

# Curso de Álgebra

Alexey Beshenov  
Universidad de El Salvador  
2018



# Introducción

Álgebra.

1. Parte de las matemáticas en la cual las operaciones aritméticas son generalizadas empleando números, letras y signos.
2. Arte de restituir a su lugar los huesos dislocados.

---

Diccionario de la Real Academia Española

Argent, machinisme, algèbre. Les trois monstres de la civilisation actuelle. Analogie complète. L'algèbre et l'argent sont essentiellement niveleurs, la première intellectuellement, l'autre effectivement.

<...>

Il n'y a point de pensée collective. En revanche, notre science est collective comme notre technique. Spécialisation. On hérite non seulement de résultats, mais encore de méthodes qu'on ne comprend pas. Au reste les deux sont inséparables, car les résultats de l'algèbre fournissent des méthodes aux autres sciences.

---

Simone Weil, "La pesanteur et la grâce"

Estos son mis apuntes para las clases de álgebra que estoy dando en la Universidad de El Salvador en el año académico 2018. La selección del material es bastante modesta y típica, pero al mismo tiempo refleja mis gustos personales.

El nombre oficial del curso es "Álgebra moderna", pero esta es una expresión bastante anticuada: su origen es el libro de texto "Moderne Algebra" publicado en alemán en 1930–1931 por el matemático holandés B.L. van der Waerden, que a su vez se basaba en los cursos compartidos en 1924–1926 por Emil Artin y Emmy Noether, los pioneros del álgebra moderna. Aunque la influencia de van der Waerden todavía se percibe en la enseñanza de la materia, el mismo autor nombró las subsiguientes ediciones de su libro simplemente "Álgebra". Creo que en el siglo XXI no es necesario decorar la palabra "álgebra" por ningún epíteto ("abstracta", "moderna", etc.).

---

Considero conveniente explicar los prerrequisitos asumidos. Actualmente en San Salvador álgebra es una materia del cuarto año de licenciatura, y la preceden cursos de la teoría de números elemental y álgebra lineal. Por esto mis lecciones asumen un conocimiento de dichas materias y un cierto nivel de madurez matemática por parte del lector. Por otro lado, he tratado de enfatizar desde el principio el punto de vista categórico, usando diagramas conmutativos y propiedades universales.

Ahora voy a describir brevemente los contenidos del curso.

La parte I contiene una breve introducción a las estructuras algebraicas básicas: grupos, anillos y cuerpos. Allí se encuentran principalmente ejemplos y la teoría más sistemática se pospone para el resto del curso.

En particular, la parte II está dedicada a la teoría de grupos: se definen las nociones y construcciones fundamentales como homomorfismos, generadores de grupos, grupos cociente, abelianización, acciones sobre conjuntos y productos.

Todavía falta la segunda mitad del curso que se desarrollará en el segundo semestre del año 2018. Los posibles temas son

- las representaciones lineales de grupos finitos;
- la teoría de anillos (homomorfismos, ideales, anillos cociente);
- la teoría de cuerpos básica (en particular, la construcción de los cuerpos finitos  $\mathbb{F}_q$  y la cerradura algebraica);
- el lado aritmético de la teoría de anillos: dominios euclidianos, dominios de ideales principales, dominios de factorización única, anillos de valuación discreta, y posiblemente un par de palabras sobre los dominios de Dedekind;
- cuerpos de fracciones y localización;
- $R$ -módulos y álgebra multilineal.

Las categorías probablemente aparecerán de modo explícito en un apéndice. Una omisión importante es la teoría de Galois, pero en San Salvador esta normalmente forma un curso separado; lo mismo aplica al álgebra conmutativa. Estos apuntes (y en particular esta breve introducción) serán expandidos y redactados durante el curso. Favor de enviar sus comentarios a [cadadr@gmail.com](mailto:cadadr@gmail.com).

La página oficial del curso es <http://cadadr.org/san-salvador/2018-algebra/> Allí se podrá encontrar la versión más reciente de este documento.

## Ejercicios

Todos los capítulos de estos apuntes, salvo el capítulo 0, contienen ejercicios. La mayoría son bastante típicos y no deberían de ser demasiado difíciles. El lector tiene que *intentar* resolverlos todos.

---

## Notación

Vamos a usar la notación estándar, adoptada por Bourbaki. Por ejemplo,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

denota los números naturales, enteros, racionales, reales y complejos respectivamente. El número 0 es también natural. La unidad imaginaria se denotará por  $\sqrt{-1}$ .

## Agradecimientos

Agradezco al Ministerio de educación de El Salvador por financiar mi estancia y personalmente al ministro Ing. CARLOS MAURICIO CANJURA LINARES; al Director de la Escuela de Matemática de la Universidad de El Salvador JOSÉ NERYS FUNES TORRES y al director del Programa “Jovenes Talento” Prof. ERNESTO AMÉRICO HIDALGO CASTELLANOS. Dr. RIQUELMI SALVADOR CARDONA FUENTES participó en la organización de este curso y dio las primeras lecciones.

GABRIEL CHICAS REYES y JOSÉ IBRAHIM VILLANUEVA GUTIÉRREZ leyeron una versión preliminar de estos apuntes e hicieron varios comentarios útiles. Gabriel me brindó una ayuda inestimable con la redacción de este texto.

Finalmente, agradezco a todos los alumnos de la universidad de El Salvador que han asistido a mis clases.

# Índice general

<b>I</b>	<b>Primer encuentro con estructuras algebraicas</b>	<b>1</b>
<b>0</b>	<b>Conjuntos</b>	<b>3</b>
0.1	Aplicaciones entre conjuntos .....	4
0.2	Aplicaciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas .....	7
0.3	Caracterización de $\emptyset$ y $\{\bullet\}$ .....	10
0.4	Diagramas conmutativos .....	10
0.5	Caracterización de productos y coproductos .....	11
0.6	Propiedades universales .....	14
0.7	Relaciones de equivalencia .....	16
<b>1</b>	<b>Permutaciones</b>	<b>21</b>
1.1	El grupo simétrico $S_n$ .....	22
1.2	Permutaciones cíclicas .....	24
1.3	Signo y el grupo alternante $A_n$ .....	30
1.4	Ejercicios .....	35
<b>2</b>	<b>Grupos</b>	<b>37</b>
2.1	Definición de grupos abstractos .....	37
2.2	Algunas observaciones respecto a los axiomas de grupos .....	38
2.3	Grupos diédricos .....	41
2.4	Grupo de cuaterniones .....	44
2.5	Subgrupos .....	45
2.6	El centro .....	48
2.7	Ejercicios .....	50
<b>3</b>	<b>Anillos y cuerpos</b>	<b>53</b>
3.1	Anillos .....	53
3.2	Anillo de matrices $M_n(R)$ .....	57
3.3	Cuerpos .....	59
3.4	Anillo de polinomios $R[X]$ .....	61
3.5	¿Para qué sirven los anillos? .....	66
3.6	Espacios vectoriales .....	66
3.7	Ejercicios .....	69

<b>4</b>	<b>Grupos de unidades</b>	<b>71</b>
4.1	El grupo de unidades de un anillo .....	71
4.2	El círculo y las raíces de la unidad .....	72
4.3	Los restos módulo $n$ invertibles .....	74
4.4	Unidades en anillos aritméticos .....	76
4.5	Polinomios invertibles.....	79
4.6	El grupo lineal general.....	80
4.7	Ejercicios.....	84
<b>II</b>	<b>Teoría de grupos</b>	<b>87</b>
<b>5</b>	<b>Homomorfismos</b>	<b>89</b>
5.1	Ejemplos de homomorfismos .....	89
5.2	Propiedades básicas de homomorfismos.....	96
5.3	Mono, epi, iso.....	97
5.4	Imágenes .....	101
5.5	Núcleos.....	103
5.6	Caracterización de mono, epi, iso.....	105
5.7	Ejercicios.....	107
<b>6</b>	<b>Generadores</b>	<b>109</b>
6.1	Subgrupos generados.....	109
6.2	Orden de un elemento .....	112
6.3	Grupos cíclicos .....	115
6.4	Ejercicios.....	119
<b>7</b>	<b>Clases laterales</b>	<b>121</b>
7.1	Clases laterales .....	121
7.2	Teorema de Lagrange y sus consecuencias .....	125
7.3	Subgrupos normales .....	132
7.4	Grupos cociente .....	135
7.5	Grupos simples .....	138
7.6	Primer teorema de isomorfía .....	141
7.7	Ejercicios.....	144
<b>8</b>	<b>Conmutadores y abelianización</b>	<b>147</b>
8.1	El subgrupo conmutador $[G, G]$ .....	147
8.2	Algunos cálculos de $[G, G]$ .....	148
8.3	Abelianización.....	155
8.4	Ejercicios.....	158
<b>9</b>	<b>Acciones de grupos</b>	<b>159</b>
9.1	Definiciones y primeros ejemplos.....	159
9.2	Órbitas y estabilizadores .....	164
9.3	Acción de $G$ sobre sí mismo por multiplicación .....	167

## ÍNDICE GENERAL

---

9.4	Acción de $G$ sobre sí mismo por conjugación .....	169
9.5	Isomorfismos excepcionales: $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_3)$ y $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ .....	171
9.6	Ejercicios.....	174
<b>10</b>	<b>Productos de grupos</b> .....	<b>177</b>
10.1	Productos directos .....	177
10.2	Productos semidirectos.....	183
10.3	Sucesiones exactas cortas y extensiones .....	186
10.4	Grupos abelianos finitamente generados .....	192
10.5	Perspectiva: el grupo de Mordell–Weil .....	197
10.6	Ejercicios.....	201
<b>A</b>	<b>Divisibilidad en <math>\mathbb{Z}</math></b> .....	<b>205</b>
A.0	Subgrupos de $\mathbb{Z}$ .....	205
A.1	División con resto .....	206
A.2	Divisibilidad y los números primos .....	207
A.3	El máximo común divisor .....	208
A.4	El mínimo común múltiplo.....	210
A.5	El teorema fundamental de la aritmética .....	212
A.6	Generalizaciones .....	214
	<b>Bibliografía</b> .....	<b>215</b>
	<b>Índice de símbolos</b> .....	<b>218</b>
	<b>Índice alfabético de términos</b> .....	<b>221</b>



**Parte I**  
**Primer encuentro con estructuras  
algebraicas**

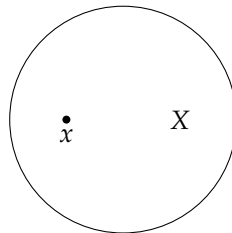


# Capítulo 0

## Conjuntos

Asumo que el lector conozca algunas bases de la teoría de conjuntos elemental. En este capítulo vamos a revisar ciertas propiedades de aplicaciones entre conjuntos. Primero recordemos la notación.

- La cardinalidad de un conjunto  $X$  se denota por  $|X|$ . Vamos a usar esta notación para conjuntos finitos, es decir cuando  $|X|$  corresponde a un número natural.
- Si un elemento  $x$  pertenece a un conjunto  $X$ , se escribe " $x \in X$ " o a veces " $X \ni x$ ".

