n) \in \ker d_{n-1}$ , dado que  $M_\bullet$  es un complejo e  $\text{im } d_n \subseteq \ker d_{n-1}$ . La aplicación está bien definida: si  $x_n - x'_n \in \text{im } d_{n+1}$ , entonces  $d_n(x_n) - d_n(x'_n) = d_n(x_n - x'_n) = 0$ , usando que  $\text{im } d_{n+1} \subseteq \ker d_n$ . Notamos que

$$(2.1) \quad \ker \bar{d}_n = \{x_n + \text{im } d_{n+1} \mid d_n(x_n) = 0\} = \frac{\ker d_n}{\text{im } d_{n+1}} = H_n(M_\bullet)$$

y

$$(2.2) \quad \text{coker } \bar{d}_n = \frac{\ker d_{n-1}}{\text{im } \bar{d}_n} = \frac{\ker d_{n-1}}{\text{im } d_n} = H_{n-1}(M_\bullet).$$

En nuestra situación, para una sucesión exacta corta de complejos

$$0 \rightarrow M'_n \xrightarrow{i_n} M_n \xrightarrow{p_n} M''_n \rightarrow 0$$

el lema de la serpiente\* aplicado al diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & M'_{n+1} & \xrightarrow{i_{n+1}} & M_{n+1} & \xrightarrow{p_{n+1}} & M''_{n+1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow d'_{n+1} & & \downarrow d_{n+1} & & \downarrow d''_{n+1} & & \\
 0 & \longrightarrow & M'_n & \xrightarrow{i_n} & M_n & \xrightarrow{p_n} & M''_n & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \text{coker } d'_{n+1} & \dashrightarrow & \text{coker } d_{n+1} & \dashrightarrow & \text{coker } d''_{n+1} & \dashrightarrow & 0
 \end{array}$$

produce una sucesión exacta

$$(2.3) \quad \text{coker } d'_{n+1} \rightarrow \text{coker } d_{n+1} \rightarrow \text{coker } d''_{n+1} \rightarrow 0$$

De la misma manera, el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & \ker d'_{n-1} & \dashrightarrow & \ker d_{n-1} & \dashrightarrow & \ker d''_{n-1} & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & M'_{n-1} & \xrightarrow{i_{n-1}} & M_{n-1} & \xrightarrow{p_{n-1}} & M''_{n-1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow d'_{n-1} & & \downarrow d_{n-1} & & \downarrow d''_{n-1} & & \\
 0 & \longrightarrow & M'_{n-2} & \xrightarrow{i_{n-2}} & M_{n-2} & \xrightarrow{p_{n-2}} & M''_{n-2} & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

nos da una sucesión exacta

$$(2.4) \quad 0 \rightarrow \ker d'_{n-1} \rightarrow \ker d_{n-1} \rightarrow \ker d''_{n-1}$$

Con las sucesiones exactas (2.3) y (2.4) podemos formar el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \text{coker } d'_{n+1} & \longrightarrow & \text{coker } d_{n+1} & \longrightarrow & \text{coker } d''_{n+1} & \longrightarrow 0 \\
 (2.5) & \downarrow \bar{d}'_n & & \downarrow \bar{d}_n & & \downarrow \bar{d}''_n & \\
 0 & \longrightarrow & \ker d'_n & \longrightarrow & \ker d_n & \longrightarrow & \ker d''_n
 \end{array}$$

Notamos que los dos cuadrados conmutan. Por ejemplo, para el primer cuadrado, tenemos

$$\begin{array}{ccc}
 x_n + \text{im } d'_{n+1} & \longmapsto & i_n(x_n) + \text{im } d_{n+1} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 d'_n(x_n) & \longmapsto & i_{n-1} \circ d_n(x_n) = d'_n \circ i_n(x_n)
 \end{array}$$

y el lector puede comprobar de la misma manera la conmutatividad del segundo. Ahora el lema de la serpiente aplicado a (2.5) nos da una sucesión exacta

$$\ker \bar{d}'_n \rightarrow \ker \bar{d}_n \rightarrow \ker \bar{d}''_n \xrightarrow{\delta_n} \text{coker } \bar{d}'_n \rightarrow \text{coker } \bar{d}_n \rightarrow \text{coker } \bar{d}''_n$$

\*O más bien su parte fácil.

que gracias a (2.1) y (2.2) puede ser identificada con

$$(2.6) \quad H_n(M'_\bullet) \rightarrow H_n(M_\bullet) \rightarrow H_n(M''_\bullet) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(M'_\bullet) \rightarrow H_{n-1}(M_\bullet) \rightarrow H_{n-1}(M''_\bullet)$$

Falta solo comprobar que las aplicaciones inducidas entre los núcleos de  $\overline{d}_n$  y entre los conúcleos coinciden con las aplicaciones inducidas por  $i_\bullet$  y  $p_\bullet$ . Por ejemplo, la aplicación  $\ker d'_n \rightarrow \ker \overline{d}_n$  viene dada por

$$x_n + \text{im } d'_{n+1} \mapsto i_n(x_n) + \text{im } d_{n+1},$$

lo que coincide con  $i_{n*}: H_n(M'_\bullet) \rightarrow H_n(M_\bullet)$ .

Juntando las sucesiones exactas (2.6) para todo  $n$ , se obtiene la sucesión exacta larga deseada. ■

### 3 Resoluciones libres y proyectivas

**3.1. Definición.** Para un  $R$ -módulo  $M$ , una **resolución libre** es una sucesión exacta

$$\cdots \rightarrow F_2 \xrightarrow{d_2} F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{\epsilon} M \rightarrow 0$$

donde los  $F_n$  son  $R$ -módulos libres.

**3.2. Lema.** Sea  $M$  un  $R$ -módulo. Para todo  $R$ -módulo  $M$  existe un  $R$ -módulo libre  $F$  junto con un epimorfismo  $F \twoheadrightarrow M$ . Además, si  $M$  es finitamente generado, se puede escoger  $F$  de rango finito.

*Demostración.* Si  $\{m_i\}_{i \in I}$  es una familia de generadores para  $M$ , sea  $F$  el  $R$ -módulo libre generado por el conjunto  $\{e_i\}_{i \in I}$  que corresponde a los generadores. Luego, por la propiedad universal de módulos libres, existe una aplicación  $R$ -lineal única  $p: F \rightarrow M$  tal que  $p: e_i \mapsto m_i$  para todo  $i \in I$ . Dado que los  $m_i$  generan a  $M$ , esta aplicación es sobreyectiva. ■

**3.3. Teorema.** Todo  $R$ -módulo posee una resolución libre. Además, si  $R$  es un anillo noetheriano y  $M$  es finitamente generado, entonces se puede encontrar una resolución por módulos de rango finito.

