Álgebra I: Teoría de Grupos
Tarea 1: Permutaciones

Universidad de El Salvador. Ciclo impar 2018

Por cualquier pregunta, no duden en contactarme por correo electrónico cadadr@gmail.com.
Fecha límite: 13.03.2018.

Ejercicio 1.1. *Encuentre la descomposición en ciclos disjuntos para la permutación*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 6 & 5 & 1 & 4 & 2 & 3 & 10 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in S_{10}$$

y su signo.

Ejercicio 1.2. *Calcule la descomposición en ciclos disjuntos del producto de ciclos*

$$(1\ 2)\ (2\ 5\ 3)\ (1\ 5\ 7\ 3\ 2\ 6\ 4)\ (4\ 7\ 6) \in S_7$$

y su signo.

Ejercicio 1.3. *Demuestre la fórmula para el signo de un k-ciclo:*

$$\operatorname{sgn}(i_1\ i_2\ \cdots\ i_k) = (-1)^{k-1}.$$

En general, si $\sigma \in S_n$ afecta m elementos (en el sentido de que $\sigma(i) \neq i$ para m números i) y tiene una descomposición en s ciclos disjuntos, entonces

$$\operatorname{sgn}\sigma = (-1)^{m-s}.$$

Por ejemplo,

$$\sigma = (1\ 2)\ (3\ 6\ 4)\ (5\ 11\ 8)$$

afecta $1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 11$, entonces $m = 8$, y en la expresión de arriba hay $s = 3$ ciclos disjuntos. Entonces, $\operatorname{sgn}\sigma = (-1)^{8-3} = -1$.

Ojo: según nuestra terminología, el último ejercicio nos dice que una permutación cíclica de orden par k es impar (tiene signo -1) y viceversa.

Para realizar cualquier permutación, se puede fijar algún elemento y cada vez hacer intercambios solo con este.

Ejercicio 1.4. *Fijemos algún elemento de $\{1, \ldots, n\}$, por ejemplo 1. Demuestre que toda transposición $(i\ j)$ puede ser escrita como una composición de transposiciones de la forma $(1\ k)$. Deduzca que toda permutación $\sigma \in S_n$ para $n \geq 2$ es un producto de transposiciones*

$$(1\ 2),\ (1\ 3),\ \ldots,\ (1\ n).$$

De hecho, para expresar cualquier permutación, es suficiente usar una sola transposición, un n-ciclo y su inverso.

Ejercicio 1.5. *Demuestre que todo elemento de S_n puede ser expresado como un producto de*

$$(1\,2),\ (1\,2\ \cdots\ n),\ (1\,2\ \cdots\ n)^{-1}.$$

Indicación: use que los elementos de S_n se expresan como productos de transposiciones de la forma $(i\ i+1)$ y la fórmula $\sigma\,(i_1\ i_2\ \cdots\ i_k)\,\sigma^{-1} = (\sigma(i_1)\ \sigma(i_2)\ \cdots\ \sigma(i_k))$.

En los siguientes ejercicios vamos a demostrar un resultado similar para los grupos alternantes.

Ejercicio 1.6. *Sean i, j, k, ℓ números distintos. Verifique las relaciones para la composición de transposiciones*

$$\begin{aligned}(i\ j)\,(j\ k) &= (i\ j\ k),\\ (i\ j)\,(k\ \ell) &= (i\ j\ k)\,(j\ k\ \ell).\end{aligned}$$

Deduzca que para $n \geq 3$ todo elemento de A_n es una composición de ciclos de orden 3.

Ejercicio 1.7. *Demuestre que para $n \geq 3$ todo elemento de A_n es una composición de ciclos de la forma $(1\ i\ j)$.*
Indicación: use el ejercicio 1.6.

Ejercicio 1.8. *Demuestre que para $n \geq 3$ todo elemento de A_n es una composición de ciclos de la forma $(1\ 2\ i)$.*
Indicación: use el ejercicio 1.7.

Ejercicio 1.9. *Demuestre que para $n \geq 3$ todo elemento de A_n es una composición de ciclos de la forma $(i\ i+1\ i+2)$.*
Indicación: note que es un análogo de la descomposición de los elementos de S_n mediante las transposiciones de la forma $(i\ i+1)$. Para $i > 3$ demuestre la identidad

$$(1\ 2\ i) = (1\ 2\ i-2)\,(1\ 2\ i-1)\,(i-2\ i-1\ i)\,(1\ 2\ i-2)\,(1\ 2\ i-1)$$

Luego, proceda por inducción sobre i y use el ejercicio 1.8.

Ejercicio 1.10. *Demuestre que para $n \geq 3$ todo elemento de A_n puede ser escrito como el producto de*

- $(1\,2\,3)$, $(2\,3\ \cdots\ n)$, $(2\,3\ \cdots\ n)^{-1}$, *si n es par;*
- $(1\,2\,3)$, $(1\,2\ \cdots\ n)$, $(1\,2\ \cdots\ n)^{-1}$, *si n es impar.*

Indicación: use la fórmula $\sigma\,(i_1\ i_2\ \cdots\ i_k)\,\sigma^{-1} = (\sigma(i_1)\ \sigma(i_2)\ \cdots\ \sigma(i_k))$ y el ejercicio 1.9.

La moraleja de los ejercicios de arriba: aunque S_n y A_n tienen muchos elementos, estos se expresan en términos de solamente dos de ellos (y sus inversos).