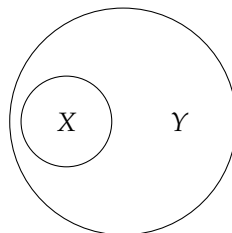


- El **conjunto vacío** se denota por  $\emptyset$ . Es el conjunto que no tiene ningún elemento:

$$|\emptyset| = 0.$$

- Si un conjunto  $X$  está contenido en un conjunto  $Y$ , se escribe " $X \subseteq Y$ " o " $Y \supseteq X$ ":

$$x \in X \Rightarrow x \in Y.$$



## 0.1. APLICACIONES ENTRE CONJUNTOS

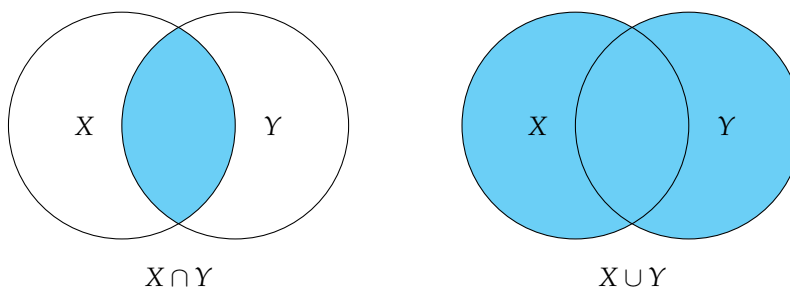
---

A veces para subrayar que  $X$  está contenido en  $Y$ , pero  $X \neq Y$ , se escribe " $X \subsetneq Y$ " o " $Y \supsetneq X$ ".

- La **intersección** y **unión** de dos conjuntos  $X$  y  $Y$  se denotan por " $X \cap Y$ " y " $X \cup Y$ " respectivamente:

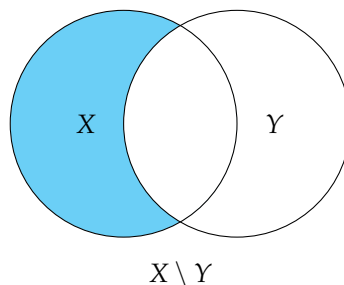
$$X \cap Y := \{z \mid z \in X \text{ y } z \in Y\},$$

$$X \cup Y := \{z \mid z \in X \text{ o } z \in Y\}.$$



- La **diferencia** entre dos conjuntos  $X$  e  $Y$  se denota por " $X \setminus Y$ ":

$$X \setminus Y := \{x \in X \mid x \notin Y\}.$$

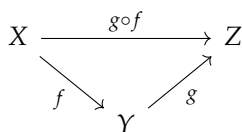


## 0.1 Aplicaciones entre conjuntos

**0.1.1. Definición.** Para dos aplicaciones  $f: X \rightarrow Y$  e  $g: Y \rightarrow Z$  la composición  $g \circ f: X \rightarrow Z$  es la aplicación definida por

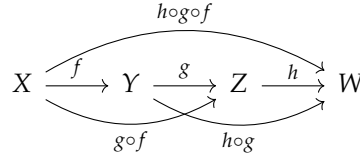
$$(g \circ f)(x) := g(f(x)).$$

Esta información puede representarse mediante un "diagrama conmutativo":



**0.1.2. Observación.** La composición es **asociativa**: para  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow Z$ ,  $h: Z \rightarrow W$  tenemos

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$



**0.1.3. Corolario (Asociatividad generalizada).** Para  $n$  aplicaciones

$$X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} \dots \rightarrow X_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} X_n \xrightarrow{f_n} X_{n+1}$$

Toda manera de poner los paréntesis en la expresión

$$f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_2 \circ f_1$$

(es decir, de calcular la composición) da el mismo resultado.

**0.1.4. Ejemplo.** Para  $n = 3$ , tenemos dos posibilidades:

$$(f_3 \circ f_2) \circ f_1, \quad f_3 \circ (f_2 \circ f_1).$$

El resultado es el mismo según 0.1.2. Para  $n = 4$  hay 5 posibilidades:

$$\begin{aligned} &((f_4 \circ f_3) \circ f_2) \circ f_1, \quad (f_4 \circ (f_3 \circ f_2)) \circ f_1, \quad (f_4 \circ f_3) \circ (f_2 \circ f_1), \\ &f_4 \circ ((f_3 \circ f_2) \circ f_1), \quad f_4 \circ (f_3 \circ (f_2 \circ f_1)). \end{aligned}$$

En general, hay

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$$

posibilidades. Estos números se conocen como los **números de Catalan**\*.

$n$ :	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$C_n$ :	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796	58786



*Demostración.* Para  $n = 2$  no hay que demostrar nada y el caso de  $n = 3$  es el contenido de 0.1.2. Para  $n > 3$ , supongamos que la propiedad se cumple para toda composición de  $< n$  aplicaciones. En una expresión  $f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_2 \circ f_1$ , después de poner los paréntesis de algún modo, tenemos

$$(f_n \circ \dots \circ f_{r+1}) \circ (f_r \circ \dots \circ f_1),$$

donde las expresiones en los paréntesis están bien definidas por la hipótesis de la inducción. Sea

$$(f_n \circ \dots \circ f_{s+1}) \circ (f_s \circ \dots \circ f_1)$$

\*EUGÈNE CHARLES CATALAN (1814–1894), un matemático francés-belga.

## 0.1. APLICACIONES ENTRE CONJUNTOS

---

otro modo de poner los paréntesis. Sin pérdida de generalidad,  $r < s$ . Tenemos

$$f_n \circ \cdots \circ f_{r+1} = (f_n \circ \cdots \circ f_{s+1}) \circ (f_s \circ \cdots \circ f_{r+1})$$

y

$$f_s \circ \cdots \circ f_1 = (f_s \circ \cdots \circ f_{r+1}) \circ (f_r \circ \cdots \circ f_1).$$

Ahora

$$(f_n \circ \cdots \circ f_{r+1}) \circ (f_r \circ \cdots \circ f_1) = ((f_n \circ \cdots \circ f_{s+1}) \circ (f_s \circ \cdots \circ f_{r+1})) \circ (f_r \circ \cdots \circ f_1)$$

y

$$(f_n \circ \cdots \circ f_{s+1}) \circ (f_s \circ \cdots \circ f_1) = (f_n \circ \cdots \circ f_{s+1}) \circ ((f_s \circ \cdots \circ f_{r+1}) \circ (f_r \circ \cdots \circ f_1)).$$

Por inducción, las últimas dos expresiones coinciden. ■

Para cualquier conjunto  $X$ , existe una aplicación distinguida  $X \rightarrow X$ , a saber la que aplica todo elemento en sí mismo.

**0.1.5. Definición.** La **aplicación identidad**  $\text{id}_X: X \rightarrow X$  se define como

$$\text{id}_X(x) := x.$$

**0.1.6. Observación.** Para cualesquiera aplicaciones  $f: X \rightarrow Y$  e  $g: Y \rightarrow X$  se cumple que

$$(0.1) \quad f \circ \text{id}_X = f, \quad \text{id}_X \circ g = g.$$

Note que (0.1) define a  $\text{id}_X$  de modo único: si tenemos dos aplicaciones  $i'_X, i''_X: X \rightarrow X$  tales que para cualesquiera  $f: X \rightarrow Y$  e  $g: Y \rightarrow X$  se cumple

$$f \circ i'_X = f, \quad i''_X \circ g = g,$$

en particular para  $X = Y$  tenemos

$$i''_X = i''_X \circ i'_X = i'_X.$$

**0.1.7. Definición.** Se dice que una aplicación  $f: X \rightarrow Y$  es **invertible** si existe otra aplicación  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  tal que

$$(0.2) \quad f^{-1} \circ f = \text{id}_X, \quad f \circ f^{-1} = \text{id}_Y.$$

La notación " $f^{-1}$ " está justificada por el hecho de que la aplicación inversa está definida de modo único.

**0.1.8. Observación.** Si  $f', f'': Y \rightarrow X$  son dos aplicaciones que satisfacen

$$f' \circ f = \text{id}_X, \quad f \circ f' = \text{id}_Y, \quad f'' \circ f = \text{id}_X, \quad f \circ f'' = \text{id}_Y,$$

entonces

$$f' = f''.$$

*Demostración.* Tenemos

$$f' = f' \circ \text{id}_Y = f' \circ (f \circ f'') = (f' \circ f) \circ f'' = \text{id}_X \circ f'' = f''.$$

■

**0.1.9. Observación.** Si  $f: X \rightarrow Y$  es una aplicación invertible, entonces  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  es también invertible: su inversa es  $f: X \rightarrow Y$ :

$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

**0.1.10. Observación.** Si  $f: X \rightarrow Y$  e  $g: Y \rightarrow Z$  poseen aplicaciones inversas  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  y  $g^{-1}: Z \rightarrow Y$ , entonces la composición  $f^{-1} \circ g^{-1}: Z \rightarrow X$  es inversa a  $g \circ f: X \rightarrow Z$ .

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{f^{-1}} \end{array} Y \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xleftarrow{g^{-1}} \end{array} Z$$

En general, toda composición de  $n$  aplicaciones invertibles  $f_n \circ \dots \circ f_1$  es también invertible y su aplicación inversa es dada por

$$(f_n \circ \dots \circ f_1)^{-1} = f_1^{-1} \circ \dots \circ f_n^{-1}.$$

*Demostración.* Tenemos

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ \text{id}_Y \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \text{id}_Z,$$

y de la misma manera,

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ \text{id}_Y \circ f = f^{-1} \circ f = \text{id}_X.$$

En general,  $(f_n \circ \dots \circ f_1)^{-1}$  se calcula por inducción sobre  $n$ . Acabamos de ver el caso de  $n = 2$ . Para el paso inductivo, escribamos

$$(f_n \circ \dots \circ f_1)^{-1} = (f_n \circ (f_{n-1} \circ \dots \circ f_1))^{-1} = (f_{n-1} \circ \dots \circ f_1)^{-1} \circ f_n^{-1}.$$

■

## 0.2 Aplicaciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas

**0.2.1. Definición.** Una aplicación entre conjuntos  $f: X \rightarrow Y$  es

- 1) **inyectiva** si  $f$  aplica diferentes elementos de  $X$  en diferentes elementos de  $Y$ ; es decir,  $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ ;
- 2) **sobreyectiva** si para todo  $y \in Y$  existe  $x \in X$  tal que  $f(x) = y$ ;
- 3) **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva al mismo tiempo.

**0.2.2. Observación.** Sean  $f: X \rightarrow Y$  e  $g: Y \rightarrow Z$  dos aplicaciones. Si  $f$  y  $g$  son inyectivas (resp. sobreyectivas, biyectivas), entonces  $g \circ f$  es también inyectiva (resp. sobreyectiva, biyectiva).

*Demostración.* Inmediato a partir de las definiciones en 0.2.1. ■

**0.2.3. Proposición.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una aplicación entre conjuntos.

- 1)  $f$  es inyectiva si y solamente si es cancelable por la izquierda: para todo par de aplicaciones  $g, g': Z \rightarrow X$  tenemos

$$(0.3) \quad f \circ g = f \circ g' \Rightarrow g = g'.$$

- 2)  $f$  es sobreyectiva si y solamente si es cancelable por la derecha: para todo par de aplicaciones  $g, g': Y \rightarrow Z$  tenemos

$$(0.4) \quad g \circ f = g' \circ f \Rightarrow g = g'.$$

- 3)  $f$  es biyectiva si y solamente si  $f$  es invertible.

*Demostración.*

- 1) Si  $f$  es inyectiva, entonces para todo  $z \in Z$  tenemos

$$f(g(z)) = f(g'(z)) \Rightarrow g(z) = g'(z),$$

es decir, se cumple (0.3). Luego, para  $x, x' \in X$  podemos considerar las aplicaciones

$$\begin{aligned} g: \{\bullet\} &\rightarrow X, \\ \bullet &\mapsto x, \\ g': \{\bullet\} &\rightarrow X, \\ \bullet &\mapsto x'. \end{aligned}$$

La condición (0.3) quiere decir precisamente

$$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x',$$

es decir, que  $f$  es inyectiva.

