# Álgebra I. Hoja de ejercicios 9: Acciones
# Universidad de El Salvador, ciclo impar 2018

Por cualquier pregunta, no duden en contactarme por correo electrónico cadadr@gmail.com.

**Ejercicio 9.1.** *Consideremos la acción del grupo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sobre $\mathcal{H}$. Demuestre que el estabilizador para el punto $\sqrt{-1} \in \mathcal{H}$ es el grupo*

$$\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \,\middle|\, 0 \le \phi < 2\pi \right\} = O_2(\mathbb{R}) \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}).$$

**Ejercicio 9.2.** *Demuestre que el núcleo de la acción de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sobre $\mathcal{H}$ es el subgrupo $Z(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})) = \{\pm I\}$.*

**Ejercicio 9.3.** *Sea $p$ un número primo y sea $X$ un $G$-conjunto finito. Supongamos que para todo subgrupo $H \subsetneq G$ su índice es divisible por $p$:*

$$p \mid |G:H|.$$

*Deduzca que el número de los puntos fijos es congruente módulo $p$ al número de los elementos de $X$:*

$$|X| \equiv |X^G| \pmod{p}.$$

*Indicación: considere la ecuación de clase.*

**Ejercicio 9.4.** *Demuestre que si $G$ es un grupo finito de orden $p^2$, entonces $G$ es abeliano.*

**Ejercicio 9.5.** *Supongamos que un grupo finito $G$ actúa sobre un conjunto finito $X$. Para un elemento $g \in G$ denotemos por $X^g$ el conjunto de todos los puntos fijos por $g$:*

$$X^g := \{x \in X \mid g \cdot x = x\}.$$

*Demuestre que*

$$\sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{g \in G} |X^g|.$$

*Deduzca la siguiente identidad combinatoria*[*]*:*

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$$

*(en palabras: el número de órbitas es igual al número promedio de puntos fijos).*
*Indicación: use las biyecciones $O_x \cong G/G_x$.*

**Ejercicio 9.6.** *Verifique la descripción de las clases de conjugación en $A_5$ que vimos en clase.*

**Ejercicio 9.7.** *Encuentre las clases de conjugación en el grupo de cuaterniones $Q_8$.*

**Ejercicio 9.8.** *En este ejercicio encontraremos las clases de conjugación del grupo diédrico $D_n$.*

1) *Demuestre que cada rotación $r^i$ está conjugada con $r^{-i}$ y consigo misma.*

2) *Demuestre que la clase de conjugación de la reflexión $fr^i$ viene dada por las reflexiones $fr^{i-2j}$ para $j \in \mathbb{Z}$.*

3) *Termine la descripción de las clases de conjugación. (La respuesta depende de la paridad de $n$.)*

[*] Este identidad se conoce como el **lema de Burnside** y es muy común en combinatoria y matemáticas recreativas.

**Ejercicio 9.9.** *Hemos visto que* $\mathbb{P}^1(k) = \mathbb{A}^1(k) \sqcup \{\infty\}$.

1) *Demuestre que en general* $\mathbb{P}^n(k) = \mathbb{A}^n(k) \sqcup \mathbb{P}^{n-1}(k)$.

2) *Deduzca que* $\mathbb{P}^n(k) = \mathbb{A}^n(k) \sqcup \mathbb{A}^{n-1}(k) \sqcup \cdots \sqcup \mathbb{A}^0(k)$.

3) *Calcule el número de puntos en el espacio proyectivo* $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_p)$ *usando 2).*

4) *Calcule el mismo número a partir de la definición* $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_p) := (\mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{F}_p) \setminus \{\underline{0}\})/\mathbb{F}_p^\times$.

**Ejercicio 9.10.** *Describa la permutación de* $\{0, 1, 2, 3, 4, \infty\}$ *que corresponde a la acción de* $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ *sobre* $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_5)$.