Álgebra I: Teoría de Grupos
Hoja de ejercicios 8: Abelianización

Universidad de El Salvador. Ciclo impar 2018

Por cualquier pregunta, no duden en contactarme por correo electrónico cadadr@gmail.com.

Ejercicio 8.1. *Para un grupo G y su subgrupo H denotemos por $[G, H]$ el subgrupo generado por los conmutadores $[g, h]$ donde $g \in G$ y $h \in H$. Demuestre que $[G, H] \subseteq H$ si y solamente si H es un subgrupo normal.*

Ejercicio 8.2. *En A_5 tenemos $[(1\,2\,4), (1\,3\,5)] = (1\,2\,3)$. De modo similar, exprese las permutaciones $(1\,2)\,(3\,4)$ y $(1\,2\,3\,4\,5)$ como conmutadores.*

Ejercicio 8.3. *Para las matrices elementales $E_{ij}(\lambda) := I + \lambda\, e_{ij}$ demuestre que*

$$[E_{ij}(\lambda), E_{jk}(\mu)] = E_{ik}(\lambda\mu)$$

donde i, j, k son índices diferentes.

Ejercicio 8.4. *Encuentre todos los homomorfismos $S_n \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.*

Ejercicio 8.5. *Sea $f\colon G \twoheadrightarrow H$ un epimorfismo de grupos. Demuestre que $f^{ab}\colon G^{ab} \to H^{ab}$ es también un epimorfismo. Demuestre que si $f\colon G \rightarrowtail H$ es un monomorfismo, entonces $f^{ab}\colon G^{ab} \to H^{ab}$ no es necesariamente un monomorfismo (encuentre un contraejemplo especifico).*

Ejercicio 8.6. *Consideremos la aplicación*

$$\begin{gathered} \operatorname{Hom}(G, H) \to \operatorname{Hom}(G^{ab}, H^{ab}), \\ f \mapsto f^{ab}. \end{gathered}$$

Demuestre que no es ni inyectiva, ni sobreyectiva en general (encuentre contraejemplos).

Indicación: para ver que no es sobreyectiva, considere $G = \{\pm 1\}$ y $H = Q_8$.

Ejercicio 8.7. *Sea k un cuerpo. Consideremos el grupo*

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c \in k \right\}.$$

1) *Calcule el subgrupo conmutador $[G, G]$.*

2) *Demuestre que la abelianización G^{ab} es isomorfa al grupo aditivo*

$$k^2 = \{(a, c) \mid a, c \in k\}.$$

Ejercicio 8.8. *Calcule la abelianización del grupo de cuaterniones Q_8.*

Ejercicio 8.9. *Para el grupo diédrico*

$$D_n = \{\mathrm{id},\ r,\ r^2,\ \dots,\ r^{n-1},\ f,\ fr,\ fr^2,\ \dots,\ fr^{n-1}\}$$

1) *calcule que* $[D_n, D_n] = \langle r^2 \rangle$;

2) *calcule* $(D_n)^{ab}$.

Ejercicio 8.10. *El grupo diédrico* D_n *permuta los vértices del* n*-ágono regular y esto nos da un monomorfismo natural* $f\colon D_n \to S_n$. *Calcule el homomorfismo correspondiente* $f^{ab}\colon (D_n)^{ab} \to (S_n)^{ab}$.