- 2) Si  $f$  es sobreyectiva, entonces todo  $y \in Y$  es de la forma  $f(x)$  para algún  $x \in X$  y la identidad  $g \circ f = g' \circ f$  implica que  $g = g'$ .

Ahora consideremos dos aplicaciones  $g, g': Y \rightarrow \{0, 1\}$  definidas por

$$g(y) := 1 \quad \text{para todo } y \in Y$$

y

$$g'(y) := \begin{cases} 1, & \text{si } y = f(x) \text{ para algún } x \in X, \\ 0, & \text{en el caso contrario.} \end{cases}$$

Tenemos  $g \circ f = g' \circ f$  y la identidad  $g = g'$  quiere decir precisamente que  $f$  es sobreyectiva.



- 3) Supongamos que  $f$  es una biyección. Esto quiere decir que para todo  $y \in Y$  existe único elemento  $x \in X$  tal que  $f(x) = y$ . Podemos definir entonces

$$f^{-1}: Y \rightarrow X,$$

$$y \mapsto x \text{ tal que } f(x) = y,$$

y esta aplicación satisface (0.2).

Ahora si se cumple (0.2), entonces  $f$  es cancelable por la izquierda y por la derecha: para todo  $g, g': Z \rightarrow X$  tenemos

$$f \circ g = f \circ g' \Rightarrow f^{-1} \circ (f \circ g) = f^{-1} \circ (f \circ g') \Rightarrow (f^{-1} \circ f) \circ g = (f^{-1} \circ f) \circ g'$$

$$\Rightarrow \text{id}_X \circ g = \text{id}_X \circ g' \Rightarrow g = g',$$

y para cualesquiera  $g, g': Y \rightarrow Z$  tenemos

$$g \circ f = g' \circ f \Rightarrow (g \circ f) \circ f^{-1} = (g' \circ f) \circ f^{-1} \Rightarrow g \circ (f \circ f^{-1}) = g' \circ (f \circ f^{-1})$$

$$\Rightarrow g \circ \text{id}_Y = g' \circ \text{id}_Y \Rightarrow g = g',$$

y por lo tanto  $f$  es inyectiva y sobreyectiva gracias a 1) y 2).

■

**0.2.4. Comentario.** Usando 0.2.3, podemos dar otra demostración de 0.2.2. Sean  $f: X \rightarrow Y$  e  $g: Y \rightarrow Z$  dos aplicaciones.

- 1) Si  $f$  y  $g$  son cancelables por la izquierda, entonces la composición  $f \circ g$  es también cancelable por la izquierda: para cualesquiera  $h, h': W \rightarrow X$  tenemos

$$(g \circ f) \circ h = (g \circ f) \circ h' \Rightarrow g \circ (f \circ h) = g \circ (f \circ h') \Rightarrow f \circ h = f \circ h' \Rightarrow h = h'.$$

$$W \begin{array}{c} \xrightarrow{h} \\ \xrightarrow{h'} \end{array} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

- 2) Si  $f$  y  $g$  son cancelables por la derecha, entonces la composición  $f \circ g$  es también cancelable por la derecha: para cualesquiera  $h, h': Z \rightarrow W$  tenemos

$$h \circ (f \circ g) = h' \circ (f \circ g) \Rightarrow (h \circ f) \circ g = (h' \circ f) \circ g \Rightarrow h \circ f = h' \circ f \Rightarrow h = h'.$$

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \begin{array}{c} \xrightarrow{h} \\ \xrightarrow{h'} \end{array} W$$

- 3) Ya hemos observado en 0.1.10 que la composición de aplicaciones invertibles es también invertible.

### 0.3. CARACTERIZACIÓN DE $\emptyset$ Y $\{\bullet\}$

---

**0.2.5. Observación.** Sean  $f: X \rightarrow Y$  e  $g: Y \rightarrow Z$  dos aplicaciones. Consideremos su composición  $g \circ f$ .

- 1) Si  $g \circ f$  es inyectiva, entonces  $f$  es también inyectiva.
- 2) Si  $g \circ f$  es sobreyectiva, entonces  $g$  es también sobreyectiva.

*Demostración.* Esto debe ser claro en términos de elementos de conjuntos, pero demostrémoslo en términos de aplicaciones cancelables. La aplicación  $g \circ f$  es inyectiva precisamente si es cancelable por la izquierda: para todo  $h, h'$  tenemos

$$(g \circ f) \circ h = (g \circ f) \circ h' \Rightarrow h = h'.$$

Pero esto implica en particular que  $f$  es cancelable por la izquierda:

$$f \circ h = f \circ h' \Rightarrow g \circ f \circ h = g \circ f \circ h' \Rightarrow h = h'.$$

De la misma manera, si  $g \circ f$  es sobreyectiva precisamente si es cancelable por la derecha:

$$h \circ (g \circ f) = h' \circ (g \circ f) \Rightarrow h = h'.$$

Pero en este caso  $g$  tiene que ser cancelable por la derecha:

$$h \circ g = h' \circ g \Rightarrow h \circ g \circ f = h' \circ g \circ f \Rightarrow h = h'.$$

■

## 0.3 Caracterización de $\emptyset$ y $\{\bullet\}$

Las siguientes propiedades son obvias, pero a la vez muy importantes.

**0.3.1. Observación (Propiedad universal del conjunto vacío).** Para todo conjunto  $X$  existe una aplicación única  $\emptyset \rightarrow X$ .

$$\emptyset \xrightarrow{\exists!} X$$

**0.3.2. Observación (Propiedad universal de un conjunto de un elemento).** Si  $\{\bullet\}$  es un conjunto de un elemento, entonces para cualquier conjunto  $X$  existe una aplicación única  $X \rightarrow \{\bullet\}$ :

$$X \xrightarrow{\exists!} \{\bullet\}$$

## 0.4 Diagramas conmutativos

En nuestro curso vamos a usar muy a menudo diagramas conmutativos. Son dibujos con algunos objetos  $X, Y, Z$  y flechas entre ellos como  $X \rightarrow Y$ , tales que las composiciones

de las flechas a lo largo de diferentes caminos coinciden. Por ejemplo, si tenemos

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ h \downarrow & & \downarrow g \\ Z & \xrightarrow{k} & W \end{array}$$

la conmutatividad quiere decir que

$$g \circ f = k \circ h.$$

Si tenemos un triángulo

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ f \swarrow & & \searrow g \\ Y & \xrightarrow{h} & Z \end{array}$$

su conmutatividad quiere decir que

$$h \circ f = g.$$

Otro ejemplo más interesante:

$$\begin{array}{ccccc} & & Z & & \\ & f \swarrow & \downarrow k & \searrow g & \\ X & \xleftarrow{j} & W & \xrightarrow{i} & Y \end{array}$$

Aquí la conmutatividad significa que

$$j \circ k = f \quad \text{y} \quad i \circ k = g.$$

## 0.5 Caracterización de productos y coproductos

Recordemos que para dos conjuntos  $X$  y  $Y$  su **producto cartesiano** está dado por

$$(0.5) \quad X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

y está dotado de dos proyecciones

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{p_1} & X \times Y & \xrightarrow{p_2} & Y \\ x & \longleftarrow & (x, y) & \longrightarrow & y \end{array}$$

A partir de ahora, en lugar de “producto cartesiano”, vamos a decir simplemente “producto”. Por otro lado, la **unión disjunta** de  $X$  y  $Y$  está dada por

$$(0.6) \quad X \sqcup Y := X \times \{0\} \cup Y \times \{1\}$$

y está dotada de dos inclusiones

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i_1} & X \sqcup Y \xleftarrow{i_2} Y \\ x & \longmapsto & (x, 0) \\ & & (y, 1) \longleftarrow y \end{array}$$

Notemos que, en cierto sentido, las construcciones de  $X \times Y$  e  $X \sqcup Y$  no son canónicas. Por ejemplo, hay varias formas de modelar los pares ordenados  $(x, y)$ , o también en lugar de (0.5) podemos usar otra definición como

$$\{(y, x) \mid x \in X, y \in Y\}.$$

Tampoco está claro por qué (0.5) tiene que ser *el* producto. De la misma manera, en lugar de (0.6) podemos considerar, por ejemplo,

$$\{\odot\} \times X \cup \{\odot\} \times Y.$$

En el fondo, el aspecto más importante lo constituyen las *propiedades universales* que satisfacen  $X \times Y$  e  $X \sqcup Y$ .

**0.5.1. Observación (Propiedad universal del producto).** Sea  $Z$  un conjunto junto con dos aplicaciones  $f: Z \rightarrow X$  y  $g: Z \rightarrow Y$ . Entonces, existe una aplicación única  $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}: Z \rightarrow X \times Y$  tal que

$$p_1 \circ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = f, \quad p_2 \circ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = g.$$

$$(0.7) \quad \begin{array}{ccccc} & & Z & & \\ & f \swarrow & \exists! \downarrow \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} & \searrow g & \\ X & \xleftarrow{p_1} & X \times Y & \xrightarrow{p_2} & Y \end{array}$$

*Demostración.* Se ve que la única opción posible es

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}: Z \rightarrow X \times Y, \\ z \mapsto (f(z), g(z)).$$

■

**0.5.2. Ejemplo.** Consideremos el producto  $X \times X$  y dos aplicaciones identidad  $\text{id}_X: X \rightarrow X$ :

$$\begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & \text{id} \swarrow & \exists! \downarrow \begin{pmatrix} \text{id}_X \\ \text{id}_X \end{pmatrix} & \searrow \text{id} & \\ X & \xleftarrow{p_1} & X \times X & \xrightarrow{p_2} & X \end{array}$$

la aplicación

$$\Delta_X := \begin{pmatrix} \text{id}_X \\ \text{id}_X \end{pmatrix}: X \rightarrow X \times X$$

caracterizada por

$$p_1 \circ \Delta_X = p_2 \circ \Delta_X = \text{id}_X$$

se llama la **aplicación diagonal**. En términos de los elementos del producto cartesiano  $X \times X$  como lo hemos definido arriba, tenemos

$$\Delta_X: x \mapsto (x, x).$$

▲

**0.5.3. Ejemplo.** Para dos aplicaciones  $f: X \rightarrow X'$  y  $g: Y \rightarrow Y'$ , tenemos una aplicación

$$f \times g: X \times Y \rightarrow X' \times Y'$$

caracterizada de modo único por

$$p'_1 \circ (f \times g) = f \circ p_1, \quad p'_2 \circ (f \times g) = g \circ p_2.$$

$$\begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{p_1} & X \times Y & \xrightarrow{p_2} & Y \\ f \downarrow & & \exists! \downarrow f \times g & & \downarrow g \\ X' & \xleftarrow{p'_1} & X' \times Y' & \xrightarrow{p'_2} & Y' \end{array}$$

En términos de elementos,

$$f \times g: (x, y) \mapsto (f(x), g(y)).$$

▲

**0.5.4. Observación (Propiedad universal del coproducto).** Sea  $Z$  un conjunto junto con dos aplicaciones  $f: X \rightarrow Z$  y  $g: Y \rightarrow Z$ . Entonces, existe una aplicación única  $(f, g): X \sqcup Y \rightarrow Z$  tal que

$$(f, g) \circ i_1 = f, \quad (f, g) \circ i_2 = g.$$

$$(0.8) \quad \begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i_1} & X \sqcup Y & \xleftarrow{i_2} & Y \\ & \searrow f & \exists! \downarrow (f, g) & \swarrow g & \\ & & Z & & \end{array}$$

*Demostración.* La aplicación tiene que ser dada por

$$\begin{aligned} (f, g): X \sqcup Y = X \times \{0\} \cup Y \times \{1\} &\rightarrow Z, \\ (x, 0) &\mapsto f(x), \\ (y, 1) &\mapsto g(y). \end{aligned}$$

■

Note que el diagrama (0.8) es casi idéntico a (10.1), solo que las flechas van al revés. En este sentido, el producto y la unión disjunta de conjuntos son construcciones *duales*. Por esto a veces se dice que la unión disjunta es un **coproducto**.

