Álgebra I. Hoja de ejercicios 10: Productos de grupos
Universidad de El Salvador, ciclo impar 2018

Por cualquier pregunta, no duden en contactarme por correo electrónico cadadr@gmail.com.

Ejercicio 10.1. *Demuestre que la sucesión*

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{n \mapsto (n,-n)} \mathbb{Z}[1/p] \times \mathbb{Z}_{(p)} \xrightarrow{(x,y) \mapsto x+y} \mathbb{Q} \to 0$$

es exacta. Aquí $\mathbb{Z}[1/p]$ es el subgrupo de $\mathbb{Q}$ formado por las fracciones con potencias de p en el denominador y $\mathbb{Z}_{(p)}$ es el subgrupo de fracciones con el denominador no divisible por p.

Ejercicio 10.2. *Demuestre que si $\mathbb{Q} \cong A \times B$ para algunos grupos abelianos A y B, entonces $A = 0$ o $B = 0$.*
Sugerencia: supongamos que A y B son subgrupos no triviales de $\mathbb{Q}$. Demuestre que $A \cap B \neq \{0\}$.

Ejercicio 10.3. *Demuestre que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}[1/p]/\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{(p)}/\mathbb{Z}$.*

Ejercicio 10.4. *Sea* $\operatorname{Isom}(\mathbb{R}^2)$ *el grupo de isometrías del plano euclidiano. Demuestre que*

$$\operatorname{Isom}(\mathbb{R}^2) \cong \mathbb{R}^2 \rtimes_\phi O_2(\mathbb{R}),$$

donde $\mathbb{R}^2$ es el grupo aditivo $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y el homomorfismo

$$\phi\colon O_2(\mathbb{R}) \to \operatorname{Aut}(\mathbb{R}^2)$$

viene dado por la multiplicación de vectores $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$ por matrices $A \in O_2(\mathbb{R})$:

$$\phi_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 10.5. *Demuestre que $O_n(\mathbb{R}) \cong SO_n(\mathbb{R}) \rtimes_\phi \{\pm 1\}$ para algún homomorfismo $\phi\colon \{\pm 1\} \to \operatorname{Aut}(SO_n(\mathbb{R}))$.*
Indicación: demuestre que la sucesión exacta corta

$$1 \to SO_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{i} O_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{p} \{\pm 1\} \to 1$$

(donde i es la inclusión de subgrupo y p es la proyección sobre el grupo cociente) admite un homomorfismo $s\colon \{\pm 1\} \to O_n(\mathbb{R})$ tal que $i \circ s = \mathrm{id}$.

Ejercicio 10.6. *Encuentre todas las posibles extensiones de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ por $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$*

$$0 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to A \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$$

salvo isomorfismo.

Ejercicio 10.7. *Demuestre que toda sucesión exacta corta de grupos abelianos*

$$0 \to A \to B \to \mathbb{Z} \to 0$$

es equivalente a la extensión

$$0 \to A \xrightarrow{a \mapsto (a,0)} A \times \mathbb{Z} \xrightarrow{(a,n) \mapsto n} \mathbb{Z} \to 0$$

Indicación: demuestre que todo epimorsifmo $p\colon B \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ admite un homomorfismo $s\colon \mathbb{Z} \to B$ tal que $p \circ s = \mathrm{id}_\mathbb{Z}$.

Ejercicio 10.8. *Sea A un grupo abeliano que satisface la siguiente propiedad: todo monomorfismo de grupos abelianos $i\colon A \rightarrowtail B$ admite un homomorfismo $r\colon B \to A$ tal que $r \circ i = \mathrm{id}_A$. En este ejercicio vamos a demostrar que A es divisible.*

Sea $n = 1, 2, 3, \ldots$ y $a \in A$.

1) *Consideremos el homomorfismo $f\colon \mathbb{Z} \to A$ definido por $f(1) = a$.*

2) *Demuestre que $C := \{(f(x), -nx) \mid x \in \mathbb{Z}\}$ es un subgrupo de $A \times \mathbb{Z}$.*

3) *Consideremos el cuadrado de homomorfismos de grupos abelianos*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, tail, "\times n"] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{Z} \arrow[d, "\overline{f}"] \\ A \arrow[r, "i"] & (A \times \mathbb{Z})/C \end{tikzcd}$$

donde la primera flecha horizontal es la multiplicación por n, la flecha i viene dada por $a \mapsto (a, 0) + C$ y la flecha $\overline{f}$ viene dada por $x \mapsto (0, x) + C$. Demuestre que el cuadrado es conmutativo y que i es un monomorfismo.

4) *Por la hipótesis sobre A, existe un homomorfismo $r\colon (A \times \mathbb{Z})/C \to A$ tal que $r \circ i = \mathrm{id}_A$.*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, tail, "\times n"] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{Z} \arrow[d, "\overline{f}"] \\ A \arrow[r, "i"] & (A \times \mathbb{Z})/C \arrow[l, dashed, bend left, "r"] \end{tikzcd}$$

Usando esto, encuentre un elemento $b \in A$ tal que $b = n \cdot a$. Concluya que A es divisible.

Ejercicio 10.9. *Sea*

$$1 \to H \to G \to K \to 1$$

una sucesión exacta corta de grupos finitos. Demuestre que $|G| = |H| \cdot |K|$.

Ejercicio 10.10. *Se dice que una sucesión de homomorfismos*

$$1 \xrightarrow{f_n} G_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} G_{n-2} \xrightarrow{f_{n-2}} G_{n-3} \to \cdots \to G_1 \xrightarrow{f_1} G_0 \xrightarrow{f_0} 1$$

es ***exacta*** *si $\operatorname{im} f_i = \ker f_{i-1}$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Es una generalización de la noción de sucesión exacta corta*

$$1 \xrightarrow{f_3} G_2 \xrightarrow{f_2} G_1 \xrightarrow{f_1} G_0 \xrightarrow{f_0} 1$$

Demuestre que para una sucesión exacta de grupos finitos se cumple

$$\prod_{0 \le i \le n-1} |G_i|^{(-1)^i} = 1.$$

Esto generaliza la fórmula del ejercicio precedente.