*Demostración.* Gracias al lema anterior, existe un  $R$ -módulo libre  $F_0$  junto con un epimorfismo  $\epsilon = p_0: F_0 \rightarrow M$ . Luego, para el submódulo  $\ker p_0 \subseteq F_0$  también existe un epimorfismo  $p_1: F_1 \twoheadrightarrow \ker p_0$ . Podemos considerar el submódulo  $\ker p_1 \subseteq F_1$  y luego escoger otro epimorfismo  $p_2: F_2 \twoheadrightarrow \ker p_1$ , etcétera. Denotemos por  $i_n: \ker p_n \hookrightarrow F_n$  la inclusión de submódulo y pongamos

$$d_n := i_{n-1} \circ p_n.$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & \ker p_1 & & & & \\ & & \nearrow & & \searrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & F_2 & \xrightarrow{d_2} & F_1 & \xrightarrow{d_1} & F_0 \xrightarrow{\epsilon=p_0} M \longrightarrow 0 \\ & & \nearrow p_2 & & \searrow p_1 & & \nearrow i_0 \\ & & & & & & \ker p_0 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{ccccccc} & & \ker p_n & & & & \\ & & \nearrow & & \searrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & F_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & F_n & \xrightarrow{d_n} & F_{n-1} \longrightarrow \cdots \\ & & \nearrow p_{n+1} & & \searrow p_n & & \nearrow i_{n-1} \\ & & & & & & \ker p_{n-1} \end{array}$$

Vamos a verificar que  $(F_\bullet, d_\bullet)$  es una sucesión exacta. La exactitud en el término  $M$  se cumple, dado que  $p_0$  es un epimorfismo por la construcción. Para la exactitud en  $F_0$ , notamos que  $\text{im } d_1 = \text{im } i_0 = \ker p_0$ . Ahora para  $n > 1$  por la construcción tenemos

$$d_n \circ d_{n+1} = i_{n-1} \circ \underbrace{p_n \circ i_n}_{=0} \circ p_{n+1} = 0,$$

así que  $\text{im } d_{n+1} \subseteq \ker d_n$ . Para la otra inclusión, consideremos  $x_n \in \ker d_n$ . Tenemos  $d_n = i_{n-1} \circ p_n$  donde  $i_{n-1}$  es inyectiva, así que  $\ker d_n = \ker p_n$  y  $x_n \in \ker p_n$ . La aplicación  $p_{n+1}: F_{n+1} \rightarrow \ker p_n$  es sobreyectiva, y por ende  $x_n = p_{n+1}(x_{n+1})$  para algún  $x_{n+1} \in F_{n+1}$ . Luego,  $d_{n+1}(x_{n+1}) = p_{n+1}(x_{n+1}) = x_n$ . Esto demuestra que  $\ker d_n \subseteq \text{im } d_{n+1}$ .

Recordemos que si  $R$  es un anillo noetheriano, entonces todo submódulo de un  $R$ -módulo finitamente generado es también finitamente generado. Entonces, si  $M$  es finitamente generado, se puede escoger  $F_0$  de rango finito. Luego, su submódulo  $\ker p_0$  será necesariamente finitamente generado, y se puede escoger  $F_1$  de rango finito etcétera. ■

07.09.18

Aunque para nuestros propósitos sería suficiente trabajar con resoluciones libres, podemos considerar una clase de resoluciones más grande.

**3.4. Definición.** Para un  $R$ -módulo  $M$ , una **resolución proyectiva**

$$\dots \rightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \rightarrow 0$$

donde los  $P_n$  son  $R$ -módulos libres.

Recordemos la definición de  $R$ -módulo proyectivo.

**3.5. Definición.** Se dice que  $P$  es un  $R$ -módulo **proyectivo** si para toda aplicación  $R$ -lineal  $f: P \rightarrow N$  y toda aplicación  $R$ -lineal sobreyectiva  $p: M \twoheadrightarrow N$  existe una aplicación  $R$ -lineal  $\tilde{f}: P \rightarrow M$  tal que  $p \circ \tilde{f} = f$ :

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ \exists \tilde{f} \swarrow & & \downarrow f \\ M & \xrightarrow{p} & N \end{array}$$

(Aquí no se pide que  $\tilde{f}$  sea única.)

**3.6. Observación.** Si  $P_i$  es una familia de módulos proyectivos, entonces la suma directa  $\bigoplus_i P_i$  es también un módulo proyectivo.

*Demostración.* Consideremos un epimorfismo  $p: M \twoheadrightarrow N$  y una aplicación  $\phi: \bigoplus_i P_i \rightarrow N$ . La última (por la propiedad universal de coproductos) corresponde a una familia de aplicaciones  $f_i: P_i \rightarrow N$  que pueden ser levantadas a  $\tilde{f}_i: P_i \rightarrow M$

$$\begin{array}{ccc} & P_i & \\ \exists \tilde{f}_i \swarrow & & \downarrow f_i \\ M & \xrightarrow{p} & N \end{array}$$

Luego, podemos considerar la aplicación correspondiente  $(\tilde{f}_i): \bigoplus_i P_i \rightarrow M$  que va a cumplir  $p \circ (\tilde{f}_i) = \phi$ :

$$\begin{array}{ccc} & \bigoplus_i P_i & \\ (\tilde{f}_i) \swarrow & & \downarrow \phi = (f_i) \\ M & \xrightarrow{p} & N \end{array}$$



**3.7. Observación.** *Todo módulo libre es proyectivo.*

*Demostración.* Recordemos la propiedad universal del  $R$ -módulo libre generado por un conjunto  $X$ : para todo  $R$ -módulo  $M$  una aplicación de conjuntos  $\phi: X \rightarrow M$  se extiende de modo único a una aplicación  $R$ -lineal  $\tilde{\phi}: R\langle X \rangle \rightarrow M$ :

$$\begin{array}{ccc} X & \hookrightarrow & R\langle X \rangle \\ \phi \downarrow & \swarrow \exists! \tilde{\phi} & \\ M & & \end{array}$$

Ahora para una aplicación sobreyectiva  $p: M \twoheadrightarrow N$  y una aplicación  $f: R\langle X \rangle \rightarrow N$  podemos escoger elementos  $m_x \in M$  tales que  $p(m_x) = f(x)$  para todo  $x \in X$ . La propiedad universal de  $R\langle X \rangle$  nos da una aplicación  $\tilde{f}: R\langle X \rangle \rightarrow M$  tal que  $\tilde{f}: x \mapsto m_x$ :

$$\begin{array}{ccc} & R\langle X \rangle & \\ \exists \tilde{f} \swarrow & \downarrow f & \\ M & \xrightarrow{p} & N \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & x & \\ & \downarrow & \\ m_x & \xrightarrow{\quad} & f(x) \end{array}$$

**3.8. Comentario.** Notamos que la elección de  $m_x \in M$  en la prueba no es única y por ende  $\tilde{f}$  no será única.

El resultado de 3.3 establece la existencia de resoluciones proyectivas: basta tomar resoluciones libres.

## 4 Funtorialidad de resoluciones proyectivas

Nuestra construcción de resoluciones en 3.3 usa elecciones de aplicaciones sobreyectivas  $F \twoheadrightarrow M$ , así que el resultado está muy lejos de ser canónico. Sin embargo, en esta sección vamos a ver que para todo módulo su resolución proyectiva es canónica en algún sentido débil que será suficiente para nuestro propósito. Empecemos primero por un resultado auxiliar sobre módulos proyectivos.

