

Álgebra I. Hoja de ejercicios 8: Abelianización

Universidad de El Salvador, ciclo impar 2018

Por cualquier pregunta, no duden en contactarme por correo electrónico cadadr@gmail.com.

Ejercicio 8.1. Para un grupo G y su subgrupo H denotemos por $[G, H]$ el subgrupo generado por los conmutadores $[g, h]$ donde $g \in G$ y $h \in H$. Demuestre que $[G, H] \subseteq H$ si y solamente si H es un subgrupo normal.

Ejercicio 8.2. En A_5 tenemos $[(1\ 2\ 4), (1\ 3\ 5)] = (1\ 2\ 3)$. De modo similar, exprese las permutaciones $(1\ 2)(3\ 4)$ y $(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ como conmutadores.

Ejercicio 8.3. Para las matrices elementales $E_{ij}(\lambda) := I + \lambda e_{ij}$ demuestre que

$$[E_{ij}(\lambda), E_{jk}(\mu)] = E_{ik}(\lambda\mu)$$

donde i, j, k son índices diferentes.

Ejercicio 8.4. Encuentre todos los homomorfismos $S_n \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Ejercicio 8.5. Sea $f: G \rightarrow H$ un epimorfismo de grupos. Demuestre que $f^{ab}: G^{ab} \rightarrow H^{ab}$ es también un epimorfismo. Demuestre que si $f: G \rightarrow H$ es un monomorfismo, entonces $f^{ab}: G^{ab} \rightarrow H^{ab}$ no es necesariamente un monomorfismo (encuentre un contraejemplo específico).

Ejercicio 8.6. Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} \text{Hom}(G, H) &\rightarrow \text{Hom}(G^{ab}, H^{ab}), \\ f &\mapsto f^{ab}. \end{aligned}$$

Demuestre que no es ni inyectiva, ni sobreyectiva en general (encuentre contraejemplos).

Indicación: para ver que no es sobreyectiva, considere $G = \{\pm 1\}$ y $H = Q_8$.

Ejercicio 8.7. Sea k un cuerpo. Consideremos el grupo

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in k \right\}.$$

1) Calcule el subgrupo conmutador $[G, G]$.

2) Demuestre que la abelianización G^{ab} es isomorfa al grupo aditivo

$$k^2 = \{(a, c) \mid a, c \in k\}.$$

Ejercicio 8.8. Calcule la abelianización del grupo de cuaterniones Q_8 .

Ejercicio 8.9. Para el grupo diédrico

$$D_n = \{\text{id}, r, r^2, \dots, r^{n-1}, f, fr, fr^2, \dots, fr^{n-1}\}$$

1) calcule que $[D_n, D_n] = \langle r^2 \rangle$;

2) calcule $(D_n)^{ab}$.

Ejercicio 8.10. El grupo diédrico D_n permuta los vértices del n -ágono regular y esto nos da un monomorfismo natural $f: D_n \rightarrow S_n$. Calcule el homomorfismo correspondiente $f^{ab}: (D_n)^{ab} \rightarrow (S_n)^{ab}$.