Álgebra I: Teoría de Grupos
Tarea 7: Clases laterales

Universidad de El Salvador. Ciclo impar 2018

Por cualquier pregunta, no duden en contactarme por correo electrónico cadadr@gmail.com.
Fecha límite: 31.05.2018.

Ejercicio 7.1. *Demuestre que si $H \subset G$ es un subgrupo de índice $|G : H| = 2$, entonces H es normal.*

Ejercicio 7.2. *Demuestre que todo cociente de un grupo cíclico es cíclico.*

Ejercicio 7.3 (Segundo teorema de isomorfía). *Sea G un grupo, sea $H \subset G$ un subgrupo y $K \subset G$ un subgrupo normal.*

1) *Demuestre que $HK := \{hk \mid h \in H,\ k \in K\}$ es un subgrupo de G.*

2) *Demuestre que K es un subgrupo normal de HK.*

3) *Demuestre que la aplicación*
$$H \to HK/K, \quad h \mapsto hK$$
es un homomorfismo sobreyectivo de grupos y su núcleo es $H \cap K$.

4) *Deduzca que $H/(H \cap K) \cong HK/K$.*

Ejercicio 7.4. *Para un cuerpo k sea $G = \mathrm{GL}_2(k)$, $H = \mathrm{SL}_2(k)$, $K = k^\times \cdot I \subset \mathrm{GL}_2(k)$. Deduzca que*
$$\mathrm{SL}_2(k)/\{\pm I\} \cong \mathrm{GL}_2(k)/k^\times.$$

Ejercicio 7.5 (Tercer teorema de isomorfía). *Sea G un grupo. Sea K un subgrupo normal de G y sea N un subgrupo de K tal que N es normal en G.*

1) *Demuestre que la aplicación*
$$G/N \to G/K, \quad gN \mapsto gK$$
está bien definida y es un homomorfismo sobreyectivo y su núcleo es $K/N \subset G/N$.

2) *Deduzca que $(G/N)/(K/N) \cong G/K$.*

Ejercicio 7.6. *Sean m y n dos enteros positivos tales que $n \mid m$, así que $m\mathbb{Z} \subset n\mathbb{Z}$. Demuestre que*
$$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})/(n\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

Se dice que un grupo abeliano A un elemento $x \in A$ es **divisible** si para todo $a \in A$ y todo número natural positivo $n = 1, 2, 3, \ldots$ existe $b \in A$ (no necesariamente único) tal que $nb = a$. Si todos los elementos de A son divisibles, se dice que A es un **grupo divisible**.

Ejercicio 7.7.

1) *Demuestre que los grupos aditivos $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ son divisibles.*

2) *Demuestre que un grupo abeliano finito no nulo nunca es divisible.*

Ejercicio 7.8. *Sea p un número primo. El p**-grupo de Prüfer** es el grupo de las raíces de la unidad de orden p^n para $n \in \mathbb{N}$:*

$$\mu_{p^\infty}(\mathbb{C}) := \bigcup_{n \geq 0} \mu_{p^n}(\mathbb{C}) = \{z \in \mathbb{C}^\times \mid z^{p^n} = 1 \text{ para algún } n = 0, 1, 2, \ldots\}$$

1) *Demuestre que $\mu_{p^\infty}(\mathbb{C})$ es divisible.*

2) *Demuestre que hay un isomorfismo $\mu_{p^\infty}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}[1/p]/\mathbb{Z}$ donde*

$$\mathbb{Z}[1/p] := \{a/p^n \mid a \in \mathbb{Z},\ n = 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Ejercicio 7.9.

1) *Demuestre que todos los elementos divisibles forman un subgrupo*

$$A_{div} := \{a \in A \mid a \text{ es divisible } \}.$$

*Este se llama el **subgrupo máximo divisible** de A.*

2) *Sea $f\colon A \to B$ un homomorfismo de grupos. Demuestre que si $a \in A$ es divisible, entonces $f(a) \in B$ es también divisible. En particular, f se restringe a un homomorfismo $A_{div} \to B_{div}$.*

$$\begin{tikzcd} A_{div} \arrow[r, dashed] \arrow[d, tail] & B_{div} \arrow[d, tail] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

3) *Demuestre que todo grupo cociente de un grupo divisible es también divisible. En particular, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ y $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ son divisibles.*

Ejercicio 7.10. *Demuestre que no hay homomorfismos no triviales $\mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.*