**4.1. Lema.** *Sea  $P$  un  $R$ -módulo proyectivo y sea*

$$M_2 \xrightarrow{d_2} M_1 \xrightarrow{d_1} M_0$$

*una sucesión exacta de  $R$ -módulos; es decir,  $\text{im } d_2 = \ker d_1$ .*

0) *Para una aplicación  $R$ -lineal  $f: P \rightarrow M_1$  tal que  $d_1 \circ f = 0$ , existe una aplicación  $R$ -lineal  $\tilde{f}: P \rightarrow M_2$  tal que  $d_2 \circ \tilde{f} = f$ :*

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & \exists \tilde{f} \swarrow & \downarrow f & \searrow =0 & \\ M_2 & \xrightarrow{d_2} & M_1 & \xrightarrow{d_1} & M_0 \end{array}$$

1) *Para aplicaciones  $R$ -lineales  $d: P \rightarrow Q$  y  $f: Q \rightarrow M_1$  tales que  $d_1 \circ f \circ d = 0$ , existe una aplicación  $R$ -lineal  $\tilde{f}: P \rightarrow M_2$  tal que  $d_2 \circ \tilde{f} = f \circ d$ :*

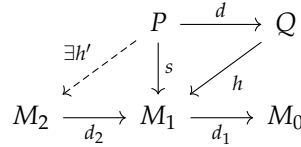
$$\begin{array}{ccccc} P & \xrightarrow{d} & Q & & \\ \exists \tilde{f} \downarrow & & \downarrow f & & \\ M_2 & \xrightarrow{d_2} & M_1 & \xrightarrow{d_1} & M_0 \end{array}$$

2) Para aplicaciones  $R$ -lineales  $s: P \rightarrow M_1, d: P \rightarrow Q, h: Q \rightarrow M_1$  tales que

$$d_1 \circ h \circ d = d_1 \circ s$$

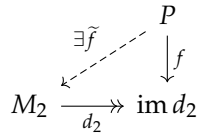
existe una aplicación  $R$ -lineal  $h': P \rightarrow M_2$  tal que

$$s = d_2 \circ h' + h \circ d.$$

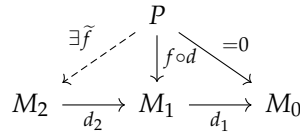


(Este diagrama no es conmutativo; las composiciones de aplicaciones nada más satisfacen las relaciones mencionadas.)

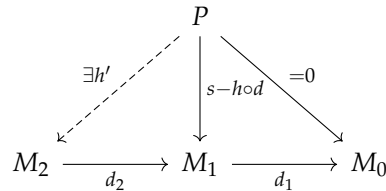
*Demostración.* La parte 0) es prácticamente una reformulación de la definición de módulos proyectivos: si  $d_1 \circ f = 0$ , entonces  $\text{im } f \subseteq \ker d_1 = \text{im } d_2$  y podemos considerar



En la parte 1), basta aplicar 0) a la composición  $f \circ d: P \rightarrow M_1$ :



La parte 2) también resulta de la aplicación de 0) a  $s - h \circ d: P \rightarrow M_1$ :



■

Una resolución proyectiva de  $M$  es una sucesión exacta

$$\cdots \rightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \rightarrow 0$$

donde los  $P_n$  son módulos proyectivos. En esta situación vamos a denotar por  $P_\bullet$  el complejo truncado

$$\cdots \rightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

donde  $P_n$  está en el grado  $n$ . Al truncar la sucesión exacta de esta manera, se pierde la exactitud en  $P_0$ . Específicamente, se tiene

$$H_n(P_\bullet) = \begin{cases} P_0 / \text{im } d_1 = P_0 / \ker d_0 \cong M, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

**4.2. Teorema (Funtorialidad de resoluciones proyectivas).** Sean

$$\cdots \rightarrow P_2 \xrightarrow{d_2^P} P_1 \xrightarrow{d_1^P} P_0 \xrightarrow{\epsilon^P} M \rightarrow 0$$

y

$$\cdots \rightarrow Q_2 \xrightarrow{d_2^Q} Q_1 \xrightarrow{d_1^Q} Q_0 \xrightarrow{\epsilon^Q} N \rightarrow 0$$

dos resoluciones proyectivas y sea  $f: M \rightarrow N$  una aplicación  $R$ -lineal.

- 1) Existe un morfismo de complejos  $f_\bullet: P_\bullet \rightarrow Q_\bullet$  tal que la aplicación correspondiente  $f_{0*}: H_0(P_\bullet) \rightarrow H_0(Q_\bullet)$  coincide con  $f: M \rightarrow N$ .
- 2) Este morfismo de complejos es único salvo homotopía.

*Demostración.* La primera parte quiere decir que se puede construir una escalera conmutativa

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & P_2 & \xrightarrow{d_2^P} & P_1 & \xrightarrow{d_1^P} & P_0 & \xrightarrow{\epsilon^P} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 & & \downarrow f & & \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & Q_2 & \xrightarrow{d_2^Q} & Q_1 & \xrightarrow{d_1^Q} & Q_0 & \xrightarrow{\epsilon^Q} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Esto se hace por inducción usando la parte 1) del lema 4.1. Como la base de inducción podemos tomar el último cuadrado en el diagrama de arriba. Luego, supongamos que hemos definido  $f_{n-1}$  y  $f_{n-2}$  que conmutan con  $d_{n-1}^P$  y  $d_{n-1}^Q$ :

$$\begin{array}{ccccc} P_n & \xrightarrow{d_n^P} & P_{n-1} & \xrightarrow{d_{n-1}^P} & P_{n-2} \\ \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & \downarrow f_{n-2} \\ Q_n & \xrightarrow{d_n^Q} & Q_{n-1} & \xrightarrow{d_{n-1}^Q} & Q_{n-2} \end{array}$$

Entonces,

$$d_{n-1}^Q \circ f_{n-1} \circ d_n^P = f_{n-2} \circ \underbrace{d_{n-1}^P \circ d_n^P}_{=0} = 0,$$

y se puede aplicar 4.1, 1).

Supongamos ahora que existen dos morfismos de complejos  $f_\bullet$  y  $g_\bullet$  como arriba:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & P_2 & \xrightarrow{d_2^P} & P_1 & \xrightarrow{d_1^P} & P_0 & \xrightarrow{\epsilon^P} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f_2 \downarrow g_2 & & \downarrow f_1 \downarrow g_1 & & \downarrow f_0 \downarrow g_0 & & \downarrow f & & \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & Q_2 & \xrightarrow{d_2^Q} & Q_1 & \xrightarrow{d_1^Q} & Q_0 & \xrightarrow{\epsilon^Q} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Tenemos que construir una homotopía entre ellos:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & P_3 & \xrightarrow{d_3^P} & P_2 & \xrightarrow{d_2^P} & P_1 & \xrightarrow{d_1^P} & P_0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f_3 \downarrow g_3 & & \downarrow f_2 \downarrow g_2 & & \downarrow f_1 \downarrow g_1 & & \downarrow f_0 \downarrow g_0 & & \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & Q_3 & \xrightarrow{d_3^Q} & Q_2 & \xrightarrow{d_2^Q} & Q_1 & \xrightarrow{d_1^Q} & Q_0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

(Dashed arrows  $h_2, h_1, h_0$  represent homotopies between the two complexes.)

Necesitamos definir aplicaciones  $h_n: P_n \rightarrow Q_{n+1}$  tales que

$$(4.1) \quad f_n - g_n = h_{n-1} \circ d_n^P + d_{n+1}^Q \circ h_n.$$

De nuevo, esto se hace por inducción usando el lema 4.1. Para la base de inducción  $n = 0^*$  necesitamos definir  $h_0: P_0 \rightarrow Q_1$  tal que  $f_0 - g_0 = d_1^Q \circ h_0$ . Para esto consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & P_0 & & \\ & \swarrow \exists h_0 & \downarrow f_0 - g_0 & \searrow =0 & \\ Q_1 & \xrightarrow{d_1^Q} & Q_0 & \xrightarrow{\epsilon^Q} & N \end{array}$$

Aquí tenemos

$$\epsilon^Q \circ (f_0 - g_0) = \epsilon^Q \circ f_0 - \epsilon^Q \circ g_0 = f \circ \epsilon^P - f \circ \epsilon^Q = 0.$$

Supongamos ahora que hemos definido las aplicaciones hasta  $h_{n-1}$  que satisfacen las identidades (4.1).

$$\begin{array}{ccccccc} P_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}^P} & P_n & \xrightarrow{d_n^P} & P_{n-1} & \xrightarrow{d_{n-1}^P} & P_0 \\ \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & \downarrow f_{n-2} \\ Q_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}^Q} & Q_n & \xrightarrow{d_n^Q} & Q_{n-1} & \xrightarrow{d_{n-1}^Q} & Q_{n-2} \end{array}$$

