Universidad de El Salvador. 27.10.2018
Álgebra II. Examen parcial 1 (repetido). Soluciones

Problema 1 (2 puntos)**.** Sea $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ el anillo de las funciones continuas $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con operaciones punto por punto.

1) ¿Es un dominio de integridad? Justifique su respuesta. [*1 punto*]

2) Para cualquier $x \in \mathbb{R}$ demuestre que

$$\mathfrak{m}_x := \{\text{funciones continuas } f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$$

es un ideal maximal en $\mathcal{C}(\mathbb{R})$. [*1 punto*]

Solución. El anillo $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ no es un dominio de integridad: es fácil encontrar dos funciones continuas $f, g \neq 0$ tales que $fg = 0$ (tome dos funciones lineales por partes con soporte disjunto). La aplicación

$$\mathrm{ev}_x\colon \mathcal{C}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto f(x)$$

es un homomorfismo sobreyectivo de anillos y su núcleo es precisamente $\mathfrak{m}_x$. Entonces, $\mathcal{C}(\mathbb{R})/\mathfrak{m}_x \cong \mathbb{R}$ y esto es un cuerpo. Note que este argumento es casi idéntico a la prueba que $(X - c)$ es un ideal maximal en el anillo de polinomios $k[X]$. ■

Problema 2 (2 puntos)**.**

1) Demuestre que para cualquier cuerpo k el anillo de polinomios $k[X]$ *no es* local. [*1 punto*]

2) Demuestre que el anillo de series de potencias $\mathbb{Z}[\![X]\!]$ *no es* local. [*1 punto*]

Solución. En el caso 1) bastaría notar que, por ejemplo, $\mathfrak{m} = (X - c)$ para diferentes $c \in k$ son diferentes ideales maximales. En efecto, si $(X - c_1) = (X - c_2) = \mathfrak{m}$ para $c_1 \neq c_2$, entonces $(X - c_1) - (X - c_2) = c_2 - c_1 \in \mathfrak{m}$. Esto contradice el hecho de que $c_2 - c_1 \neq 0$ es un elemento invertible.

De la misma manera, en el caso 2) se podía encontrar diferentes ideales maximales en $\mathbb{Z}[\![X]\!]$: para cualquier número primo p

$$\mathbb{Z}[\![X]\!]/(p, X) \cong \mathbb{F}_p$$

es un cuerpo, así que (p, X) es un ideal maximal en $\mathbb{Z}[\![X]\!]$. Para diferentes primos $p \neq q$ tenemos

$$\mathbb{Z}[\![X]\!]/(p, X) \not\cong \mathbb{Z}[\![X]\!]/(q, X),$$

así que hay una familia de diferentes ideales maximales.

También se podía recordar que un anillo es local si y solo si todos sus elementos no invertibles forman un ideal. En el anillo $k[X]$ los elementos no invertibles son

$$k[X] \setminus k[X]^\times = k[X] \setminus k^\times = \{f \in k[X] \mid \deg f > 0\} \cup \{0\}.$$

Esto no es un ideal: por ejemplo, los polinomios X y $-X + 1$ no son invertibles, pero su suma es invertible. De la misma manera,

$$\mathbb{Z}[\![X]\!] \setminus \mathbb{Z}[\![X]\!]^\times = \{f = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots \in \mathbb{Z}[\![X]\!] \mid a_0 \neq \pm 1\}$$

no es un ideal: por ejemplo, las series $f = 3 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots$ y $g = -2 + b_1 X + b_2 X^2 + \cdots$ no son invertibles, pero su suma $f + g = 1 + (a_1 + b_1) X + (a_2 + b_2) X^2 + \cdots$ es invertible. ■

Problema 3 (2 puntos)**.** Determine si el ideal generado por el polinomio $X^2 + 1$ es maximal en el anillo

$$\mathbb{R}[X], \quad \mathbb{C}[X], \quad \mathbb{Z}[X], \quad \mathbb{F}_2[X].$$

[$\frac{1}{2}$ *punto por cada respuesta correcta y justificada*]

Solución. Tenemos $\mathbb{R}[X]/(X^2+1) \cong \mathbb{C}$, lo que es un cuerpo, así que el ideal (X^2+1) es maximal en $\mathbb{R}[X]$.

En $\mathbb{C}[X]$, el ideal (X^2+1) no es primo (y en particular no es maximal): para $f = X + \sqrt{-1}$ y $g = X - \sqrt{-1}$ se tiene $fg \in (X^2+1)$, pero $f, g \notin (X^2+1)$ (ningún polinomio lineal pertenece a este ideal). De modo similar, en $\mathbb{F}_2[X]$ se tiene $X^2+1 = (X+1)^2$, así que el ideal no es primo: para $f = X+1$ se tiene $f^2 \in (X^2+1)$, aunque $f \notin (X^2+1)$.

En $\mathbb{Z}[X]$, el ideal (X^2+1) sí es primo, pero no es maximal. En efecto, tenemos $\mathbb{Z}[X]/(X^2+1) \cong \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$, lo que es un dominio de integridad, pero no es un cuerpo. ■

Problema 4 (2 puntos)**.** Sea R un anillo conmutativo. Denotemos por

$$N(R) := \{x \in R \mid x^n = 0 \text{ para algún } n = 1, 2, 3, \ldots\}$$

el nilradical. Demuestre que para todo subconjunto multiplicativo $U \subseteq R$ se tiene

$$N(R[U^{-1}]) = N(R)R[U^{-1}].$$

[1 *punto por cada una de las inclusiones "$\subseteq$" y "$\supseteq$"*]

Solución. Si $\frac{x}{u} \in N(R)R[U^{-1}]$, esto significa que $x^n = 0$ para algún n. Luego $\left(\frac{x}{u}\right)^n = \frac{x^n}{u^n} = \frac{0}{u^n} = \frac{0}{1}$, así que $\frac{x}{u} \in N(R[U^{-1}])$. Viceversa, si $\frac{x}{u} \in N(R[U^{-1}])$, entonces $\left(\frac{x}{u}\right)^n = \frac{x^n}{u^n} = \frac{0}{1} = 0$, lo que significa que $v\,x^n = 0$ para algún $v \in U$. Luego, $(vx)^n = v^n x^n = 0$. Escribiendo $\frac{x}{u} = \frac{vx}{uv}$, podemos concluir que $\frac{x}{u} \in N(R)\,R[U^{-1}]$. ■

Problema 5 (2 puntos)**.** Sean R un anillo conmutativo y $x \in R$ algún elemento no nulo.

1) Demuestre que $\operatorname{Ann}(x) := \{r \in R \mid rx = 0\}$ es un ideal propio en R. [1 *punto*]

2) Demuestre que existe un ideal maximal $\mathfrak{m} \subset R$ tal que $\frac{x}{1} \neq \frac{0}{1}$ en la localización $R_{\mathfrak{m}}$. [1 *punto*]

Solución. Es fácil comprobar que $\operatorname{Ann}(x)$ es un ideal y está claro que $1 \notin \operatorname{Ann}(x)$, dado que $x \neq 0$. Luego, el lema de Zorn nos garantiza que $\operatorname{Ann}(x) \subseteq \mathfrak{m}$ para algún ideal maximal $\mathfrak{m} \subset R$. Supongamos que $\frac{x}{1} = \frac{0}{1}$ en $R_{\mathfrak{m}}$. Esto significa que $ux = 0$ para algún $u \notin \mathfrak{m}$, lo que no es posible, puesto que todos los elementos que aniquilan a x pertenecen al ideal $\mathfrak{m}$. ■