Álgebra II. Hoja de ejercicios 4: Ideales primos y maximales. Localización
Universidad de El Salvador, ciclo par 2018

Por cualquier pregunta, no duden en escribir al grupo ues-algebra-2@googlegroups.com.

Ideales primos y maximales

Ejercicio 12.1. *Sea R un anillo conmutativo y sea $\mathfrak{p} \subset R$ un ideal primo. Demuestre que si $x^n \in \mathfrak{p}$ para algún $x \in R$ y $n = 1, 2, 3, \ldots$, entonces $x \in \mathfrak{p}$.*

Ejercicio 12.2. *Sea $f\colon R \to S$ un homomorfismo de anillos conmutativos. Para un ideal primo $\mathfrak{p} \subset S$ verifique directamente que $f^{-1}(\mathfrak{p})$ es un ideal primo en R.*

Ejercicio 12.3. *Sea R un anillo conmutativo y sea $\mathfrak{p} \subset R$ un ideal primo.*

1) *Demuestre que para dos ideales $I, J \subseteq R$, si $IJ \subseteq \mathfrak{p}$, entonces $I \subseteq \mathfrak{p}$ o $J \subseteq \mathfrak{p}$.*

2) *Demuestre que si para un ideal $I \subseteq R$ se tiene $I^n \subseteq \mathfrak{p}$ para algún $n = 1, 2, 3, \ldots$, entonces $I \subseteq \mathfrak{p}$.*

Ejercicio 12.4. *Sea R un anillo conmutativo. Para un subconjunto $S \subseteq R$ sea $V(S)$ el conjunto de los ideales primos que contienen a S:*

$$V(S) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid \mathfrak{p} \supseteq S\}.$$

1) *Demuestre que para $S_1 \subseteq S_2 \subseteq R$ se tiene $V(S_2) \subseteq V(S_1)$.*

2) *Demuestre que $V(S) = V(I)$ donde $I = (S)$ es el ideal generado por S.*

3) *Demuestre que $V(0) = \operatorname{Spec} R$ y $V(1) = \emptyset$.*

4) *Demuestre que $V(I) \cup V(J) = V(IJ)$ para ideales $I, J \subseteq R$.*

5) *Demuestre que $\bigcap_k V(I_k) = V(\sum_k I_k)$ para ideales $I_k \subseteq R$.*

Ejercicio 12.5. *Sean R y S anillos conmutativos. Consideremos el producto $R \times S$ con las proyecciones canónicas*

$$\begin{array}{ccccc} R & \xleftarrow{\pi_1} & R \times S & \xrightarrow{\pi_2} & S \\ r & \longleftarrow & (r,s) & \longmapsto & s \end{array}$$

1) *Si $\mathfrak{p} \subset R$ y $\mathfrak{q} \subset S$ son ideales primos, demuestre que*
$$\mathfrak{p} \times S := \pi_1^{-1}(\mathfrak{p}) = \{(x,s) \mid x \in \mathfrak{p},\ s \in S\}, \quad R \times \mathfrak{q} = \pi_2^{-1}(\mathfrak{q}) := \{(r,y) \mid r \in R,\ y \in \mathfrak{q}\}$$
son ideales primos en el producto $R \times S$.

2) *Demuestre que si $\mathfrak{P} \subset R \times S$ es un ideal primo, entonces $\mathfrak{P}$ es de la forma $\mathfrak{p} \times S$ o $R \times \mathfrak{q}$ como en 1).*
Indicación: para $e_1 := (1_R, 0_S)$ y $e_2 := (0_R, 1_S)$ note que $e_1 e_2 \in \mathfrak{P}$, así que $e_1 \in \mathfrak{P}$ o $e_2 \in \mathfrak{P}$.

Ensto nos da una biyección natural $\operatorname{Spec}(R \times S) \cong \operatorname{Spec} R \sqcup \operatorname{Spec} S$.

Ejercicio 12.6. *Sea R un anillo conmutativo. Sea $U \subset R$ un subconjunto no vacío tal que $0 \notin U$ y si $x, y \in U$, entonces $xy \in U$.*

1) *Deduzca del lema de Zorn que existe un ideal $\mathfrak{p} \subset R$ que satisface las siguientes propiedades:*
   - *$U \cap \mathfrak{p} = \emptyset$,*
   - *Si $\mathfrak{p} \subseteq I$ para otro ideal I que satisface $U \cap I = \emptyset$, entonces $I = \mathfrak{p}$.*

2) *Demuestre que $\mathfrak{p}$ es un ideal primo.*

Indicación: basta revisar y entender nuestra prueba de que $N(R) = \bigcap_{\mathfrak{p} \subset R \text{ primo}} \mathfrak{p}$.

Localización

Ejercicio 12.7. *En el cuerpo de las series de Laurent $\mathbb{Q}((X))$, encuentre el elemento inverso de $X - X^2$.*

Ejercicio 12.8. *Describa los cuerpos de fracciones $K(R)$ para los anillos $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-1}], \mathbb{Z}[\sqrt{5}], \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.*

Ejercicio 12.9. *Sea $R \times S$ un producto de anillos conmutativos no nulos. Consideremos $e := (1,0)$. Demuestre que $(R \times S)[e^{-1}] \cong R$.*

Ejercicio 12.10. *Consideremos el anillo finito $R = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ donde $n = p_1^{k_1} \cdots p_s^{k_s}$.*

1) *Demuestre que los ideales maximales en R son $\mathfrak{m}_i = p_i\,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ para $i = 1, \ldots, s$.*
2) *Demuestre que $R \cong R_{\mathfrak{m}_1} \times \cdots \times R_{\mathfrak{m}_s}$.*

Ejercicio 12.11 (*). *Supongamos que $\psi\colon R \to S$ es un homomorfismo de anillos que satisface la misma propiedad universal que el homomorfismo de localización $\phi\colon R \to R[U^{-1}]$:*

1) *para todo $u \in U$ el elemento $\psi(u)$ es invertible en S;*
2) *si S' es otro anillo junto con un homomorfismo $f\colon R \to S'$ tal que $f(u)$ es invertible en S' para todo $u \in U$, entonces f se factoriza de modo único por ψ:*

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\psi"'] & S' \\ S \arrow[ur, dashed, "\exists!\widetilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Demuestre que existe un isomorfismo único $R[U^{-1}] \to S$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\phi"'] & S \\ R[U^{-1}] \arrow[ur, dashed, "\cong", "\exists!"'] & \end{tikzcd}$$

(Aplique la propiedad universal de ϕ a ψ y luego la propiedad universal de ψ a ϕ.)