$\begin{array}{c} \swarrow h_n \\ \swarrow h_{n-1} \\ \swarrow h_{n-2} \end{array}$

Para poder aplicar la parte 2) de 4.1, necesitamos comprobar que

$$d_n^Q \circ h_{n-1} \circ d_n^P = d_n^Q \circ (f_n - g_n).$$

En efecto, puesto que  $f_\bullet$  y  $g_\bullet$  son morfismos de complejos, se tiene

$$\begin{aligned} d_n^Q \circ (f_n - g_n) &= (f_{n-1} - g_{n-1}) \circ d_n^P \stackrel{(4.1)}{=} (h_{n-2} \circ d_{n-1}^P + d_n^Q \circ h_{n-1}) \circ d_n^P \\ &= h_{n-2} \circ \underbrace{d_{n-1}^P \circ d_n^P}_{=0} + d_n^Q \circ h_{n-1} \circ d_n^P = d_n^Q \circ h_{n-1} \circ d_n^P \end{aligned}$$

(aquí la igualdad marcada por (4.1) usa la hipótesis de inducción). ■

**4.3. Corolario.** Las resoluciones proyectivas son únicas salvo equivalencia homotópica (véase la definición 1.6): si para un  $R$ -módulo  $M$  hay dos resoluciones proyectivas

$$\cdots \rightarrow P_2 \xrightarrow{d_2^P} P_1 \xrightarrow{d_1^P} P_0 \xrightarrow{\epsilon^P} M \rightarrow 0$$

y

$$\cdots \rightarrow Q_2 \xrightarrow{d_2^Q} Q_1 \xrightarrow{d_1^Q} Q_0 \xrightarrow{\epsilon^Q} M \rightarrow 0$$

entonces hay una equivalencia homotópica entre los complejos  $P_\bullet$  y  $Q_\bullet$ .

\*Jorge tenía razón en clase: ¡hay que tener más cuidado con el caso base!

*Demostración.* Según la parte 1) del teorema, existen morfismos de complejos  $f_\bullet: P_\bullet \rightarrow Q_\bullet$  y  $g_\bullet: Q_\bullet \rightarrow P_\bullet$  tales que

$$f_{0*} = \text{id}: H_0(P_\bullet) \rightarrow H_0(Q_\bullet), \quad g_{0*} = \text{id}: H_0(Q_\bullet) \rightarrow H_0(P_\bullet).$$

Ahora la composición  $g_\bullet \circ f_\bullet: P_\bullet \rightarrow P_\bullet$  induce la aplicación identidad sobre  $H_0(P_\bullet)$ . Sin embargo, el morfismo identidad de complejos  $\text{id}: P_\bullet \rightarrow P_\bullet$  tiene la misma propiedad, así que la parte 2) del teorema nos da una homotopía  $g_\bullet \circ f_\bullet \simeq \text{id}_{P_\bullet}$ . Las mismas consideraciones producen una homotopía  $f_\bullet \circ g_\bullet \simeq \text{id}_{Q_\bullet}$ . ■

## 5 El lema de la herradura

Ahora vamos a probar que las resoluciones proyectivas pueden ser escogidas de manera compatible con sucesiones exactas cortas de módulos.

**5.1. Proposición (El lema de la herradura).** *Sea*

$$0 \rightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M'' \rightarrow 0$$

*una sucesión exacta corta de  $R$ -módulos y sean*

$$\cdots \rightarrow P'_2 \xrightarrow{d'_2} P'_1 \xrightarrow{d'_1} P' \xrightarrow{\epsilon'} M' \rightarrow 0$$

*y*

$$\cdots \rightarrow P''_2 \xrightarrow{d''_2} P''_1 \xrightarrow{d''_1} P'' \xrightarrow{\epsilon''} M'' \rightarrow 0$$

*resoluciones proyectivas de  $M'$  y  $M''$  respectivamente. Entonces, existe una resolución proyectiva*

$$\cdots \rightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P \xrightarrow{\epsilon} M \rightarrow 0$$

*junto con una sucesión exacta corta de complejos*

$$0 \rightarrow P'_\bullet \xrightarrow{i_\bullet} P_\bullet \xrightarrow{p_\bullet} P''_\bullet \rightarrow 0$$

*donde  $P_n = P'_n \oplus P''_n$  y para todo  $n$  en la sucesión exacta corta correspondiente*

$$0 \rightarrow P'_n \xrightarrow{i_n} P'_n \oplus P''_n \xrightarrow{p_n} P''_n \rightarrow 0$$

*las aplicaciones  $i_n: x \mapsto (x, 0)$  y  $p_n: (x, y) \mapsto y$  son la inclusión y proyección canónica.*

*Demostración.* En el siguiente diagrama (la herradura) tenemos que construir una columna exacta en el

medio compuesta por las sumas directas  $P'_n \oplus P''_n$ :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & P'_2 & & P''_2 & & \\
 & & \downarrow d'_2 & & \downarrow d''_2 & & \\
 & & P'_1 & & P''_1 & & \\
 & & \downarrow d'_1 & & \downarrow d''_1 & & \\
 & & P'_0 & & P''_0 & & \\
 & & \downarrow \epsilon' & & \downarrow \epsilon'' & & \\
 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{i} & M & \xrightarrow{p} & M'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 
 \end{array}$$

Aquí no se puede simplemente tomar  $d'_n \oplus d''_n: P'_n \oplus P''_n \rightarrow P'_{n-1} \oplus P''_{n-1}$ : el módulo  $M$  no necesariamente se identifica con  $M' \oplus M''$  (es decir, no se supone que la fila exacta se escinde).

Consideremos la composición  $i \circ \epsilon': P'_0 \rightarrow M'$ . Luego, dado que  $p$  es epi y  $P''_0$  es un módulo proyectivo, existe una aplicación  $\tilde{\epsilon}'': P''_0 \rightarrow M''$  tal que  $p \circ \tilde{\epsilon}'' = \epsilon''$ . Estas dos aplicaciones inducen

$$\epsilon := (i \circ \epsilon', \tilde{\epsilon}''): P'_0 \oplus P''_0 \rightarrow M$$

que hace conmutar el diagrama

$$(5.1) \quad \begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & P'_0 & \xrightarrow{i_0} & P'_0 \oplus P''_0 & \xrightarrow{p_0} & P''_0 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \epsilon' & \searrow i \circ \epsilon' & \downarrow \epsilon & \swarrow \tilde{\epsilon}'' & \downarrow \epsilon'' \\
 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{i} & M & \xrightarrow{p} & M'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Además, dado que  $\epsilon'$  y  $\epsilon''$  son epimorfismos y las filas son exactas,  $\epsilon$  es también un epimorfismo por el lema del tres. Para proceder con la construcción, consideremos los núcleos de  $\epsilon, \epsilon', \epsilon''$ :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \ker \epsilon' & \longrightarrow & \ker \epsilon & \longrightarrow & \ker \epsilon'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & P'_0 & \xrightarrow{i_0} & P'_0 \oplus P''_0 & \xrightarrow{p_0} & P''_0 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \epsilon' & \searrow i \circ \epsilon' & \downarrow \epsilon & \swarrow \tilde{\epsilon}'' & \downarrow \epsilon'' \\
 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{i} & M & \xrightarrow{p} & M'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Dado que  $\epsilon'$  es un epimorfismo, el lema de la serpiente aplicado a las últimas dos filas nos dice que la primera fila es también exacta (en general,  $\ker \epsilon \rightarrow \ker \epsilon'$  no es un epimorfismo y su imagen es igual al núcleo de  $\delta: \ker \epsilon'' \rightarrow \text{coker } \epsilon'$ , pero  $\text{coker } \epsilon' = 0$ ).

