# Universidad de El Salvador. 29.09.2018
# Álgebra II. Examen parcial 1. Soluciones

---

**Problema 1** (2 puntos). Consideremos el anillo de los enteros de Gauss $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$.

1) Demuestre que el ideal $\mathfrak{m} := (1 + \sqrt{-1})$ es maximal. [1 *punto*]

2) Demuestre que $\mathfrak{m}^2 = (2)$. [1 *punto*]

*Solución.* Calculemos el cociente $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]/(1 + \sqrt{-1})$. Notemos que $\sqrt{-1} \equiv -1 \pmod{1 + \sqrt{-1}}$, así que todo elemento en el cociente puede ser representado por un número entero. Además,

$$2 = (1 + \sqrt{-1})\,(1 - \sqrt{-1}) \equiv 0 \pmod{1 + \sqrt{-1}},$$

entonces los elementos módulo $1 + \sqrt{-1}$ pueden ser representados por 0 y 1. El anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]/(1 + \sqrt{-1})$ tiene dos elementos y por ende es isomorfo a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, que es un cuerpo. Podemos concluir que $(1 + \sqrt{-1})$ es un ideal maximal.

(He aquí otro modo de verlo, usando la teoría que hemos desarrollado recientemente en la unidad 3. Hemos probado que $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ es un dominio Euclidiano, y en particular es un dominio de ideales principales (DIP). Considerando la norma $N(1 + \sqrt{-1}) = 2$, se ve que $1 + \sqrt{-1}$ es un elemento irreducible y por ende (ya que estamos en un DIP), es primo y genera un ideal primo. En fin, en un DIP los ideales maximales son los ideales primos no nulos. Por supuesto, no esperaba este argumento de ustedes, pero lo menciono para relacionar el problema con la nueva teoría.)

Ahora para ver que $\mathfrak{m}^2 = (2)$, recordemos que en general para ideales principales se tiene $(x)\,(y) = (xy)$. Entonces, el cuadrado del ideal $\mathfrak{m}$ es el ideal generado por $(1 + \sqrt{-1})^2 = 2\sqrt{-1}$. Puesto que $\sqrt{-1} \in \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]^\times$, tenemos $(2\sqrt{-1}) = (2)$. ■

**Problema 2** (2 puntos). Sea $R$ un anillo conmutativo no nulo.

1) Sea $R \supset \mathfrak{p}_0 \supseteq \mathfrak{p}_1 \supseteq \mathfrak{p}_2 \supseteq \cdots$ una cadena descendente de ideales primos. Demuestre que $\mathfrak{p} := \bigcap_i \mathfrak{p}_i$ es un ideal primo. [1 *punto*]

2) Deduzca del lema de Zorn que en $R$ existen **ideales primos minimales**; es decir, ideales primos $\mathfrak{p} \subset R$ tales que si $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$ para otro ideal primo $\mathfrak{q}$, entonces $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$. [1 *punto*]

*Solución.* Para una cadena

$$(*) \qquad R \supset \mathfrak{p}_0 \supseteq \mathfrak{p}_1 \supseteq \mathfrak{p}_2 \supseteq \cdots$$

notamos que puesto que cada $\mathfrak{p}_i$ es un ideal propio, la intersección $\mathfrak{p}$ también debe ser un ideal propio. Ahora supongamos que $xy \in \mathfrak{p}$. Esto quiere decir que $xy \in \mathfrak{p}_i$ para todo $i$. Asumamos que $x \notin \mathfrak{p}$. Esto significa que $x \notin \mathfrak{p}_n$ para algún $n$, y luego $x \notin \mathfrak{p}_i$ para todo $i \geq n$. Entonces, puesto que cada uno de los $\mathfrak{p}_i$ es un ideal primo, para todo $i \geq n$ se tiene $y \in \mathfrak{p}_i \subseteq \mathfrak{p}$.

La segunda parte es una aplicación típica del lema de Zorn. Nos conviene formularlo de la siguiente manera: si $\mathcal{P}$ es un conjunto parcialmente ordenado no vacío donde toda cadena *descendente* $x_0 \succeq x_1 \succeq x_2 \succeq \cdots$ tiene una cota *inferior*, entonces $\mathcal{P}$ posee un elemento *minimal*. (Ejercicio tauto-lógico: esto es equivalente a la forma habitual.)

