

Álgebra II. Hoja de ejercicios 7: Aritmética II

Universidad de El Salvador, ciclo par 2018

Por cualquier pregunta, no duden en escribir al grupo ues-algebra-2@googlegroups.com.

Ejercicio 13.10. Sea $p = 2, 3, 5, 7, \dots$ un número primo y $k = 1, 2, 3, 4, \dots$. Calcule que

$$v_p \left(\binom{p^k}{n} \right) = k - v_p(n) \quad \text{para todo } n = 1, 2, \dots, p^k.$$

Indicación: calcule las valuaciones p -ádicas de ambos lados de la identidad

$$n! \binom{p^k}{n} = p^k (p^k - 1) (p^k - 2) \cdots (p^k - n + 1).$$

Note que $v_p(p^k - a) = v_p(a)$ para todo $a = 1, 2, \dots, p^k - 1$

Ejercicio 13.11 (Fórmula de Legendre). Demuestre que para todo primo p y todo número natural n se tiene

$$v_p(n!) = \sum_{i \geq 1} \lfloor n/p^i \rfloor.$$

En particular, calcule $v_2(100!)$.

Ejercicio 13.12 (Normas p -ádicas). Sea R un dominio de factorización única y $p \in R$ un elemento primo. Fijemos un número real $0 < \rho < 1$ y pongamos para todo $x \in R$

$$|x|_p := \rho^{v_p(x)}.$$

Demuestre que $|\cdot|_p$ cumple las siguientes propiedades.

N1) $|x|_p = 0$ si y solo si $x = 0$.

N2) $|xy|_p = |x|_p \cdot |y|_p$.

N3) $|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$, y se cumple la igualdad si $|x|_p \neq |y|_p$.

Ejercicio 13.13. Compile una lista de los polinomios cuadráticos irreducibles en $\mathbb{F}_3[X]$.

Ejercicio 13.14. Sean k un cuerpo y $f \in k[X]$ un polinomio de grado 2 o 3. Demuestre que f es irreducible en $k[X]$ si y solo si f no tiene raíces en k .

Ejercicio 13.15. Consideremos el polinomio $f := X^3 + 2X + 1 \in \mathbb{Z}[X]$.

1) Demuestre que $\bar{f} \in \mathbb{F}_2[X]$ es reducible.

2) Demuestre que $\bar{f} \in \mathbb{F}_3[X]$ es irreducible.

Indicación: use el ejercicio anterior.

3) Demuestre que f es irreducible en $\mathbb{Z}[X]$.