Por la exactitud de resoluciones  $P'_\bullet$  y  $P''_\bullet$ , tenemos  $\ker \epsilon' = \text{im } d'_1$  y  $\ker \epsilon'' = \text{im } d''_1$ , así que se tiene un diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & P'_1 & \xrightarrow{i_1} & P'_1 \oplus P''_1 & \xrightarrow{p_1} & P''_1 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \bar{d}'_1 & \searrow i_0 \circ d'_1 & \downarrow \bar{d}_1 & \swarrow \bar{d}''_1 & \downarrow \bar{d}''_1 & & \\
 0 & \longrightarrow & \ker \epsilon' & \xrightarrow{i_0} & \ker \epsilon & \xrightarrow{p_0} & \ker \epsilon'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 
 \end{array}$$

donde la flecha  $\bar{d}_1: P'_1 \oplus P''_1 \rightarrow \ker \epsilon$  es un epimorfismo que se obtiene de la misma manera que en (5.1). Ahora basta tomar como  $d'_1$  la composición

$$P'_1 \oplus P''_1 \xrightarrow{\bar{d}_1} \ker \epsilon \rightarrow P'_0 \oplus P''_0.$$

Tenemos

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & P'_1 & \xrightarrow{i_1} & P'_1 \oplus P''_1 & \xrightarrow{p_1} & P''_1 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \bar{d}'_1 & & \downarrow \bar{d}_1 & & \downarrow \bar{d}''_1 & & \\
 d'_1 & \left( \begin{array}{c} \ker \epsilon' \xrightarrow{i_0} \ker \epsilon \xrightarrow{p_0} \ker \epsilon'' \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ P'_0 \xrightarrow{i_0} P'_0 \oplus P''_0 \xrightarrow{p_0} P''_0 \end{array} \right) & & & & & & & d''_1 \\
 0 & \longrightarrow & P'_0 & \xrightarrow{i_0} & P'_0 \oplus P''_0 & \xrightarrow{p_0} & P''_0 & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Se puede proceder por inducción usando la misma idea: consideremos

$$\ker d'_1 = \text{im } d'_2, \quad \ker d_1, \quad \ker d''_1 = \text{im } d''_2,$$

etcétera. ■

## 6 Funtores derivados izquierdos

Nos va a interesar la siguiente situación. Sea  $F: R\text{-Mód} \rightarrow R\text{-Mód}$  un functor que satisfice las siguientes condiciones.

10.09.18

- 1)  $F$  es **aditivo**, en el sentido de que para cualesquiera  $M$  y  $N$  la aplicación correspondiente

$$\begin{aligned}
 \text{Hom}_R(M, N) &\rightarrow \text{Hom}_R(F(M), F(N)), \\
 f &\mapsto F(f)
 \end{aligned}$$

es un homomorfismo de grupos abelianos.

- 2)  $F$  es **exacto por la derecha**; es decir, toda sucesión exacta corta de  $R$ -módulos

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

induce una sucesión exacta

$$F(M') \rightarrow F(M) \rightarrow F(M'') \rightarrow 0$$

**6.1. Ejemplo.** Para todo  $R$ -módulo fijo  $N$  el funtor  $F(M) := M \otimes_R N$  es aditivo y exacto por la derecha. En lo que sigue, el lector puede pensar en  $- \otimes_R N$  en lugar de  $F$ . ▲

Los funtores aditivos cumplen las siguientes propiedades importantes.

**6.2. Observación.** *Todo funtor aditivo  $F: R\text{-Mód} \rightarrow R\text{-Mód}$  preserva*

1) *sucesiones exactas cortas escindidas*

$$0 \rightarrow M' \xrightarrow{i'} M' \oplus M'' \xrightarrow{p''} M'' \rightarrow 0$$

donde  $i': m' \mapsto (m', 0)$  y  $p'': (m', m'') \mapsto m''$ ;

2) *complejos y morfismos de complejos de tal manera que  $F$  induce un funtor aditivo  $\mathbf{Com}(R\text{-Mód}) \rightarrow \mathbf{Com}(R\text{-Mód})$ ;*

3) *homotopías entre complejos y equivalencias homotópicas.*

*Demostración.* Recordemos que un diagrama

$$M' \begin{array}{c} \xleftarrow{p'} \\ \xrightarrow{i'} \end{array} M' \oplus M'' \begin{array}{c} \xleftarrow{p''} \\ \xrightarrow{i''} \end{array} M''$$

satisface la propiedad universal de producto o coproducto si y solamente si se cumplen las identidades

$$\begin{aligned} p' \circ i' &= \text{id}_{M'}, & p'' \circ i'' &= \text{id}_{M''}, \\ p'' \circ i' &= 0_{M'M''}, & p' \circ i'' &= 0_{M''M'}, \\ i' \circ p' + i'' \circ p'' &= \text{id}_{M' \oplus M''}. \end{aligned}$$

Siendo un funtor aditivo,  $F$  va a inducir el diagrama

$$F(M') \begin{array}{c} \xleftarrow{F(p')} \\ \xrightarrow{F(i')} \end{array} F(M' \oplus M'') \begin{array}{c} \xleftarrow{F(p'')} \\ \xrightarrow{F(i'')} \end{array} F(M'')$$

junto con las identidades

$$\begin{aligned} F(p') \circ F(i') &= \text{id}_{F(M')}, & F(p'') \circ F(i'') &= \text{id}_{F(M'')}, \\ F(p'') \circ F(i') &= 0_{F(M')F(M'')}, & F(p') \circ F(i'') &= 0_{F(M'')F(M')}, \\ F(i') \circ F(p') + F(i'') \circ F(p'') &= \text{id}_{F(M' \oplus M'')}, \end{aligned}$$

que implican que  $F(M' \oplus M'')$  con las aplicaciones  $F(p')$ ,  $F(p'')$ ,  $F(i')$ ,  $F(i'')$  satisface la propiedad universal de  $F(M') \oplus F(M'')$ . En particular, la sucesión exacta

$$0 \rightarrow M' \xrightarrow{i'} M' \oplus M'' \xrightarrow{p''} M'' \rightarrow 0$$

va a inducir una sucesión exacta

$$0 \rightarrow F(M') \xrightarrow{F(i')} F(M' \oplus M'') \xrightarrow{F(p'')} F(M'') \rightarrow 0$$

Esto establece la parte 1).



Ahora si tenemos un morfismo de complejos  $f_\bullet \rightarrow M_\bullet \rightarrow N_\bullet$ .

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & M_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}^M} & M_n & \xrightarrow{d_n^M} & M_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & N_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}^N} & N_n & \xrightarrow{d_n^N} & N_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

al aplicar  $F$ , nos queda el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & F(M_{n+1}) & \xrightarrow{F(d_{n+1}^M)} & F(M_n) & \xrightarrow{F(d_n^M)} & F(M_{n-1}) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow F(f_{n+1}) & & \downarrow F(f_n) & & \downarrow F(f_{n-1}) & & \\ \cdots & \longrightarrow & F(N_{n+1}) & \xrightarrow{F(d_{n+1}^N)} & F(N_n) & \xrightarrow{F(d_n^N)} & F(N_{n-1}) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Si  $M_\bullet$  es un complejo, entonces  $d_n^M \circ d_{n+1}^M = 0$  para todo  $n$ . Siendo un funtor aditivo,  $F$  debe preservar las aplicaciones nulas, así que vamos a tener  $F(d_n^M) \circ F(d_{n+1}^M) = 0$  para todo  $n$ , lo que significa que  $F(M_\bullet)$  junto con los diferenciales  $F(d_\bullet^M)$  es también un complejo. De la misma manera, si se cumple  $d_n^N \circ f_n = f_{n-1} \circ d_n^M$  para todo  $n$ , entonces  $F(d_n^N) \circ F(f_n) = F(f_{n-1}) \circ F(d_n^M)$ , lo que demuestra que  $F(f_\bullet)$  es un morfismo de complejos  $F(M_\bullet) \rightarrow F(N_\bullet)$ . Esto verifica la parte 2).

