Álgebra I: Teoría de Grupos
Hoja de ejercicios 9: Acciones

Universidad de El Salvador. Ciclo impar 2018

Por cualquier pregunta, no duden en contactarme por correo electrónico cadadr@gmail.com.

Ejercicio 9.1. *Consideremos la acción del grupo* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ *sobre* $\mathcal{H}$*. Demuestre que el estabilizador para el punto* $\sqrt{-1} \in \mathcal{H}$ *es el grupo*

$$\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \;\middle|\; 0 \le \phi < 2\pi \right\} = O_2(\mathbb{R}) \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}).$$

Ejercicio 9.2. *Demuestre que el núcleo de la acción de* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ *sobre* $\mathcal{H}$ *es el subgrupo* $Z(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})) = \{\pm I\}$*.*

Ejercicio 9.3. *Sea* p *un número primo y sea* X *un* G*-conjunto finito. Supongamos que para todo subgrupo* $H \subsetneq G$ *su índice es divisible por* p*:*

$$p \mid |G : H|.$$

Deduzca que el número de los puntos fijos es congruente módulo p *al número de los elementos de* X*:*

$$|X| \equiv |X^G| \pmod{p}.$$

Indicación: considere la ecuación de clase.

Ejercicio 9.4. *Demuestre que si* G *es un grupo finito de orden* p^2*, entonces* G *es abeliano.*

Ejercicio 9.5. *Supongamos que un grupo finito* G *actúa sobre un conjunto finito* X*. Para un elemento* $g \in G$ *denotemos por* X^g *el conjunto de todos los puntos fijos por* g*:*

$$X^g := \{x \in X \mid g \cdot x = x\}.$$

Demuestre que

$$\sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{g \in G} |X^g|.$$

Deduzca la siguiente identidad combinatoria[*]*:*

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$$

(en palabras: el número de órbitas es igual al número promedio de puntos fijos).
Indicación: use las biyecciones $O_x \cong G/G_x$*.*

Ejercicio 9.6. *Verifique la descripción de las clases de conjugación en* A_5 *que vimos en clase.*

[*]Este identidad se conoce como el **lema de Burnside** y es muy común en combinatoria y matemáticas recreativas.

Ejercicio 9.7. *Encuentre las clases de conjugación en el grupo de cuaterniones Q_8.*

Ejercicio 9.8. *En este ejercicio encontraremos las clases de conjugación del grupo diédrico D_n.*

1) *Demuestre que cada rotación r^i está conjugada con r^{-i} y consigo misma.*
2) *Demuestre que la clase de conjugación de la reflexión fr^i viene dada por las reflexiones fr^{i-2j} para $j \in \mathbb{Z}$.*
3) *Termine la descripción de las clases de conjugación. (La respuesta depende de la paridad de n.)*

Ejercicio 9.9. *Hemos visto que $\mathbb{P}^1(k) = \mathbb{A}^1(k) \sqcup \{\infty\}$.*

1) *Demuestre que en general $\mathbb{P}^n(k) = \mathbb{A}^n(k) \sqcup \mathbb{P}^{n-1}(k)$.*
2) *Deduzca que $\mathbb{P}^n(k) = \mathbb{A}^n(k) \sqcup \mathbb{A}^{n-1}(k) \sqcup \cdots \sqcup \mathbb{A}^0(k)$.*
3) *Calcule el número de puntos en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_p)$ usando 2).*
4) *Calcule el mismo número a partir de la definición $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_p) := (\mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{F}_p) \setminus \{\underline{0}\})/\mathbb{F}_p^\times$.*

Ejercicio 9.10. *Describa la permutación de $\{0, 1, 2, 3, 4, \infty\}$ que corresponde a la acción de $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ sobre $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_5)$.*