## 0.6 Propiedades universales

Hemos dicho que 0.3.1, 0.3.2, 0.5.1 y 0.5.4 son **propiedades universales**, porque estas definen  $\emptyset$ ,  $\{\bullet\}$ ,  $X \times Y$ ,  $X \sqcup Y$  de modo único salvo biyección única. Por ejemplo, supongamos que hay un conjunto  $T$  tal que

para todo  $X$  existe una aplicación única  $X \rightarrow T$ .

Sea  $T'$  otro conjunto que satisface la misma propiedad:

para todo  $X$  existe una aplicación única  $X \rightarrow T'$ .

Entonces, deben existir aplicaciones *únicas*

$$T \xrightarrow{\exists! f} T' \quad \text{y} \quad T' \xrightarrow{\exists! g} T.$$

Podemos considerar sus composiciones

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{f} & T' & \xrightarrow{g} & T \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & g \circ f & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} T' & \xrightarrow{g} & T & \xrightarrow{f} & T' \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & f \circ g & & \end{array}$$

Pero según las propiedades que hemos supuesto, hay una sola aplicación  $T \rightarrow T$ , y esta debe ser la aplicación identidad  $\text{id}_T$ . De la misma manera, la única aplicación  $T' \rightarrow T'$  es  $\text{id}_{T'}$ . Entonces,

$$g \circ f = \text{id}_T, \quad f \circ g = \text{id}_{T'},$$

y las aplicaciones  $f$  y  $g$  nos dan una biyección entre  $T$  y  $T'$ . Por esto cuando escribimos  $\{\bullet\}$ , no nos interesa qué es exactamente  $\bullet$ ; lo único que importa es que el conjunto  $\{\bullet\}$  satisfaga 0.3.2, y esta propiedad define  $\{\bullet\}$  salvo biyección única.

Para ver otro ejemplo más interesante de este tipo de razonamiento, consideremos el caso del producto  $X \times Y$ . Supongamos que hay dos conjuntos  $W'$  y  $W''$  junto con algunas aplicaciones

$$X \xleftarrow{p'_1} W' \xrightarrow{p'_2} Y \qquad X \xleftarrow{p''_1} W'' \xrightarrow{p''_2} Y$$

y cada uno satisface la propiedad universal (10.1):

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ f \swarrow & \downarrow \exists! (f/g) & \searrow g \\ X \xleftarrow{p'_1} & W' & \xrightarrow{p'_2} Y \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & Z & \\ f \swarrow & \downarrow \exists! (f/g) & \searrow g \\ X \xleftarrow{p''_1} & W'' & \xrightarrow{p''_2} Y \end{array}$$

Aplicando estas dos propiedades se obtiene

$$\begin{array}{ccc} & W'' & \\ p''_1 \swarrow & \downarrow \exists! \phi & \searrow p''_2 \\ X \xleftarrow{p'_1} & W' & \xrightarrow{p'_2} Y \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & W' & \\ p'_1 \swarrow & \downarrow \exists! \psi & \searrow p'_2 \\ X \xleftarrow{p''_1} & W'' & \xrightarrow{p''_2} Y \end{array}$$

es decir, existen aplicaciones *únicas*

$$\phi: W'' \rightarrow W' \quad \text{y} \quad \psi: W' \rightarrow W''$$

que satisfacen

$$p'_1 \circ \phi = p''_1, \quad p'_2 \circ \phi = p''_2, \quad p''_1 \circ \psi = p'_1, \quad p''_2 \circ \psi = p'_2.$$

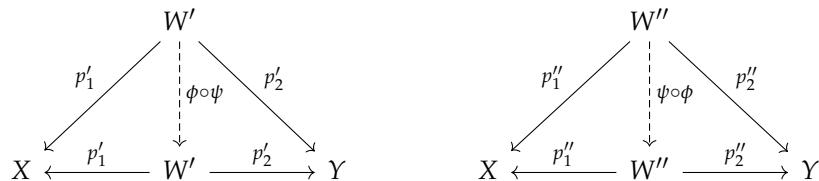
Podemos considerar sus composiciones

$$\phi \circ \psi: W' \rightarrow W', \quad \psi \circ \phi: W'' \rightarrow W''.$$

Estas satisfacen

$$\begin{aligned} p'_1 \circ (\phi \circ \psi) &= (p'_1 \circ \phi) \circ \psi = p''_1 \circ \psi = p'_1, \\ p'_2 \circ (\phi \circ \psi) &= (p'_2 \circ \phi) \circ \psi = p''_2 \circ \psi = p'_2, \\ p''_1 \circ (\psi \circ \phi) &= (p''_1 \circ \psi) \circ \phi = p'_1 \circ \phi = p''_1, \\ p''_2 \circ (\psi \circ \phi) &= (p''_2 \circ \psi) \circ \phi = p'_2 \circ \phi = p''_2; \end{aligned}$$

es decir, existen diagramas conmutativos



Pero las flechas verticales punteadas en los diagramas de arriba también deben ser únicas y por lo tanto coinciden con las aplicaciones identidad:

$$\phi \circ \psi = \text{id}_{W'}, \quad \psi \circ \phi = \text{id}_{W''}.$$

Entonces, hemos obtenido una biyección única

$$W' \cong W''.$$

Esto significa que no es importante cómo se define  $X \times Y$ ; si hay otro conjunto  $W$  que satisface la misma propiedad universal 0.5.1, entre  $W$  y  $X \times Y$  existe una biyección *canónica*.

Las consideraciones de arriba pueden parecer banales, o más bien una sobrecomplicación innecesaria de algo banal (¿quién no sabe que es el producto cartesiano de dos conjuntos?), pero estas ideas son fundamentales para las matemáticas modernas. Entre el final del siglo XIX y los inicios del siglo XX, una gran revolución sucedió cuando se descubrió que todos los objetos de interés pueden ser modelados en términos de conjuntos. A partir de los años 50 el punto de vista ha cambiado: los objetos suelen definirse en términos de propiedades universales y diagramas conmutativos.

## 0.7 Relaciones de equivalencia

Para terminar este capítulo, recordemos brevemente la noción de relación de equivalencia que será de mucha importancia en nuestro curso.

**0.7.1. Definición.** Sea  $X$  un conjunto. Una relación binaria  $\sim$  sobre  $X$  es una **relación de equivalencia** si cumple los siguientes axiomas:

- E1) **reflexividad:** para todo  $x \in X$  se cumple  $x \sim x$ ;
- E2) **simetría:** para cualesquiera  $x, y \in X$ , si  $x \sim y$ , entonces  $y \sim x$ ;
- E3) **transitividad:** para cualesquiera  $x, y, z \in X$ , si  $x \sim y$  e  $y \sim z$ , entonces  $x \sim z$ .

**0.7.2. Ejemplo.** Para algún número  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$  consideremos la siguiente relación sobre los números enteros  $\mathbb{Z}$ : se dice que  $a$  y  $b$  son **congruentes módulo  $n$**  y se escribe  $a \equiv b \pmod{n}$  si su diferencia es divisible por  $n$ :

$$n \mid (a - b) \iff (a - b) = n c \text{ para algún } c \in \mathbb{Z}.$$

Esta es una relación de equivalencia. De hecho, para todo  $a \in \mathbb{Z}$  tenemos  $n \mid (a - a)$ , ya que el cero es divisible por cualquier  $n$  (tenemos  $0 = n \cdot 0$ ). Luego la relación es reflexiva.

Ahora si  $a \equiv b \pmod{n}$ , entonces  $(a - b) = n c$  para algún  $c$  y luego  $(b - a) = n(-c)$ , así que  $b \equiv a \pmod{n}$ .

Por fin, si tenemos  $a_1 \equiv a_2 \pmod{n}$  y  $a_2 \equiv a_3 \pmod{n}$ , esto significa que

$$(a_1 - a_2) = n c, \quad (a_2 - a_3) = n d,$$

y entonces

$$(a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) = (a_1 - a_3) = n \cdot (c + d),$$

y  $a_1 \equiv a_3 \pmod{n}$ ; la relación es transitiva. ▲

**0.7.3. Definición.** Sea  $X$  un conjunto dotado de una relación de equivalencia  $\sim$ . Para  $x \in X$  su **clase de equivalencia** respecto a  $\sim$  es el conjunto

$$[x] := \{y \in X \mid x \sim y\}.$$

En este caso también se dice que  $x$  **representa** la clase de equivalencia  $[x]$ . El conjunto de las clases de equivalencia se denota por

$$X/\sim := \{[x] \mid x \in X\}$$

y se dice que es el **conjunto cociente** de  $X$  bajo la relación de equivalencia  $\sim$ .

**0.7.4. Observación.** Las clases de equivalencia son disjuntas. Específicamente, para cualesquiera  $x, y \in X$  las siguientes condiciones son equivalentes:

- 1)  $x \sim y$ ,



- 2)  $[x] = [y]$ ,  
 3)  $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ .

Asimismo tenemos la descomposición

$$X = \bigcup_{[x] \in X/\sim} [x],$$

y diferentes conjuntos en la unión son disjuntos.

*Demostración.* Supongamos que  $x \sim y$ . Entonces para todo  $z \in X$  tenemos (usando que la relación  $\sim$  es simétrica y transitiva)

$$z \in [x] \iff x \sim z \Rightarrow y \sim z \iff z \in [y]$$

y de la misma manera

$$z \in [y] \iff y \sim z \Rightarrow x \sim z \iff z \in [x].$$

Esto demuestra que 1) implica 2).

Luego 2) obviamente implica 3), ya que  $x \in [x]$ , y por lo tanto  $[x] \neq \emptyset$ . Esto usa la hipótesis de que la relación  $\sim$  sea reflexiva.

Por fin, 3) implica 1): si existe  $z \in [x] \cap [y]$ , entonces  $x \sim z$  e  $y \sim z$ , y por la simetría y transitividad  $x \sim y$ . ■

**0.7.5. Ejemplo.** Las clases de equivalencia respecto a la relación de congruencia módulo  $n$  pueden ser representadas por diferentes restos módulo  $n$ . Vamos a usar la notación

$$[a]_n := \{b \in \mathbb{Z} \mid a \equiv b \pmod{n}\}.$$

$$\begin{aligned} [0]_n &= \{0, \pm n, \pm 2n, \pm 3n, \dots\}, \\ [1]_n &= \{1, 1 \pm n, 1 \pm 2n, 1 \pm 3n, \dots\}, \\ [2]_n &= \{2, 2 \pm n, 2 \pm 2n, 2 \pm 3n, \dots\}, \end{aligned}$$

⋮

$$[n-1]_n = \{(n-1), (n-1) \pm n, (n-1) \pm 2n, (n-1) \pm 3n, \dots\}.$$

En este caso el conjunto  $\mathbb{Z}/\sim$  se denota por

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} := \{[a]_n \mid a \in \mathbb{Z}\} = \{[0]_n, [1]_n, \dots, [n-1]_n\}.$$

▲

Técnicamente hablando,  $X/\sim$  es un conjunto de subconjuntos de  $X$  que son disjuntos y cubren todo  $X$ . Sin embargo, hay que pensar en  $X/\sim$  como en el conjunto  $X$  donde hemos identificado los elementos equivalentes. De todos modos, lo más importante no es la construcción de  $X/\sim$  sino su propiedad universal.