De modo similar, si tenemos una homotopía  $h_\bullet$  entre dos morfismos de complejos  $f_\bullet, g_\bullet: M_\bullet \rightarrow N_\bullet$ .

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & M_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}^M} & M_n & \xrightarrow{d_n^M} & M_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & N_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}^N} & N_n & \xrightarrow{d_n^N} & N_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

$f_n - g_n = h_{n-1} \circ d_n^M + d_{n+1}^N \circ h_n,$

entonces al aplicar  $F$  se ve que  $F(h_\bullet)$  es una homotopía entre  $F(f_\bullet)$  y  $F(g_\bullet)$ :

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & F(M_{n+1}) & \xrightarrow{F(d_{n+1}^M)} & F(M_n) & \xrightarrow{F(d_n^M)} & F(M_{n-1}) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow F(f_{n+1}) & & \downarrow F(f_n) & & \downarrow F(f_{n-1}) & & \\ \cdots & \longrightarrow & F(N_{n+1}) & \xrightarrow{F(d_{n+1}^N)} & F(N_n) & \xrightarrow{F(d_n^N)} & F(N_{n-1}) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

$$F(f_n) - F(g_n) = F(h_{n-1}) \circ F(d_n^M) + F(d_{n+1}^N) \circ F(h_n).$$

Ahora si para dos complejos  $M_\bullet$  y  $N_\bullet$  hay una equivalencia homotópica dada por morfismos de complejos  $f_\bullet: M_\bullet \rightarrow N_\bullet$  y  $g_\bullet: N_\bullet \rightarrow M_\bullet$  tales que  $g_\bullet \circ f_\bullet \simeq \text{id}_{M_\bullet}$  y  $f_\bullet \circ g_\bullet \simeq \text{id}_{N_\bullet}$ , entonces al aplicar  $F$  se obtienen homotopías  $F(g_\bullet) \circ F(f_\bullet) \simeq \text{id}_{F(M_\bullet)}$  y  $F(f_\bullet) \circ F(g_\bullet) \simeq \text{id}_{F(N_\bullet)}$ . Esto establece la parte 3). ■

**6.3. Construcción.** Sea  $F: R\text{-Mód} \rightarrow R\text{-Mód}$  un funtor aditivo exacto por la derecha. Para un  $R$ -módulo  $M$  escojamos una resolución proyectiva

$$\cdots \rightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \rightarrow 0$$

Luego, el  $n$ -ésimo funtor derivado izquierdo de  $F$  evaluado en  $M$  viene dado por

$$L_n F(M) := H_n(F(P_\bullet)) := \frac{\ker(F(P_n) \xrightarrow{F(d_n)} F(P_{n-1}))}{\text{im}(F(P_{n+1}) \xrightarrow{F(d_{n+1})} F(P_n))}.$$

**6.4. Proposición.** Sea  $F: R\text{-Mód} \rightarrow R\text{-Mód}$  un funtor aditivo exacto por la derecha.

- 1) La construcción de arriba define a  $L_n F$  de modo único salvo isomorfismo.
- 2) Para todo  $n$  se tiene un funtor aditivo  $L_n F: R\text{-Mód} \rightarrow R\text{-Mód}$ .
- 3) Para  $n = 0$  hay un isomorfismo de funtores  $L_0 F \cong F: R\text{-Mód} \rightarrow R\text{-Mód}$ .
- 4) Si  $P$  es un  $R$ -módulo proyectivo, entonces  $L_n F(P) = 0$  para todo  $n \geq 1$ .

*Demostración.* Hay que verificar que la elección de resolución proyectiva  $P_\bullet \rightarrow M$  no afecta el resultado. De hecho, si  $Q_\bullet \rightarrow M$  es otra resolución proyectiva, entonces, como notamos en 4.3, habrá una equivalencia homotópica entre  $P_\bullet$  y  $Q_\bullet$ . Siendo un funtor aditivo,  $F$  preserva esta equivalencia y luego  $H_n(F(P_\bullet)) \cong H_n(F(Q_\bullet))$  para todo  $n$ . Esto establece 1).

En la parte 2), dada una aplicación  $R$ -lineal  $f: M \rightarrow N$ , podemos escoger resoluciones proyectivas  $P_\bullet \rightarrow M$  y  $Q_\bullet \rightarrow N$ , y luego según 4.2,  $f$  induce de manera única salvo homotopía un morfismo de complejos  $f: P_\bullet \rightarrow Q_\bullet$  tal que  $f_{*0} = f: H_0(P_\bullet) \rightarrow H_0(Q_\bullet)$ . Al aplicar  $F$ , se obtiene un morfismo de complejos  $F(f_\bullet): F(P_\bullet) \rightarrow F(Q_\bullet)$ , y sacando la  $n$ -ésima homología, se tiene

$$H_n(F(f_\bullet)): H_n(F(P_\bullet)) \rightarrow H_n(F(Q_\bullet)),$$

lo que será la aplicación correspondiente

$$L_n F(f): L_n F(M) \rightarrow L_n F(N).$$

El hecho de que  $L_n F$  son funtores aditivos sigue de que  $F$  es un funtor aditivo y  $H_n: \mathbf{Com}(R\text{-Mód}) \rightarrow R\text{-Mód}$  son también funtores aditivos.

Ahora en la parte 3), dado que  $F$  es exacto por la derecha, notamos que una resolución proyectiva para  $M$

$$\cdots \rightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \rightarrow 0$$

induce una sucesión exacta

$$F(P_1) \xrightarrow{F(d_1)} F(P_0) \xrightarrow{F(\epsilon)} F(M) \rightarrow 0$$

Ahora por la definición,  $L_0 F(M)$  es la homología en el grado 0 del complejo

$$\cdots \rightarrow F(P_2) \xrightarrow{F(d_2)} F(P_1) \xrightarrow{F(d_1)} F(P_0) \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

es decir,

$$L_0 F(M) = \text{coker } F(d_1).$$

pero la sucesión exacta de arriba nos dice que

$$\text{coker } F(d_1) \cong F(M).$$

Se comprueba fácilmente que el isomorfismo  $L_0F(M) \cong F(M)$  es natural en  $M$ ; es decir, es un isomorfismo de funtores.

Para la parte 4), notamos que si  $P$  es proyectivo, entonces se puede tomar como su resolución

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow P \xrightarrow{\text{id}} P \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

Luego,  $L_nF(P)$  corresponde a la  $n$ -ésima homología del complejo

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow F(P) \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

donde  $F(P)$  está en el grado 0, y entonces

$$L_nF(P) = \begin{cases} F(P), & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

■

Entonces, a partir de un funtor aditivo exacto por la derecha  $F: R\text{-Mód} \rightarrow R\text{-Mód}$  hemos construido una familia de funtores

$$L_nF: R\text{-Mód} \rightarrow R\text{-Mód}$$

que para  $n = 0$  coinciden con  $F$ . La razón de ser de estos funtores para  $n > 0$  es el siguiente resultado.

