Álgebra II. Hoja de ejercicios 9: Cuerpos (continuación)
Universidad de El Salvador, ciclo par 2018

Por cualquier pregunta, no duden en escribir al grupo ues-algebra-2@googlegroups.com.

Ejercicio 14.4. *Sea n un número entero. Encuentre el polinomio mínimo sobre $\mathbb{Q}$ para $n + \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$.*

Ejercicio 14.5. *Para una extensión L/K y un elemento algebraico $\alpha \in L$ asumamos que el grado $[K(\alpha) : K]$ es impar. Demuestre que $K(\alpha) = K(\alpha^2)$.*

Ejercicio 14.6. *Para $p = 2, 3$ demuestre que el polinomio $X^3 - p$ es irreducible en $K[X]$ donde $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$. Sugerencia: considere la extensión $\mathbb{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt[3]{p})/\mathbb{Q}$.*

Ejercicio 14.7. *Sean $m, n \in \mathbb{Z}$ dos números enteros tales que $\sqrt{m}, \sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$. Consideremos $\alpha := \sqrt{m} + \sqrt{n} \in \mathbb{C}$.*

1) *Demuestre que $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{n})$.*

2) *Para*
$$\alpha_1 := \alpha, \quad \alpha_2 := -\sqrt{m} + \sqrt{n}, \quad \alpha_3 := -\alpha_1, \quad \alpha_4 := -\alpha_2,$$
demuestre que el polinomio $f := (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)(X - \alpha_3)(X - \alpha_4)$ tiene coeficientes enteros.

3) *Demuestre que si $\sqrt{mn} \notin \mathbb{Q}$, entonces f es el polinomio mínimo de α sobre $\mathbb{Q}$.*

4) *Demuestre que si $\sqrt{mn} \in \mathbb{Q}$, entonces $\mathbb{Q}(\sqrt{m}) = \mathbb{Q}(\sqrt{n})$.*

Cuerpos ciclotómicos

Ejercicio 14.8. *Demuestre que si $m > 1$ es impar, entonces $\Phi_{2m} = \Phi_m(-X)$.*
Sugerencia: compare las expresiones
$$\prod_{d \mid 2m} \Phi_d = X^{2m} - 1 = (X^m - 1)(X^m + 1) = -(X^m - 1)((-X)^m - 1) = -\prod_{d \mid m} \Phi_d(X)\,\Phi_d(-X)$$
usando inducción sobre m.

Ejercicio 14.9. *Encuentre un par de cuerpos ciclotómicos $\mathbb{Q}(\zeta_m)$ y $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ tales que $[\mathbb{Q}(\zeta_m) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\zeta_n) : \mathbb{Q}]$ pero $\mathbb{Q}(\zeta_m) \not\cong \mathbb{Q}(\zeta_n)$.*

Ejercicio 14.10. *Demuestre que toda extensión finita $K/\mathbb{Q}$ contiene un número finito de raíces de la unidad.*

Ejercicio 14.11. *Denotemos por $\mathbb{Q}(\zeta_\infty) = \mathbb{Q}(\zeta_3, \zeta_4, \zeta_5, \zeta_6, \ldots)$ la extensión de $\mathbb{Q}$ generada por todas las raíces de la unidad. Demuestre que $\mathbb{Q}(\zeta_\infty) = \bigcup_{n \ge 1} \mathbb{Q}(\zeta_n)$.*

Derivadas formales

Ejercicio 14.12. *Sea R un anillo conmutativo. Para una serie de potencias $f = \sum_{n \ge 0} a_n X^n \in R[\![X]\!]$ definamos su* ***derivada formal*** *como la serie*
$$f' := \sum_{n \ge 1} n\, a_n\, X^{n-1}.$$
Demuestre que para cualesquiera $f, g \in R[\![X]\!]$ se cumple
$$(f + g)' = f' + g', \quad (fg)' = f'g + fg'.$$

La traza, norma y el polinomio característico

Ejercicio 14.15. *Consideremos la extensión ciclotómica* $\mathbb{Q}(\zeta_3)/\mathbb{Q}$.

1) *Usando la base* $1, \zeta_3$, *calcule el polinomio característico para un elemento* $\alpha := a + b\,\zeta_3$, *donde* $a, b \in \mathbb{Q}$.

2) *Note que* $\mathbb{Q}(\zeta_3) = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$. *Verifique que el resultado de 1) coincide con el cálculo para las extensiones cuadráticas que hicimos en clase.*

Ejercicio 14.16. *Demuestre que* $1 + \sqrt[3]{2}$ *no es una* n*-ésima potencia en* $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ *para ningún* $n = 2, 3, 4, \ldots$

Ejercicio 14.17. *Consideremos* $\alpha := \zeta_5 + \zeta_5^2$, *donde* $\zeta_5 := e^{2\pi\sqrt{-1}/5}$.

1) *Calcule el polinomio característico de* α *respecto a la extensión ciclotómica* $\mathbb{Q}(\zeta_5)/\mathbb{Q}$.

2) *Demuestre que* $\mathbb{Q}(\zeta_5) = \mathbb{Q}(\alpha)$ *y el polinomio obtenido es el polinomio mínimo de* α.