**0.7.6. Observación (Propiedad universal del cociente  $X/\sim$ ).** Para una relación de equivalencia  $\sim$  sobre  $X$ , consideremos la aplicación canónica

$$p: X \rightarrow X/\sim, \\ x \mapsto [x].$$

Sea  $f: X \rightarrow Y$  una aplicación tal que para cualesquiera  $x, x' \in X$  se tiene

$$x \sim x' \Rightarrow f(x) = f(x').$$

Entonces,  $f$  se factoriza de modo único por  $p$ :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ p \downarrow & \nearrow \exists! & \\ X/\sim & & \end{array}$$

*Demostración.* La flecha punteada tiene que ser dada por  $[x] \mapsto f(x)$ . ■

**0.7.7. Ejemplo.** Consideremos la adición y multiplicación de números enteros módulo  $n$ : para dos números  $a$  y  $b$  calculemos su suma y producto habitual y luego tomemos el resto módulo  $n$  correspondiente:

$$\begin{aligned} +: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \\ (a, b) &\mapsto [a + b]_n, \\ \cdot: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \\ (a, b) &\mapsto [ab]_n. \end{aligned}$$

La relación de congruencia módulo  $n$  induce de modo obvio una relación de equivalencia sobre  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ :

$$(a, b) \sim (a', b') \iff a \equiv a' \pmod{n}, \quad b \equiv b' \pmod{n},$$

y el cociente  $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/\sim$  puede ser identificado con  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Notamos que

$$a \equiv a' \pmod{n}, \quad b \equiv b' \pmod{n} \Rightarrow a + b \equiv a' + b' \pmod{n}.$$

De hecho, si  $a - a' = nc$  y  $b - b' = nd$ , entonces  $(a + b) - (a' + b') = n(c + d)$ . De la misma manera, tenemos

$$a \equiv a' \pmod{n}, \quad b \equiv b' \pmod{n} \Rightarrow ab \equiv a'b' \pmod{n}.$$

En efecto, si  $n \mid (a - a')$  y  $n \mid (b - b')$ , entonces  $n$  divide a

$$ab - a'b' = (a - a')b + a'(b - b').$$

Todo esto significa que la adición y multiplicación pueden ser definidas sobre los restos módulo  $n$ :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \xrightarrow{+} & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\
 \downarrow & \nearrow \exists! & \\
 \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & & 
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \xrightarrow{\times} & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\
 \downarrow & \nearrow \exists! & \\
 \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & & 
 \end{array}$$

Las flechas punteadas están definidas por

$$[a]_n + [b]_n = [a + b]_n,$$

$$[a]_n \cdot [b]_n = [ab]_n.$$



Mucho más ejemplos interesantes van a surgir más adelante.



# Capítulo 1

## Permutaciones

Para motivar los axiomas de grupo, en este capítulo vamos a considerar solamente grupos de permutaciones, también conocidos como grupos simétricos.

**1.0.1. Definición.** Sea  $X$  un conjunto. Si  $f: X \rightarrow X$  es una biyección, se dice también que  $f$  es una **permutación** de los elementos de  $X$ . El conjunto de todas las permutaciones de los elementos de  $X$  se denota por  $S_X$ .

**1.0.2. Observación.** La composición de aplicaciones define una operación binaria sobre  $S_X$

$$\begin{aligned} S_X \times S_X &\rightarrow S_X, \\ (g, f) &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

que satisface las siguientes propiedades.

G1) La operación  $\circ$  es **asociativa**: para cualesquiera  $f, g, h \in S_X$  tenemos

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

G2) La aplicación identidad  $\text{id}_X$  es el **elemento neutro** respecto a  $\circ$ , es decir

$$\text{id}_X \circ f = f = f \circ \text{id}_X$$

para todo  $f \in S_X$ .

G3) Para toda permutación  $f \in S_X$  existe una permutación **inversa**  $f^{-1}: X \rightarrow X$  que satisface

$$f \circ f^{-1} = \text{id}_X = f^{-1} \circ f.$$

*Demostración.* Hemos visto estos resultados en el capítulo anterior. La composición de dos permutaciones es también una permutación, y por lo tanto la operación  $(g, f) \mapsto g \circ f$  está bien definida. La propiedad G1) significa nada más que la composición de aplicaciones es asociativa. Luego, la propiedad G2) es la composición con la aplicación identidad. Por fin, una aplicación  $f: X \rightarrow X$  es biyectiva si y solamente si existe la aplicación inversa  $f^{-1}: X \rightarrow X$ , y esto nos da G3). ■

## 1.1. EL GRUPO SIMÉTRICO $S_N$

---

Las propiedades G1)–G3) significan que  $S_X$  es un **grupo**. Es una estructura algebraica que vamos a definir en el siguiente capítulo y estudiar durante todo el semestre.

**1.0.3. Observación.**  $S_X$  satisface las siguientes propiedades:

$$A1) \text{id}_X(x) = x \text{ para todo } x \in X.$$

$$A2) (g \circ f)(x) = g(f(x)) \text{ para todo } x \in X \text{ y } f, g \in S_X.$$

*Demostración.* A1) es nada más la definición de la aplicación identidad y A2) es la definición de la composición de aplicaciones. ■

Las propiedades A1) y A2) significan que  $S_X$  **actúa** sobre  $X$ . Las acciones de grupos sobre conjuntos serán de mucha importancia más adelante.

**1.0.4. Definición.**  $S_X$  junto con la operación binaria  $\circ$  es el **grupo simétrico** sobre  $X$ .

Normalmente para el grupo simétrico el signo de composición  $\circ$  no se escribe: “ $gf$ ” significa “ $g \circ f$ ”. Lo vamos a omitir a partir de ahora. Será muy útil pensar en la composición de biyecciones como una especie de multiplicación *no conmutativa* (en general  $fg \neq gf$ ).

## 1.1 El grupo simétrico $S_n$

Un caso particular de interés es cuando  $X$  es un conjunto finito de  $n$  elementos. Podemos suponer que  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ .

**1.1.1. Notación.** Para un número natural  $n$ , el grupo simétrico sobre  $\{1, 2, \dots, n\}$  se denota por

$$S_n := S_{\{1, 2, \dots, n\}}.$$

**1.1.2. Ejemplo.** El caso tonto es el de  $n = 0$  que corresponde a... las permutaciones del conjunto vacío. Hay una aplicación única  $\emptyset \rightarrow \emptyset$ . Para  $n = 1$  tenemos un conjunto de un elemento  $\{1\}$  y una aplicación única  $\text{id}: \{1\} \rightarrow \{1\}$ . El primer caso no trivial es de  $n = 2$ . El conjunto  $\{1, 2\}$  tiene dos permutaciones: la permutación identidad

$$\text{id}: 1 \mapsto 1, 2 \mapsto 2$$

y la permutación que intercambia 1 y 2:

$$\sigma: 1 \mapsto 2, 2 \mapsto 1.$$

Las composiciones de estas permutaciones son

$$\text{id} \circ \text{id} = \text{id}, \quad \sigma \circ \text{id} = \text{id} \circ \sigma = \sigma, \quad \sigma \circ \sigma = \text{id}.$$



**1.1.3. Notación.** Una permutación  $\sigma \in S_n$  puede representarse mediante una tabla donde en la primera fila están los números  $i = 1, 2, \dots, n$  y en la segunda fila están sus imágenes correspondientes  $\sigma(i) \in \{1, 2, \dots, n\}$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Notamos que el hecho de que  $\sigma$  sea una biyección  $\{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  significa precisamente que los números  $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)$  no se repiten.

**1.1.4. Ejemplo.** Los elementos de  $S_2$  pueden ser representados por las tablas

$$\text{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

El grupo simétrico  $S_3$  consiste en 6 elementos dados por

$$(1.1) \quad \text{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Notemos que en general, dos permutaciones  $\sigma, \tau \in S_n$  no conmutan; es decir,

$$\sigma\tau \neq \tau\sigma.$$

En el caso de  $S_3$  tenemos

$$(1.2) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

mientras que

$$(1.3) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

▲

**1.1.5. Observación.** Tenemos

$$|S_n| = n!$$

*Demostración.* La base de inducción es  $|S_0| = |S_1| = 1$ . Luego, supongamos que  $|S_{n-1}| = (n-1)!$ . Cada elemento  $\sigma \in S_{n-1}$  corresponde a una lista sin repeticiones de los números entre 1 y  $n-1$ :

$$\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n-1).$$

Todos los elementos de  $S_n$  se obtienen poniendo el número  $n$  en una posición, y hay precisamente  $n$  posibilidades. Entonces,

$$|S_n| = n \cdot |S_{n-1}| = n \cdot (n-1)! = n!$$

■

## 1.2 Permutaciones cíclicas

**1.2.1. Definición.** Para  $1 \leq k \leq n$  sean  $i_1, i_2, i_3, \dots, i_k$  algunos números distintos entre 1 y  $n$ . Definamos una permutación  $\sigma$  por

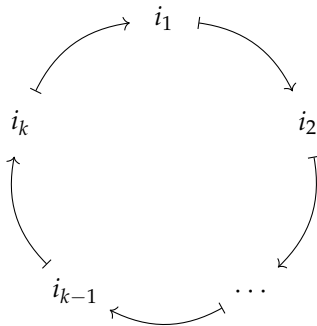
$$\begin{aligned}\sigma(i_1) &:= i_2, \\ \sigma(i_2) &:= i_3, \\ &\vdots, \\ \sigma(i_{k-1}) &:= i_k, \\ \sigma(i_k) &:= i_1\end{aligned}$$

y

$$\sigma(j) = j \quad \text{para } j \notin \{i_1, i_2, i_3, \dots, i_k\}.$$

Entonces, se dice que  $\sigma$  es una **permutación cíclica de orden  $k$**  o un  **$k$ -ciclo** y se escribe

$$\sigma = (i_1 i_2 \cdots i_{k-1} i_k).$$



Note que el orden  $k$  es el mínimo número tal que

$$\underbrace{\sigma \cdots \sigma}_k = \text{id}.$$

La permutación identidad  $\text{id}$  se considera como la permutación cíclica de orden 1, ya que esta corresponde a  $(i)$  para cualquier  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

**1.2.2. Definición.** Los 2-ciclos  $\sigma = (i j)$  reciben el nombre especial de **transposiciones**.

Note que la transposición  $(i j)$  intercambia  $i$  con  $j$  y deja otros elementos intactos.

En un ciclo, los índices en los paréntesis pueden ser *permutados cíclicamente* y el resultado no cambia:

$$(1\ 2\ 3) = (2\ 3\ 1) = (3\ 1\ 2).$$

Por esto normalmente se escoge la presentación  $(i_1 i_2 \cdots i_{k-1} i_k)$  donde  $i_1$  es el número mínimo (en el ejemplo de arriba es  $(1\ 2\ 3)$ ).