**6.5. Proposición.** *Sea  $F: R\text{-Mód} \rightarrow R\text{-Mód}$  un funtor aditivo exacto por la derecha. Toda sucesión exacta corta de  $R$ -módulos*

$$0 \rightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M'' \rightarrow 0$$

*induce de manera natural una sucesión exacta larga*

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & L_nF(M') & \xrightarrow{L_nF(i)} & L_nF(M) & \xrightarrow{L_nF(p)} & L_nF(M'') \\ & & & & & & \downarrow \delta_n \\ & & & & L_{n-1}(M') & \xrightarrow{L_{n-1}(i)} & L_{n-1}(M) & \xrightarrow{L_{n-1}(p)} & L_{n-1}(M'') & \longrightarrow & \dots \\ & & & & & & & & & & & \\ \dots & \longrightarrow & L_1F(M') & \xrightarrow{L_1F(i)} & L_1F(M) & \xrightarrow{L_1F(p)} & L_1F(M'') \\ & & & & & & \downarrow \delta_1 \\ & & & & F(M') & \xrightarrow{F(i)} & F(M) & \xrightarrow{F(p)} & F(M'') & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

*Demostración.* Aquí el punto importante es la posibilidad de escoger resoluciones proyectivas de  $M', M, M''$  de modo compatible. El lema de la herradura (véase 5.1) a partir de resoluciones proyectivas  $P'_\bullet \rightarrow M'$  y  $P''_\bullet \rightarrow M''$  nos da una resolución proyectiva  $P_\bullet \rightarrow M$  tal que  $P_n = P'_n \oplus P''_n$  y hay una sucesión exacta corta de complejos

$$0 \rightarrow P'_\bullet \xrightarrow{i_\bullet} P_\bullet \xrightarrow{p_\bullet} P''_\bullet \rightarrow 0$$

que se ve en cada grado como

$$0 \rightarrow P'_n \xrightarrow{x \mapsto (x,0)} P'_n \oplus P''_n \xrightarrow{(x,y) \mapsto y} P''_n \rightarrow 0$$

Siendo un funtor aditivo,  $F$  va a preservar estas sucesiones escindidas, y tendremos sucesiones exactas cortas

$$0 \rightarrow F(P'_n) \rightarrow F(P'_n \oplus P''_n) \rightarrow F(P''_n) \rightarrow 0$$

que conforman una sucesión exacta corta de complejos

$$0 \rightarrow F(P'_\bullet) \xrightarrow{F(i_\bullet)} F(P_\bullet) \xrightarrow{F(p_\bullet)} F(P''_\bullet) \rightarrow 0$$

Pasando a la sucesión exacta larga correspondiente en homología (véase 2.2), se obtiene la sucesión exacta deseada con los funtores  $L_n F$ . ■

**6.6. Proposición.** *Sea  $F: R\text{-Mód} \rightarrow R\text{-Mód}$  un funtor aditivo exacto por la derecha. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- 1)  $F$  es un funtor exacto (es decir, es también exacto por la izquierda);
- 2)  $L_1 F = 0$ ;
- 3)  $L_n F = 0$  para todo  $n \geq 1$ .

*Demostración.* Obviamente, 2)  $\Rightarrow$  1): si  $L_1 F = 0$ , entonces toda sucesión exacta

$$0 \rightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M'' \rightarrow 0$$

va a inducir una sucesión exacta

$$\cdots \rightarrow L_1 F(M') \rightarrow L_1 F(M) \rightarrow L_1 F(M'') \rightarrow F(M') \xrightarrow{F(i)} F(M) \xrightarrow{F(p)} F(M'') \rightarrow 0$$

donde  $L_1 F(M'') = 0$ , y por lo tanto  $F(i)$  es inyectiva.

Ahora supongamos que  $F$  es exacto. Para todo  $R$ -módulo  $M$  podemos escoger un epimorfismo  $p: P \rightarrow M$  donde  $P$  es proyectivo (por ejemplo, libre) y luego tomar  $K := \ker p$ . Esto nos da una sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow K \xrightarrow{i} P \xrightarrow{p} M \rightarrow 0$$

que induce una sucesión exacta larga

$$\cdots \rightarrow L_1(K) \rightarrow L_1(P) \rightarrow L_1(M) \xrightarrow{\delta_1} F(K) \xrightarrow{F(i)} F(P) \rightarrow F(M) \rightarrow 0$$

Dado que  $P$  es proyectivo, aquí  $L_1(P) = 0$ . Luego, la exactitud de la sucesión de arriba significa que  $\delta_1$  es una inyección. Sin embargo, si  $F$  es exacto por la derecha, entonces  $F(i)$  es inyectiva e  $\text{im } \delta_1 = \ker F(i) = 0$ . Esto implica que  $L_1(M) = 0$ , y establece la implicación 1)  $\Rightarrow$  2).

La condición 2) evidentemente sigue de 3), así que falta probar la implicación 3)  $\Rightarrow$  2). Usemos el mismo truco: para un  $R$ -módulo  $M$  se puede escoger una sucesión exacta corta\*

$$0 \rightarrow K \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$$

que nos dará una sucesión exacta larga

$$\cdots \rightarrow L_{n+1} F(P) \rightarrow L_{n+1} F(M) \rightarrow L_n F(K) \rightarrow L_n F(P) \rightarrow \cdots$$

Dado que  $P$  es proyectivo, tenemos  $L_n F(P) = 0$  para todo  $n \geq 1$ , así que de la sucesión exacta de arriba se obtienen isomorfismos

$$\delta_{n+1}: L_{n+1} F(M) \xrightarrow{\cong} L_n F(K)$$

para  $n \geq 1$ . Podemos proceder por inducción. La base de inducción es la hipótesis  $L_1 F = 0$ . Luego, supongamos que  $L_n F = 0$ . Entonces, los isomorfismos de arriba nos dicen que  $L_{n+1} F = 0$ . ■

\*Este truco se llama el **desplazamiento de la dimensión**.

## 7 Funtores Tor

Ahora estamos listos para aplicar nuestra teoría al caso de productos tensoriales.

**7.1. Definición.** Sean  $M$  y  $N$  un  $R$ -módulos. El  $n$ -ésimo funtor **Tor** está definido por

$$\mathrm{Tor}_n^R(M, N) := L_n(- \otimes_R N)(M).$$

En otras palabras, si

$$\cdots \rightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \rightarrow 0$$

es una resolución proyectiva de  $M$ , entonces el módulo  $\mathrm{Tor}_n^R(M, N)$  se define mediante

$$\mathrm{Tor}_n^R(M, N) := H_n(P_\bullet \otimes_R N) := \frac{\ker(P_n \otimes_R N \xrightarrow{d_n \otimes \mathrm{id}} P_{n-1} \otimes_R N)}{\mathrm{im}(P_{n+1} \otimes_R N \xrightarrow{d_{n+1} \otimes \mathrm{id}} P_n \otimes_R N)}.$$

Resumamos los resultados de la sección anterior para este caso particular.

1)  $\mathrm{Tor}_n^R(-, N)$  son funtores aditivos  $R\text{-Mód} \rightarrow R\text{-Mód}$ . En particular, estos funtores preservan sumas directas binarias:

$$\mathrm{Tor}_n^R(M_1 \oplus M_2, N) \cong \mathrm{Tor}_n^R(M_1, N) \oplus \mathrm{Tor}_n^R(M_2, N).$$

2) Hay un isomorfismo natural  $\mathrm{Tor}_0^R(M, N) \cong M \otimes_R N$ .

3) Si  $P$  es un  $R$ -módulo proyectivo, entonces  $\mathrm{Tor}_n^R(P, N) = 0$  para todo  $n \geq 1$ .