Sea entonces $\mathcal{P}$ el conjunto de los ideales primos en $R$ parcialmente ordenado respecto a la inclusión. Dado que $R \neq 0$, en $R$ existe un ideal maximal (¡gracias al lema de Zorn!) que en particular es primo, así que $\mathcal{P} \neq \emptyset$. Por la primera parte, para una cadena (*) su cota inferior siempre existe: es $\bigcap_i \mathfrak{p}_i$. ■

**Problema 3** (2 puntos)**.** Sea $R$ un anillo conmutativo y $U \subseteq R$ un subconjunto multiplicativo.

1) Demuestre que $R[U^{-1}] = 0$ si y solo si $0 \in U$. [1 *punto*]

2) Demuestre que para un elemento $x \in R$ se tiene $R[x^{-1}] = 0$ si y solo si $x$ es un nilpotente. [1 *punto*]

*Solución.* Recordemos que un anillo es trivial si y solamente si $1 = 0$. En este caso, $R[U^{-1}]$ es trivial si y solamente si $\frac{1}{1} = \frac{0}{1}$; es decir, si existe $u \in U$ tal que

$$u\,(1 \cdot 1 - 0 \cdot 1) = 0.$$

Pero $u\,(1 \cdot 1 - 0 \cdot 1) = u$.

En la segunda parte, basta recordar que por la definición, $R[x^{-1}] = R[U^{-1}]$, donde $U := \{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$. Según la primera parte del problema, $R[x^{-1}] = 0$ si y solamente si $x^n = 0$ para algún $n = 1, 2, 3, \ldots$ ■

**Problema 4** (2 puntos)**.** Sea $R$ un anillo conmutativo y $U \subseteq R$ un subconjunto multiplicativo.

1) Para un ideal $I \subseteq R$ y un elemento $x \in R$ verifique que $(I : x) := \{r \in R \mid xr \in I\}$ es un ideal en $R$. [1 *punto*]

2) Demuestre que hay una biyección entre los ideales en la localización $R[U^{-1}]$ y los ideales en $R$ tales que $(I : u) = I$ para todo $u \in U$. [1 *punto*]

*Solución.* Verifiquemos que $(I : x)$ es un ideal. Tenemos $x \cdot 0 = 0 \in I$, así que $0 \in (I : x)$. Luego, si $r_1, r_2 \in (I : x)$, entonces $x \cdot r_1 \in I$ y $x \cdot r_2 \in I$, y por ende $x \cdot (r_1 + r_2) \in I$, puesto que $I$ es un ideal; es decir, $r_1 + r_2 \in (I : x)$. En fin, si $r \in (I : x)$ y $s$ es cualquier elemento del anillo, tenemos $x \cdot sr = s \cdot (xr) \in I$, dado que $I$ es un ideal.

Hemos probado en clase que hay una biyección

(*) $\{\text{ideales } J \subseteq R[U^{-1}]\} \longleftrightarrow \{\text{ideales } I \subseteq R \text{ tales que para cualesquiera } u \in U, r \in R \text{ se tiene } ur \in I \Rightarrow r \in I\}$.

Notamos que la inclusión $I \subseteq (I : x)$ siempre se cumple, puesto que $I$ es un ideal. Entonces, la condición en (*) es equivalente a $(I : u) = I$ para todo $u \in U$. ■

**Problema 5** (2 puntos)**.** Sea $R$ un anillo conmutativo y $U \subseteq R$ un subconjunto multiplicativo. Denotemos por $\phi\colon R \to R[U^{-1}]$ el homomorfismo canónico $r \mapsto \frac{r}{1}$.

1) Supongamos que para un ideal $J \subseteq R[U^{-1}]$ su preimagen $\phi^{-1}(J) \subseteq R$ está generada por algunos elementos $x_1, \ldots, x_n \in R$:

$$\phi^{-1}(J) = (x_1, \ldots, x_n).$$

Demuestre que $J = (\phi(x_1), \ldots, \phi(x_n))$. [1 *punto*]

2) Demuestre que si $R$ es un anillo noetheriano, entonces $R[U^{-1}]$ es también noetheriano. [1 *punto*]

*Solución.* Hemos probado en clase que para cualquier ideal $J \subseteq R[U^{-1}]$ se tiene

$$J = \phi^{-1}(J) R[U^{-1}] = \left\{ \frac{x}{u} \;\middle|\; x \in \phi^{-1}(J),\ u \in U \right\}.$$

Ahora si $\phi^{-1}(J) = (x_1, \ldots, x_n)$, entonces

$$J = \left\{ \frac{r_1\,x_1 + \cdots + r_n\,x_n}{u} \;\middle|\; r_1, \ldots, r_n \in R,\ u \in U \right\} = \left\{ \frac{r_1}{u_1}\,\frac{x_1}{1} + \cdots + \frac{r_n}{u_n}\,\frac{x_n}{1} \;\middle|\; \frac{r_1}{u_1}, \ldots, \frac{r_n}{u_n} \in R[U^{-1}] \right\}$$

(para ver la segunda igualdad, pase a un común denominador de las fracciones). Esto demuestra la primera parte. Gracias a este resultado podemos concluir que si todo ideal en $R$ es finitamente generado, entonces todo ideal en $R[U^{-1}]$ es finitamente generado. ■