Álgebra I: Teoría de Grupos
Tarea 3: Anillos

Universidad de El Salvador. Ciclo impar 2018

Por cualquier pregunta, no duden en contactarme por correo electrónico cadadr@gmail.com.
Fecha límite: 12.04.2018.

Ejercicio 3.1. *Sea p un número primo. Demuestre que los coeficientes binomiales $\binom{p}{i}$ son divisibles por p para $i = 1, \ldots, p-1$.*

Ejercicio 3.2. *Para $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$ consideremos la raíz de la unidad $\zeta_n := e^{2\pi i/n} \in \mathbb{C}$.*

1) *Demuestre la identidad $1 + \zeta_n + \zeta_n^2 + \cdots + \zeta_n^{n-1} = 0$.*

2) *Consideremos el conjunto*

$$\mathbb{Z}[\zeta_n] := \{a_0 + a_1\,\zeta_n + a_2\,\zeta_n^2 + \cdots + a_{n-1}\,\zeta_n^{n-1} \mid a_i \in \mathbb{Z}\}.$$

Demuestre que es un anillo conmutativo respecto a la suma y adición habitual de los números complejos.

Ejercicio 3.3. *Deduzca de los axiomas de anillos las siguientes propiedades:*

$$0 \cdot x = x \cdot 0 = 0, \quad x \cdot (-y) = (-x) \cdot y = -xy, \quad x\,(y-z) = xy - xz, \quad (x-y)\,z = xz - yz$$

para cualesquiera $x, y, z \in R$.

Ejercicio 3.4. *En un anillo R puede ser que $0 = 1$. Pero en este caso R tiene solo un elemento.*

1) *Demuestre que un conjunto $R = \{0\}$ que consiste en un elemento puede ser dotado de modo único de una estructura de un anillo conmutativo. Este anillo se llama el **anillo nulo**.*

2) *Demuestre que si en un anillo R se cumple $1 = 0$, entonces $R = \{0\}$.*

Ejercicio 3.5. *Para un número fijo $n = 1, 2, 3, \ldots$ consideremos el conjunto de fracciones con n en el denominador:*

$$\mathbb{Z}[1/n] := \left\{ \frac{m}{n^k} \;\middle|\; m \in \mathbb{Z},\ k = 0, 1, 2, 3, \ldots \right\} \subset \mathbb{Q}.$$

De modo similar, para un número primo fijo $p = 2, 3, 5, 7, 11, \ldots$ consideremos las fracciones con denominador no divisible por p:

$$\mathbb{Z}_{(p)} := \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0,\ p \nmid b \right\} \subset \mathbb{Q}.$$

Verifique que $\mathbb{Z}[1/n]$ y $\mathbb{Z}_{(p)}$ son anillos conmutativos respecto a la suma y producto habituales.

Ejercicio 3.6. *Sea R un anillo conmutativo. Una* ***serie formal de potencias*** *con coeficientes en R en una variable X es una suma formal*

$$f = \sum_{i \geq 0} a_i\, X^i,$$

donde $a_i \in R$. A diferencia de polinomios, se puede tener un número infinito de coeficientes no nulos. Las sumas y productos de series formales están definidos por

$$\sum_{i\geq 0} a_i\, X^i + \sum_{i\geq 0} b_i\, X^i := \sum_{i\geq 0} (a_i + b_i)\, X^i, \quad \left(\sum_{i\geq 0} a_i\, X^i\right) \cdot \left(\sum_{i\geq 0} b_i\, X^i\right) := \sum_{k\geq 0} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j\right)\, X^k.$$

1) *Note que las series formales forman un anillo conmutativo. Este se denota por $R[\![X]\!]$.*

2) *Verifique la identidad*

$$(1+X)\cdot(1 - X + X^2 - X^3 + X^4 - X^5 + \cdots) = 1$$

en $R[\![X]\!]$ (es decir, los coeficientes de la serie formal al lado derecho son $a_0 = 1$ y $a_i = 0$ para $i > 0$).

3) *Para $R = \mathbb{Q}$ verifique la identidad $\left(\sum_{i\geq 0} \frac{X^i}{i!}\right)^n = \sum_{i\geq 0} \frac{n^i}{i!}\, X^i$ en el anillo de series formales $\mathbb{Q}[\![X]\!]$.*

Ejercicio 3.7. *Para una serie de potencias $f \in R[\![X]\!]$ sea $v(f)$ el mínimo índice tal que el coeficiente correspondiente no es nulo:*

$$v(f) := \min\{i \mid a_i \neq 0\};$$

y si $f = 0$, pongamos $v(0) := +\infty$.

1) *Demuestre que para cualesquiera $f, g \in R[\![X]\!]$ se cumple la desigualdad*

$$v(fg) \geq v(f) + v(g)$$

y la igualdad $v(fg) = v(f) + v(g)$ si R es un dominio de integridad.

2) *Demuestre que $R[\![X]\!]$ es un dominio de integridad si y solamente si R lo es.*

Ejercicio 3.8. *Sea R un anillo conmutativo. En el anillo de matrices $M_n(R)$ denotemos por e_{ij} para $1 \leq i, j \leq n$ la matriz cuyos coeficientes son nulos, salvo el coeficiente (i, j) que es igual a 1. Sea $A \in M_n(R)$ una matriz arbitraria de $n \times n$ con coeficientes en R.*

1) *Demuestre que en el producto de matrices $e_{ij}\, A$ la fila i es igual a la fila j de A y el resto de los coeficientes son nulos.*

2) *Demuestre que en el producto de matrices $A\, e_{ij}$ la columna j es igual a la columna i de A y el resto de los coeficientes son nulos.*

3) *Demuestre que*

$$e_{ij}\, A = A\, e_{ij}$$

para todo $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$ si y solamente si A es una ***matriz escalar****:*

$$A = aI = \begin{pmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{pmatrix}$$

para algún $a \in R$.

4) *Concluya que las únicas matrices en $M_n(R)$ que conmutan con todas las matrices son las matrices escalares.*