**1.2.3. Ejemplo.** El grupo simétrico  $S_3$  consiste en permutaciones cíclicas; sus elementos, enumerados en (1.1), también pueden ser escritos como

$$\text{id}, (1\ 2), (2\ 3), (1\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2).$$

Compilemos la tabla de composición de permutaciones en  $S_3$  en términos de ciclos. Escribamos una tabla de  $6 \times 6$  indexada por los elementos de  $S_3$  donde en la intersección de la fila  $\sigma$  y la columna  $\tau$  está  $\sigma\tau$ :

◦	...	$\tau$	...
...	...	...	...
$\sigma$	...	$\sigma\tau$	...
...	...	...	...

Por ejemplo, las fórmulas (1.2) y (1.3) pueden ser escritas como

$$(1\ 2)(2\ 3) = (1\ 2\ 3), \quad (2\ 3)(1\ 2) = (1\ 3\ 2).$$

Haciendo cálculos similares, se obtiene

◦	id	(1 2)	(2 3)	(1 3)	(1 2 3)	(1 3 2)
id	id	(1 2)	(2 3)	(1 3)	(1 2 3)	(1 3 2)
(1 2)	(1 2)	id	(1 2 3)	(1 3 2)	(2 3)	(1 3)
(2 3)	(2 3)	(1 3 2)	id	(1 2 3)	(1 3)	(1 2)
(1 3)	(1 3)	(1 2 3)	(1 3 2)	id	(1 2)	(2 3)
(1 2 3)	(1 2 3)	(1 3)	(1 2)	(2 3)	(1 3 2)	id
(1 3 2)	(1 3 2)	(2 3)	(1 3)	(1 2)	id	(1 2 3)

Note que los elementos no se repiten en ninguna columna o fila. No es una coincidencia: en general,

$$\sigma\tau = \sigma\tau' \Rightarrow \tau = \tau'$$

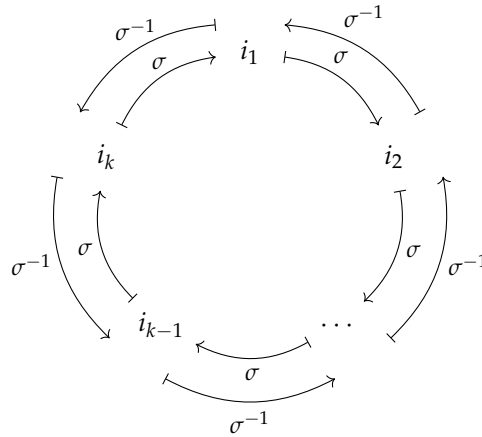
y

$$\sigma\tau = \sigma'\tau \Rightarrow \sigma = \sigma',$$

ya que toda biyección es cancelable por la izquierda y por la derecha. ▲

**1.2.4. Observación.** La permutación inversa a un  $k$ -ciclo es también un  $k$ -ciclo, dado por

$$(i_1\ i_2\ \dots\ i_k)^{-1} = (i_k\ i_{k-1}\ \dots\ i_1) = (i_1\ i_k\ i_{k-1}\ \dots\ i_2).$$



**1.2.5. Definición.** Se dice que dos ciclos  $\sigma = (i_1 i_2 \cdots i_k)$  y  $\tau = (j_1 j_2 \cdots j_\ell)$  en  $S_n$  son **disjuntos** si  $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \cap \{j_1, j_2, \dots, j_\ell\} = \emptyset$ .

**1.2.6. Observación.** Dos ciclos disjuntos cualesquiera conmutan entre sí:

$$\sigma\tau = \tau\sigma.$$

*Demostración.* En general, si una permutación  $\sigma$  afecta los números  $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$  (es decir,  $\sigma(i) = i$  para  $i \notin \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ ) y  $\tau$  afecta  $\{j_1, j_2, \dots, j_\ell\}$ , está claro que  $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \cap \{j_1, j_2, \dots, j_\ell\} = \emptyset$  implica que  $\sigma\tau = \tau\sigma$ . ■

No todas las permutaciones son cíclicas. Por ejemplo, la permutación

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in S_4$$

es una composición de dos ciclos disjuntos:

$$\sigma = (1\ 2)(3\ 4) = (3\ 4)(1\ 2).$$



Sin embargo, tenemos el siguiente resultado.

**1.2.7. Proposición.** Toda permutación  $\sigma \in S_n$  puede ser escrita como una composición de ciclos disjuntos.

*Demostración.* Consideremos la lista máxima

$$i_1 := 1, i_2 := \sigma(1), i_3 := \sigma(i_2), i_4 := \sigma(i_3), \dots, i_k := \sigma(i_{k-1})$$

tal que  $i_1, i_2, \dots, i_k$  son números distintos; es decir, terminemos la lista cuando

$$\sigma(i_k) = i_\ell \quad \text{para algún } 1 \leq \ell \leq k.$$

Ahora si  $\ell \neq 1$ , tenemos

$$\sigma(i_k) = \sigma(i_{\ell-1}),$$

pero  $i_k \neq i_{\ell-1}$  y esto contradice la inyectividad de  $\sigma$ . Entonces,  $\ell = 1$ , y hemos obtenido un ciclo. (Si  $\sigma(1) = 1$ , acabamos de encontrar un ciclo de orden 1, pero es conveniente considerarlo como un ciclo legítimo para simplificar el algoritmo.)

Luego podemos considerar el número mínimo  $j_1$  tal que  $j_1 \notin \{i_1, \dots, i_k\}$ . De la misma manera, vamos a obtener otro ciclo que empieza por  $j_1$  y que es disjunto con el ciclo  $(i_1 i_2 \dots i_k)$ .

Repitiendo este proceso, encontramos que todos los elementos pertenecen a algún ciclo, y estos ciclos son disjuntos. ■

**1.2.8. Ejemplo.** Consideremos la permutación

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 7 & 1 & 3 & 8 & 6 & 5 & 2 & 10 & 9 \end{pmatrix}$$

Empezando por 1, tenemos una sucesión

$$1 \mapsto 4 \mapsto 3 \mapsto 1$$

Esto nos da un ciclo  $(1\ 4\ 3)$ . Nos quedan los números 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Empezando por 2, se obtiene

$$2 \mapsto 7 \mapsto 5 \mapsto 8 \mapsto 2$$

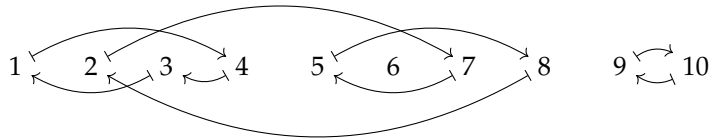
y otro ciclo es  $(2\ 7\ 5\ 8)$ . Luego, 6 es un punto fijo: tenemos  $\sigma(6) = 6$  y un ciclo  $(6)$ . Nos quedan 9 y 10:

$$9 \mapsto 10 \mapsto 9$$

lo que nos da una transposición  $(9\ 10)$ . Entonces, la descomposición en ciclos disjuntos es dada por

$$\sigma = (1\ 4\ 3)(2\ 7\ 5\ 8)(9\ 10)$$

(el ciclo  $(6)$  no cambia nada y se omite, como todos los ciclos de orden 1).



▲

**1.2.9. Definición.** Para  $\sigma \in S_n$ , consideremos su descomposición en ciclos disjuntos. La sucesión de órdenes de estos ciclos se llama el **tipo de ciclo** de  $\sigma$ .

Todos los tipos de ciclo posibles en  $S_n$  corresponden a las particiones de  $n$  en una suma de números positivos. Por ejemplo, para  $n = 4$  tenemos las siguientes opciones.

1.2. PERMUTACIONES CÍCLICAS

---

$$\begin{aligned}
 1 + 1 + 1 + 1 &\leftrightarrow (\bullet)(\bullet)(\bullet)(\bullet) = \text{id} \\
 1 + 1 + 2 &\leftrightarrow (\bullet)(\bullet)(\bullet\bullet) = (\bullet\bullet) \\
 2 + 2 &\leftrightarrow (\bullet\bullet)(\bullet\bullet) \\
 1 + 3 &\leftrightarrow (\bullet)(\bullet\bullet\bullet) = (\bullet\bullet\bullet) \\
 4 &\leftrightarrow (\bullet\bullet\bullet\bullet)
 \end{aligned}$$

El número de particiones de  $n$  se denota por  $p(n)$  y se llama la **función de particiones**. La tabla de abajo presenta algunos valores de  $p(n)$ . Sus propiedades se estudian extensivamente en combinatoria y teoría de números.

$n$ :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(n)$ :	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42
$n$ :	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$p(n)$ :	56	77	101	135	176	231	297	385	490	627

**1.2.10. Ejemplo.** Con un poco de cuidado para no olvidar ninguna permutación y no escribirla dos veces, encontramos la lista completa de las permutaciones en  $S_4$ :

$$\begin{aligned}
 &\text{id}, \\
 &(1\ 2), (1\ 3), (1\ 4), (2\ 3), (2\ 4), (3\ 4), \\
 &(1\ 2\ 3), (1\ 2\ 4), (1\ 3\ 2), (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 2), (1\ 4\ 3), (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3), \\
 &(1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3), \\
 &(1\ 2\ 3\ 4), (1\ 2\ 4\ 3), (1\ 3\ 2\ 4), (1\ 3\ 4\ 2), (1\ 4\ 2\ 3), (1\ 4\ 3\ 2).
 \end{aligned}$$

Para comprobar, calculemos el número de elementos:

$$1 + 6 + 8 + 3 + 6 = 24 = 4!$$

▲

**1.2.11. Proposición.** En  $S_n$  hay

$$\frac{n!}{\prod_{\ell} M_{\ell}! \cdot \ell^{M_{\ell}}}$$

permutaciones con la descomposición en ciclos disjuntos de la forma

$$(1.4) \quad \sigma = \underbrace{(\bullet) \cdots (\bullet)}_{M_1 \text{ puntos fijos}} \underbrace{(\bullet\bullet) \cdots (\bullet\bullet)}_{M_2 \text{ transposiciones}} \underbrace{(\bullet\bullet\bullet) \cdots (\bullet\bullet\bullet)}_{M_3 \text{ ciclos de orden 3}} \cdots$$

(aquí  $M_1 + M_2 \cdot 2 + M_3 \cdot 3 + \cdots = n$ ).

*Demostración.* Hay  $n!$  posibilidades de colocar los números  $\{1, \dots, n\}$  en lugar de  $\bullet$  en (1.4). En cada serie de  $M_{\ell}$  ciclos de longitud  $\ell$ , podemos escribir los ciclos en otro orden, y el resultado no cambia, así que hay que dividir  $n!$  por  $\prod_{\ell} M_{\ell}!$ . También para cada ciclo de longitud  $\ell$ , hay  $\ell$  modos equivalentes de escribirlo permutando los índices cíclicamente. Por esto hay que dividir todo por  $\prod_{\ell} \ell^{M_{\ell}}$ . ■

**1.2.12. Ejemplo.** Si nos interesan los  $k$ -ciclos en  $S_n$  (donde  $1 \leq k \leq n$ ), tenemos

$$M_1 = (n - k), \quad M_2 = \cdots = M_{k-1} = 0, \quad M_k = 1, \quad M_{k+1} = M_{k+2} = \cdots = 0$$

y la fórmula nos da

$$\frac{n!}{(n - k)! \cdot k}.$$

En particular, hay

$$\frac{n(n - 1)}{2} = \binom{n}{2}$$

transposiciones. ▲

**1.2.13. Ejemplo.** En  $S_5$  tenemos

- la permutación identidad id,
- $10 = \frac{5!}{3! \cdot 2}$  transposiciones  $(\bullet \bullet)$ ,
- $20 = \frac{5!}{2! \cdot 3}$  ciclos  $(\bullet \bullet \bullet)$ ,
- $30 = \frac{5!}{4}$  ciclos  $(\bullet \bullet \bullet \bullet)$ ,
- $24 = \frac{5!}{5}$  ciclos  $(\bullet \bullet \bullet \bullet \bullet)$ ,
- $15 = \frac{5!}{2! \cdot 2^2}$  permutaciones  $(\bullet \bullet)(\bullet \bullet)$ ,
- $20 = \frac{5!}{2 \cdot 3}$  permutaciones  $(\bullet \bullet)(\bullet \bullet \bullet)$ .