4) Las siguientes condiciones son equivalentes:

- a)  $N$  es un  $R$ -módulo plano; es decir,  $- \otimes_R N$  es un funtor exacto;
- b)  $\mathrm{Tor}_1^R(M, N) = 0$  para todo  $R$ -módulo  $M$ ;
- c)  $\mathrm{Tor}_n^R(M, N) = 0$  para todo  $R$ -módulo  $M$  y  $n \geq 1$ .

5) Toda sucesión exacta corta de  $R$ -módulos

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

induce de manera natural una sucesión exacta larga

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_n^R(M', N) & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_n^R(M, N) & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_n^R(M'', N) \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & \mathrm{Tor}_{n-1}^R(M', N) \longrightarrow \mathrm{Tor}_{n-1}^R(M, N) \longrightarrow \mathrm{Tor}_{n-1}^R(M'', N) \longrightarrow \cdots \\ & & & & & & \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_1^R(M', N) & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_1^R(M, N) & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_1^R(M'', N) \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & M' \otimes_R N \longrightarrow M \otimes_R N \longrightarrow M'' \otimes_R N \longrightarrow 0 \end{array}$$

## 7.2. Proposición.

- 1) Definido de este modo,  $\text{Tor}_n^R(M, N)$ , es también un funtor aditivo en  $N$ .
- 2) Hay isomorfismos naturales  $\text{Tor}_n^R(M, N) \cong \text{Tor}_n^R(N, M)$  para todo  $n$ .

*Demostración.* **\*\*\* TODO \*\*\*** Probablemente volveré a este asunto más tarde (por lo menos en mis apuntes). ■

**7.3. Ejemplo.** Calculemos algunos de los funtores  $\text{Tor}_n^R$  para  $R = \mathbb{Z}$ ; es decir, para grupos abelianos. Primero notamos que para todo grupo abeliano  $A$  se puede escoger un epimorfismo  $F_0 \rightarrow A$  desde un grupo abeliano libre  $F_0$ . Luego, su núcleo  $F_1 \subset F_0$  también debe ser libre, siendo un subgrupo de un grupo abeliano libre\*. Tenemos entonces una resolución libre\*\* muy corta

$$0 \rightarrow F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \rightarrow A \rightarrow 0$$

Luego, por la definición,  $\text{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(A, B)$  es el  $n$ -ésimo grupo de homología del complejo

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow F_1 \otimes_{\mathbb{Z}} B \xrightarrow{d_1 \otimes \text{id}} F_0 \otimes_{\mathbb{Z}} B \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

así que  $\text{Tor}_n^{\mathbb{Z}} = 0$  para  $n \neq 0, 1$ . Otro modo de verlo es considerar la sucesión exacta larga correspondiente

$$\cdots \rightarrow \text{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(F_1, B) \rightarrow \text{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(F_0, B) \rightarrow \text{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(A, B) \rightarrow \text{Tor}_{n-1}^{\mathbb{Z}}(F_1, B) \rightarrow \text{Tor}_{n-1}^{\mathbb{Z}}(F_0, B) \rightarrow \cdots$$

donde  $\text{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(F_1, B) = \text{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(F_0, B) = 0$  para todo  $n \geq 1$ , dado que  $F_0$  y  $F_1$  son libres (en particular proyectivos).

Para  $n = 1$  tenemos  $\text{Tor}_0^{\mathbb{Z}}(A, B) \cong A \otimes_{\mathbb{Z}} B$ . Recordemos algunos cálculos de productos tensoriales.

$A \backslash B$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/(m, n)\mathbb{Z}$	$0$	$0$
$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}$	$0$	$\mathbb{Q}$	$0$
$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$	$0$	$0$	$0$

Algunos valores de  $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$

Podemos deducir todos estos cálculos de sucesiones exactas, y a la vez calcular  $\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, B)$ .

- 1) Hay isomorfismos naturales

$$\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} A \cong A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong A.$$

- 2) Dado que  $\mathbb{Z}$  es un grupo abeliano libre (y en particular  $\mathbb{Z}$ -módulo proyectivo), se tiene

$$\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, A) \cong \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Z}) = 0.$$

\*Si  $R$  es un dominio de ideales principales (en particular  $R = \mathbb{Z}$ ), entonces todo submódulo de un  $R$ -módulo libre es también libre. Sobre un anillo general  $R$ , esto es totalmente falso.

\*\*Por las mismas razones, sobre un dominio de ideales principales  $R$ , todo  $R$ -módulo proyectivo es libre.

3) La sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times n} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

al tomar el producto tensorial con  $A$  produce una sucesión exacta

$$0 \rightarrow \underbrace{\mathrm{Tor}_1(\mathbb{Z}, A)}_{=0} \rightarrow \underbrace{\mathrm{Tor}_1(\mathbb{Z}, A)}_{=0} \rightarrow \mathrm{Tor}_1(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, A) \rightarrow A \xrightarrow{\times n} A \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} A \rightarrow 0$$

De donde sigue que

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} A &\cong \mathrm{coker}(A \xrightarrow{\times n} A) = A/nA, \\ \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, A) &\cong \ker(A \xrightarrow{\times n} A) = A[n] := \{x \in A \mid n \cdot x = 0\}. \end{aligned}$$

Notamos que  $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, A)$  nos da precisamente el subgrupo de  $n$ -torsión en  $A$ . El nombre de Tor viene de la palabra "torsión". En particular, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} &\cong \frac{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}/(m, n)\mathbb{Z}, \\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} &\cong \mathbb{Q}/n\mathbb{Q} = 0, \\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} &\cong \frac{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}{n\mathbb{Q}/\mathbb{Z}} = 0, \end{aligned}$$

usando que  $\mathbb{Q}$  y  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  son grupos divisibles, así que para todo  $n = 1, 2, 3, \dots$  la multiplicación por  $n$  sobre ellos es sobreyectiva. De la misma manera, calculamos

$$\begin{aligned} \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) &\cong (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})[n] \cong \mathbb{Z}/(m, n)\mathbb{Z}, \\ \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) &\cong \mathbb{Q}[n] = 0, \\ \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) &\cong (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})[n] = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ n \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} n-1 \\ n \end{bmatrix} \right\} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

3)  $\mathbb{Q}$  es una localización de  $\mathbb{Z}$ , así que es un  $\mathbb{Z}$ -módulo plano, y luego

$$\mathrm{Tor}_1(A, \mathbb{Q}) \cong \mathrm{Tor}_1(\mathbb{Q}, A) = 0.$$

4) Tenemos

$$\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} = 0,$$

dado que  $\mathbb{Q}$  y  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  son grupos divisibles (la multiplicación por  $n$  es sobreyectiva para todo  $n = 1, 2, 3, \dots$ ), pero  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  es un grupo de torsión (para todo  $x \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  existe  $n = 1, 2, 3, \dots$  tal que  $n \cdot x = 0$ ).

5) Consideremos la sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

Al aplicar  $- \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ , nos queda la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \underbrace{\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})}_{=0} \rightarrow \underbrace{\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})}_{=0} \rightarrow \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow \underbrace{\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}}_{=0} \rightarrow \underbrace{\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}}_{=0} \rightarrow 0$$

de donde se puede concluir que

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

6) Podemos calcular directamente que  $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$ , o notar que la sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

induce una sucesión exacta corta

$$\underbrace{\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{Q})}_{=0} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \rightarrow \underbrace{\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}}_{=0} \rightarrow 0$$

A \ B	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}$	0	0	0	0
$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}/(m,n)\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$
$\mathbb{Q}$	0	0	0	0
$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$

Algunos valores de  $\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, B)$

