Álgebra I: Estructuras algebraicas y la teoría de grupos
Examen parcial 2. Soluciones

Universidad de El Salvador, 22.05.2018

Problema 1 (1 punto)**.** Determine todos los subgrupos del grupo $\mu_{12}(\mathbb{C}) := \{z \in \mathbb{C} \mid z^{12} = 1\}$.

Solución. El grupo $\mu_{12}(\mathbb{C})$ es cíclico, generado por $\zeta = e^{2\pi i/12}$. Según la teoría general, todos los subgrupos de $\mu_{12}(\mathbb{C})$ son también cíclicos, y son precisamente los subgrupos generados por ζ^d para $d \mid 12$. Los divisores de 12 son $d = 1, 2, 3, 4, 6, 12$. Tenemos entonces los siguientes subgrupos:

$$\begin{aligned}
\langle 1 \rangle &= \{1\}, \\
\langle \zeta \rangle &= \mu_{12}(\mathbb{C}), \\
\langle \zeta^2 \rangle &= \{1, \zeta^2, \zeta^4, \zeta^6, \zeta^8, \zeta^{10}\} = \mu_6(\mathbb{C}), \\
\langle \zeta^3 \rangle &= \{1, \zeta^3, \zeta^6, \zeta^9\} = \{\pm 1, \pm\sqrt{-1}\} = \mu_4(\mathbb{C}), \\
\langle \zeta^4 \rangle &= \{1, \zeta^4, \zeta^8\} = \mu_3(\mathbb{C}), \\
\langle \zeta^6 \rangle &= \{1, \zeta^6\} = \{\pm 1\} = \mu_2(\mathbb{C}).
\end{aligned}$$

■

Problema 2 (1 punto)**.** Demuestre que las siguientes matrices pertenecen al grupo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ y encuentre sus órdenes correspondientes:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solución. El determinante de cada una de estas matrices es igual a 1, así que son elementos de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Para la primera matriz, calculamos

$$\begin{gathered}
A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I, \\
A^4 = -A, \quad A^5 = -A^2, \quad A^6 = -A^3 = I.
\end{gathered}$$

Podemos concluir que el orden de A es igual a 6. Para la segunda matriz, consideremos

$$B' := -B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notemos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a+b & 1 \end{pmatrix}.$$

De esta fórmula se sigue por inducción que para $n \in \mathbb{Z}$

$$(B')^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$$

y luego

$$B^n = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}.$$

Podemos concluir que la matriz B tiene orden infinito. ■

Problema 3 (2 puntos)**.** Demuestre que el subgrupo de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ generado por las matrices

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

es isomorfo al grupo diédrico $D_4 = \{\mathrm{id}, r, r^2, r^3, f, fr, fr^2, fr^3\}$.

Solución. La matriz A es la reflexión respecto al eje x:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

y la matriz B es la matriz estándar de rotación de $3\pi/2$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(3\pi/2) & -\operatorname{sen}(3\pi/2) \\ \operatorname{sen}(3\pi/2) & \cos(3\pi/2) \end{pmatrix}.$$

Las aplicaciones $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que corresponden a B^3 (la rotación de $\pi/2$) y A son precisamente r y f, los generadores habituales de D_4. ■

Problema 4 (2 puntos)**.** Sea n un número entero positivo. Consideremos el anillo

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-n}] := \{a + b\sqrt{-n} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Calcule el grupo de unidades correspondiente $\mathbb{Z}[\sqrt{-n}]^\times$ para todo $n = 1, 2, 3, \ldots$
Indicación: defina la aplicación de la norma $N\colon \mathbb{Z}[\sqrt{-n}] \to \mathbb{Z}$. El caso de $n = 1$ fue considerado en clase y no hace falta repetir el cálculo.

Solución. Para $n = 1$ ya sabemos la respuesta: tenemos

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]^\times = \{\pm 1, \pm\sqrt{-1}\}.$$

Para $n > 1$, de nuevo podemos considerar la aplicación de norma

$$\begin{gathered} N\colon \mathbb{Z}[\sqrt{-n}] \to \mathbb{Z}, \\ x = a + b\sqrt{-n} \mapsto x\,\overline{x} = a^2 + n\,b^2. \end{gathered}$$

La norma es multiplicativa ($N(xy) = N(x)\,N(y)$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{-n}]$), lo que implica que para todo $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{-n}]^\times$ se tiene $N(x) = 1$. Sin embargo, si $n > 1$, las únicas soluciones enteras de la ecuación $a^2 + n\,b^2 = 1$ son $(a, b) = (\pm 1, 0)$, y podemos concluir que en $\mathbb{Z}[\sqrt{-n}]$ no hay unidades excepto ± 1:

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-n}]^\times = \{\pm 1\} \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots$$

■

Problema 5 (2 puntos)**.** Consideremos $M_n(R)$, el anillo de matrices de $n \times n$ con coeficientes en un anillo conmutativo R. Sea

$$N = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1,n-2} & x_{1,n-1} & x_{1n} \\ 0 & 0 & x_{23} & \cdots & x_{2,n-2} & x_{2,n-1} & x_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{3,n-2} & x_{3,n-1} & x_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_{n-2,n-1} & x_{n-2,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & x_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

una matriz triangular superior con ceros en la diagonal. Demuestre que N es nilpotente en $M_n(R)$. (Indicación: use la inducción sobre n.)

Solución. Vamos a ver que $N^n = 0$. Usemos la inducción sobre n. La base de inducción es el caso de $n = 2$ donde

$$\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para el paso inductivo, supongamos que el resultado se cumple para las matrices de $n \times n$. Vamos a deducirlo para las matrices de $(n+1) \times (n+1)$. Consideremos una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} N & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde N es una matriz triangular de $n \times n$ con ceros en la diagonal y v es algún vector columna de n elementos. Luego, para todo k se cumple

$$\begin{pmatrix} N & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} N^k & N^{k-1}\,v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En efecto, es cierto para $k = 1$, y luego si esto se cumple para k, entonces

$$\begin{pmatrix} N & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} N^k & N^{k-1}\,v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} N & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N^{k+1} & N^k\,v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En particular, para $k = n + 1$ tenemos

$$\begin{pmatrix} N & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} N^{n+1} & N^n\,v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \cdot v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

puesto que $N^n = 0$ por la hipótesis de inducción. ∎

Problema 6 (2 puntos)**.** Consideremos $\mathbb{Q}$, el grupo de los números racionales respecto a la adición. Demuestre que todo subgrupo finitamente generado de $\mathbb{Q}$ es cíclico.

Solución. Todo subgrupo finitamente generado es de la forma

$$(*) \qquad \left\langle \frac{a_1}{b_1}, \ldots, \frac{a_k}{b_k} \right\rangle = \left\{ n_1\,\frac{a_1}{b_1} + \cdots + n_k\,\frac{a_k}{b_k} \;\middle|\; n_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Notamos que este es un subgrupo de

$$\left\langle \frac{1}{b_1 \cdots b_k} \right\rangle = \left\{ \frac{a}{b_1 \cdots b_k} \;\middle|\; a \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Siendo un subgrupo de un grupo cíclico, (*) es también cíclico. ∎