▲

**1.2.14. Definición.** Para  $\sigma, \tau \in S_n$  la permutación  $\tau\sigma\tau^{-1} \in S_n$  se llama la **conjugación de  $\sigma$  por  $\tau$** .

**1.2.15. Observación.** Para dos permutaciones  $\sigma, \tau \in S_n$ , si

$$\sigma: i \mapsto j,$$

entonces

$$\tau\sigma\tau^{-1}: \tau(i) \mapsto \tau(j).$$

*Demostración.*

$$\tau\sigma\tau^{-1}(\tau(i)) = (\tau\sigma\tau^{-1}\tau)(i) = (\tau\sigma)(i) = \tau(j).$$

■

**1.2.16. Corolario.** Si

$$\sigma = (i_1 i_2 \cdots i_k)$$

es un  $k$ -ciclo, entonces para toda permutación  $\tau \in S_n$ , la conjugación de  $\sigma$  por  $\tau$  es también un  $k$ -ciclo dado por

$$\tau(i_1 i_2 \cdots i_k)\tau^{-1} = (\tau(i_1) \tau(i_2) \cdots \tau(i_k)).$$

En general, la conjugación no cambia el tipo de ciclo de una permutación. Dos permutaciones  $\sigma, \sigma' \in S_n$  son conjugadas ( $\sigma' = \tau\sigma\tau^{-1}$  para alguna permutación  $\tau \in S_n$ ) si y solamente si tienen el mismo tipo de ciclo.

*Demostración.* Todo esto está claro de la observación precedente: la conjugación nada más cambia la numeración de nuestros elementos  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Para una permutación

$$\sigma = (\bullet \bullet \dots \bullet) (\bullet \bullet \dots \bullet) \dots (\bullet \bullet \dots \bullet)$$

la conjugación por  $\tau$  nos da

$$\tau\sigma\tau^{-1} = \tau(\bullet \bullet \dots \bullet)\tau^{-1} \tau(\bullet \bullet \dots \bullet)\tau^{-1} \dots \tau(\bullet \bullet \dots \bullet)\tau^{-1},$$

y aquí para cada  $k$ -ciclo  $(\bullet \bullet \dots \bullet)$  en la descomposición su conjugado  $\tau(\bullet \bullet \dots \bullet)\tau^{-1}$  es también un  $k$ -ciclo. Si al principio los ciclos son disjuntos, los conjugados son también disjuntos, puesto que  $\tau$  es una biyección.

Ahora si  $\sigma$  y  $\sigma'$  son dos permutaciones que tienen el mismo tipo de ciclo, esto significa que son idénticas salvo reenumeración de los elementos  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Esta reenumeración se realiza por cierta permutación  $\tau \in S_n$  y  $\sigma' = \tau\sigma\tau^{-1}$ . ■

### 1.3 Signo y el grupo alternante $A_n$

**1.3.1. Definición.** Para una permutación  $\sigma \in S_n$  cuando para algunos  $i < j$  se tiene  $\sigma(i) > \sigma(j)$ , se dice que hay una **inversión**. El número

$$\text{sgn } \sigma := (-1)^{\#\text{de inversiones}}$$

se llama el **signo** de  $\sigma$ . Se dice que  $\sigma$  es **par** si  $\text{sgn } \sigma = +1$  e **impar** si  $\text{sgn } \sigma = -1$ .

**1.3.2. Ejemplo.** Para  $S_3$  tenemos

permutación	inversiones	signo
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	no hay	+1 (par)
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$2 > 1$	-1 (impar)
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$3 > 2$	-1 (impar)
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$3 > 2, 3 > 1, 2 > 1$	-1 (impar)
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$2 > 1, 3 > 1$	+1 (par)
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$3 > 1, 3 > 2$	+1 (par)

▲

**1.3.3. Digresión.** El signo de permutación aparece en la famosa fórmula para el determinante de una matriz  $A = (x_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ :

$$(1.5) \quad \det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn } \sigma \cdot x_{1, \sigma(1)} x_{2, \sigma(2)} \cdots x_{n, \sigma(n)}.$$

Por ejemplo, en  $S_2$  tenemos dos permutaciones: la permutación identidad de signo  $+1$  y la transposición  $(1\ 2)$  de signo  $-1$ . Esto nos da

$$\det \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = x_{11} x_{22} - x_{12} x_{21}.$$

Sin embargo, la expresión (1.5) es horrible y no explica el significado geométrico del determinante, ni sirve para hacer cálculos prácticos (¡la suma es sobre  $n!$  términos!).

**1.3.4. Observación.** *Toda  $k$ -ciclo es una composición de  $k - 1$  transposiciones:*

$$(i_1\ i_2\ \cdots\ i_k) = (i_1\ i_2)(i_2\ i_3)(i_3\ i_4)\cdots(i_{k-1}\ i_k).$$

**1.3.5. Corolario.** *Toda permutación  $\sigma \in S_n$  es una composición de transposiciones (no necesariamente disjuntas).*

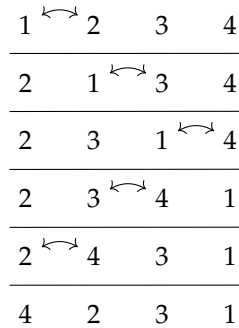
*Demostración.* Sigue de la descomposición de permutaciones en ciclos disjuntos (1.2.7) y luego descomposición de cada ciclo en transposiciones (1.3.4). ■

El último resultado es muy natural: intuitivamente debe de ser claro que para permutar  $n$  elementos de cualquier modo, es suficiente hacer una sucesión de intercambios por pares. De hecho, se puede hacer una sucesión de intercambios de elementos adyacentes.

**1.3.6. Observación.** *Toda transposición  $(a\ b)$  con  $b - a = k$  puede ser escrita como una composición de  $2k - 1$  transposiciones de la forma  $(i\ i + 1)$ .*

**1.3.7. Ejemplo.** Tenemos

$$(1\ 4) = (1\ 2)(2\ 3)(3\ 4)(2\ 3)(1\ 2).$$



*Demostración de 1.3.6.* La idea debe de ser clara a partir del ejemplo de arriba. Para formalizar la demostración, usamos la inducción sobre  $k$ . La base de inducción es el caso de  $k = 1$  y el paso inductivo resulta de la fórmula

$$(a\ b) = (a\ a + 1)(a + 1\ b)(a\ a + 1).$$



El mismo argumento formulado en otras palabras: a partir de  $(b - 1 b)$  se puede hacer una sucesión de  $k - 1$  conjugaciones

$$\begin{aligned}(b - 2 b - 1) (b - 1 b) (b - 2 b - 1) &= (b - 2 b), \\(b - 3 b - 2) (b - 2 b) (b - 3 b - 2) &= (b - 3 b), \\(b - 4 b - 3) (b - 3 b) (b - 4 b - 3) &= (b - 4 b), \\&\dots\end{aligned}$$

hasta que se obtenga  $(a b)$ .

**1.3.8. Corolario.** *Todo elemento de  $S_n$  puede ser expresado como un producto de transposiciones*

$$(1 2), (2 3), (3 4), \dots, (n - 1 n).$$

*Demostración.* Sigue de 1.3.5 y 1.3.6. ■

**1.3.9. Observación.** *Transposiciones cambian la paridad: si  $\tau$  es una transposición y  $\sigma \in S_n$  es cualquier permutación, entonces*

$$\text{sgn}(\tau\sigma) = -\text{sgn}\sigma.$$

*Demostración.* Está claro que cuando  $\sigma$  es de la forma  $(i i + 1)$ , el signo cambia al opuesto. Luego, hemos visto en 1.3.6 que toda transposición  $(a b)$  es una composición de  $2k - 1$  transposiciones de esta forma, donde  $k = b - a$ . El número  $2k - 1$  es impar. ■

Como hemos visto en el ejemplo 1.3.2, en  $S_3$  hay 3 pares y 3 impares permutaciones. Esto no es una coincidencia.

**1.3.10. Corolario.** *Para  $n \geq 2$  el número de permutaciones pares en  $S_n$  es igual al número de permutaciones impares.*

*Demostración.* Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned}\phi: S_n &\rightarrow S_n, \\ \sigma &\mapsto (1 2)\sigma.\end{aligned}$$

Es una biyección (de hecho  $\phi \circ \phi = \text{id}$ ) que según 1.3.9 aplica toda permutación par a una permutación impar y viceversa. ■

**1.3.11. Corolario.** *La paridad de una permutación  $\sigma$  es precisamente la paridad de la longitud de alguna descomposición en transposiciones: si*

$$\sigma = \tau_k \cdots \tau_1,$$

para algunas transposiciones  $\tau_i$ , entonces

$$\text{sgn}\sigma = (-1)^k.$$



**1.3.12. Corolario.** Para dos diferentes descomposiciones en transposiciones

$$\sigma = \tau_k \cdots \tau_1 = \tau'_\ell \cdots \tau'_1$$

los números  $k$  y  $\ell$  necesariamente tienen la misma paridad:  $k \equiv \ell \pmod{2}$ .

**1.3.13. Digresión.** A veces 1.3.11 se toma por la definición del signo, pero luego hay que demostrar que esta fórmula tiene sentido; es decir deducir 1.3.12 sin usar el signo. He aquí una breve explicación en términos del tipo de ciclo de  $\sigma$ , que es evidentemente un invariante de  $\sigma$ , a diferencia de la longitud de una descomposición en transposiciones. Para toda transposición  $\tau = (i j)$  hay dos posibilidades.

- 1)  $i$  y  $j$  pertenecen al mismo ciclo. En este caso en  $\tau\sigma$  este ciclo se descompone en dos.
- 2)  $i$  y  $j$  pertenecen a diferentes ciclos (posiblemente de orden 1). Entonces se ve que en  $\tau\sigma$  estos dos ciclos se unen en uno.

En ambos casos el número de ciclos disjuntos cambia su paridad para  $\tau\sigma$ . Ahora si tenemos

$$\sigma = \tau_k \cdots \tau_1 = \tau'_\ell \cdots \tau'_1,$$

entonces se ve que los números  $k$  y  $\ell$  deben tener la misma paridad.

**1.3.14. Observación.** Para dos permutaciones  $\sigma, \tau \in S_n$  se tiene

$$\text{sgn}(\sigma\tau) = \text{sgn} \sigma \cdot \text{sgn} \tau.$$

*Demostración.* Está claro de la interpretación del signo en 1.3.11. ■

**1.3.15. Corolario.** Tenemos

$$\text{sgn}(\sigma^{-1}) = \text{sgn} \sigma.$$

*Demostración.*

$$\text{sgn} \sigma \cdot \text{sgn}(\sigma^{-1}) = \text{sgn}(\sigma\sigma^{-1}) = \text{sgn}(\text{id}) = +1.$$
■

**1.3.16. Definición.** Al conjunto de las permutaciones pares en  $S_n$  lo llamamos **grupo alternante** y lo denotamos por  $A_n$ :

$$A_n := \{\sigma \in S_n \mid \text{sgn} \sigma = +1\} \subset S_n.$$

Tenemos las siguientes propiedades:

- $\text{id} \in A_n$  (puesto que  $\text{sgn}(\text{id}) = +1$ ),
- si  $\sigma, \tau \in A_n$ , entonces  $\sigma\tau \in A_n$  (véase 1.3.14),
- si  $\sigma \in A_n$ , entonces  $\sigma^{-1} \in A_n$  (véase 1.3.15).

- conjugando las permutaciones de  $A_n$  por las permutaciones de  $S_n$ , se obtienen también permutaciones de  $A_n$ : para todo  $\sigma \in A_n$  y  $\tau \in S_n$  tenemos  $\tau\sigma\tau^{-1} \in A_n$ .

(De hecho,  $\text{sgn}(\tau\sigma\tau^{-1}) = \text{sgn } \tau \cdot \text{sgn } \sigma \cdot \text{sgn}(\tau^{-1}) = \text{sgn } \sigma$ .)

Además, hemos calculado en 1.3.10 que

$$|A_n| = |S_n|/2 = n!/2.$$

### 1.3.17. Ejemplo.

$$A_2 = \{\text{id}\},$$

$$A_3 = \{\text{id}, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}.$$

En  $S_4$  las permutaciones son de la forma

$$\text{id}, (\bullet\bullet), (\bullet\bullet\bullet), (\bullet\bullet)(\bullet\bullet), (\bullet\bullet\bullet\bullet).$$

Luego, todas las transposiciones son impares. Los 3-ciclos son pares, ya que son productos de dos transposiciones:

$$(i\ j\ k) = (i\ j)(j\ k).$$

Los 4-ciclos con impares, siendo productos de 3 transposiciones:

$$(i\ j\ k\ \ell) = (i\ j)(j\ k)(k\ \ell).$$

Entonces, los elementos de  $A_4$  son

$$\begin{aligned} & \text{id}, \\ & (1\ 2\ 3), (1\ 2\ 4), (1\ 3\ 2), (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 2), (1\ 4\ 3), (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3), \\ & (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3). \end{aligned}$$

De hecho, en la lista de arriba tenemos  $1 + 8 + 3 = 12 = 4!/2$  permutaciones. ▲

## 1.4 Ejercicios

**Ejercicio 1.1.** Encuentre la descomposición en ciclos disjuntos para la permutación

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 6 & 5 & 1 & 4 & 2 & 3 & 10 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in S_{10}$$

y su signo.

**Ejercicio 1.2.** Calcule la descomposición en ciclos disjuntos del producto de ciclos

$$(1\ 2)(2\ 5\ 3)(1\ 5\ 7\ 3\ 2\ 6\ 4)(4\ 7\ 6) \in S_7$$

y su signo.

**Ejercicio 1.3.** Demuestre la fórmula para el signo de un  $k$ -ciclo:

$$\text{sgn}(i_1\ i_2\ \dots\ i_k) = (-1)^{k-1}.$$

En general, si  $\sigma \in S_n$  afecta  $m$  elementos (en el sentido de que  $\sigma(i) \neq i$  para  $m$  números  $i$ ) y tiene una descomposición en  $s$  ciclos disjuntos, entonces

$$\text{sgn}\ \sigma = (-1)^{m-s}.$$

Por ejemplo,

$$\sigma = (1\ 2)(3\ 6\ 4)(5\ 11\ 8)$$

afecta  $1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 11$ , entonces  $m = 8$ , y en la expresión de arriba hay  $s = 3$  ciclos disjuntos. Entonces,  $\text{sgn}\ \sigma = (-1)^{8-3} = -1$ .

Ojo: según nuestra terminología, el último ejercicio nos dice que una permutación cíclica de orden par  $k$  es impar (tiene signo  $-1$ ) y viceversa.

Para realizar cualquier permutación, se puede fijar algún elemento y cada vez hacer intercambios solo con este.

**Ejercicio 1.4.** Fijemos algún elemento de  $\{1, \dots, n\}$ , por ejemplo  $1$ . Demuestre que toda transposición  $(i\ j)$  puede ser escrita como una composición de transposiciones de la forma  $(1\ k)$ . Deduzca que toda permutación  $\sigma \in S_n$  para  $n \geq 2$  es un producto de transposiciones

$$(1\ 2), (1\ 3), \dots, (1\ n).$$

De hecho, para expresar cualquier permutación, es suficiente usar una sola transposición, un  $n$ -ciclo y su inverso.

**Ejercicio 1.5.** Demuestre que todo elemento de  $S_n$  puede ser expresado como un producto de

$$(1\ 2), (1\ 2\ \dots\ n), (1\ 2\ \dots\ n)^{-1}.$$

Indicación: use que los elementos de  $S_n$  se expresan como productos de transposiciones de la forma  $(i\ i+1)$  y la fórmula  $\sigma(i_1\ i_2\ \dots\ i_k)\sigma^{-1} = (\sigma(i_1)\ \sigma(i_2)\ \dots\ \sigma(i_k))$ .

#### 1.4. EJERCICIOS

---

En los siguientes ejercicios vamos a demostrar un resultado similar para los grupos alternantes.

**Ejercicio 1.6.** Sean  $i, j, k, \ell$  números distintos. Verifique las relaciones para la composición de transposiciones

$$(i j)(j k) = (i j k),$$
$$(i j)(k \ell) = (i j k)(j k \ell).$$

Deduzca que para  $n \geq 3$  todo elemento de  $A_n$  es una composición de ciclos de orden 3.

**Ejercicio 1.7.** Demuestre que para  $n \geq 3$  todo elemento de  $A_n$  es una composición de ciclos de la forma  $(1 i j)$ .

Indicación: use el ejercicio 1.6.

**Ejercicio 1.8.** Demuestre que para  $n \geq 3$  todo elemento de  $A_n$  es una composición de ciclos de la forma  $(1 2 i)$ .

Indicación: use el ejercicio 1.7.

**Ejercicio 1.9.** Demuestre que para  $n \geq 3$  todo elemento de  $A_n$  es una composición de ciclos de la forma  $(i i + 1 i + 2)$ .

Indicación: note que es un análogo de la descomposición de los elementos de  $S_n$  mediante las transposiciones de la forma  $(i i + 1)$ . Para  $i > 3$  demuestre la identidad

$$(1 2 i) = (1 2 i - 2)(1 2 i - 1)(i - 2 i - 1 i)(1 2 i - 2)(1 2 i - 1)$$

Luego, proceda por inducción sobre  $i$  y use el ejercicio 1.8.

**Ejercicio 1.10.** Demuestre que para  $n \geq 3$  todo elemento de  $A_n$  puede ser escrito como el producto de

- $(1 2 3), (2 3 \dots n), (2 3 \dots n)^{-1}$ , si  $n$  es par;
- $(1 2 3), (1 2 \dots n), (1 2 \dots n)^{-1}$ , si  $n$  es impar.

Indicación: use la fórmula  $\sigma(i_1 i_2 \dots i_k) \sigma^{-1} = (\sigma(i_1) \sigma(i_2) \dots \sigma(i_k))$  y el ejercicio 1.9.

La moraleja de los ejercicios de arriba: aunque  $S_n$  y  $A_n$  tienen muchos elementos, estos se expresan en términos de solamente dos de ellos (y sus inversos).

# Capítulo 2

## Grupos

Después de estudiar el grupo simétrico  $S_n$  y el grupo alternante  $A_n$ , podemos definir qué es un grupo en general.

### 2.1 Definición de grupos abstractos

2.1.1. **Definición.** Un **grupo** es un conjunto  $G$  junto con una operación binaria

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G, \\ (g, h) &\mapsto g * h \end{aligned}$$

que satisface las siguientes propiedades.

G1) La operación  $*$  es **asociativa**: para cualesquiera  $g, h, k \in G$  tenemos

$$(g * h) * k = g * (h * k).$$

G2) Existe un **elemento neutro**  $e \in G$  tal que

$$e * g = g = g * e$$

para todo  $g \in G$ .

G3) Para todo elemento  $g \in G$  existe su **inverso**  $g' \in G$  tal que

$$g * g' = e = g' * g.$$

2.1.2. **Definición.** Si  $G$  es un conjunto finito, el número  $|G|$  se llama el **orden** de  $G$ .

2.1.3. **Definición.** Además, si la operación  $*$  en  $G$  es **conmutativa**, es decir

$$g * h = h * g$$

para cualesquiera  $g, h \in G$ , entonces se dice que  $G$  es un grupo **abeliano**\* o **conmutativo**.

**2.1.4. Ejemplo.** Un conjunto de un elemento  $\{e\}$  puede ser dotado de manera única de estructura de un grupo. Este se llama el **grupo trivial**. Es abeliano :-). Por abuso de notación este también se denota por  $e$ . ▲

**2.1.5. Ejemplo.** Hemos visto en el capítulo 1 que el grupo simétrico  $S_X$  y en particular  $S_n$  es un grupo. La operación es la composición de permutaciones; el elemento neutro es la permutación identidad  $\text{id}$ . El grupo  $S_2 = \{\text{id}, (1\ 2)\}$  es abeliano. El grupo  $S_n$  para  $n \geq 3$  no es abeliano. De hecho, este contiene, por ejemplo, las transposiciones  $(1\ 2)$  y  $(2\ 3)$  que no conmutan:

$$(1\ 2)(2\ 3) = (1\ 2\ 3), \quad (2\ 3)(1\ 2) = (1\ 3\ 2).$$

El grupo alternante  $A_n \subset S_n$  es también un grupo respecto a las mismas operaciones que  $S_n$ . Notamos que

$$A_3 = \{\text{id}, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$$

es abeliano. En efecto, tenemos

$$(1\ 2\ 3)(1\ 3\ 2) = (1\ 3\ 2)(1\ 2\ 3) = \text{id}.$$

Para  $n \geq 4$  el grupo  $A_n$  no es abeliano: por ejemplo, los 3-ciclos  $(1\ 2\ 3)$  y  $(1\ 2\ 4)$  no conmutan:

$$(1\ 2\ 3)(1\ 2\ 4) = (1\ 3)(2\ 4), \quad (1\ 2\ 4)(1\ 2\ 3) = (1\ 4)(2\ 3).$$

▲

## 2.2 Algunas observaciones respecto a los axiomas de grupos

**2.2.1. Observación (Unicidad del elemento neutro).** *En un grupo hay un elemento único  $e \in G$  que satisface*

$$e * g = g = g * e$$

para todo  $g \in G$ .

*Demostración.* Sea  $e' \in G$  otro elemento con la misma propiedad. Entonces,

$$e = e' * e = e'.$$

■

---

\*NIELS HENRIK ABEL (1802–1829), matemático noruego, conocido por sus contribuciones en análisis (estudio de las series y de las integrales elípticas) y álgebra. Usando la teoría de grupos demostró su célebre teorema que dice que las ecuaciones polinomiales generales de grado  $\geq 5$  no pueden resolverse por radicales. Murió de tuberculosis a los 26 años. El lector puede buscar en internet más información sobre su trágica biografía para enterarse de cómo era la vida de los matemáticos del siglo XIX.

**2.2.2. Observación (Unicidad de inversos).** Para  $g \in G$  un elemento  $g'$  tal que

$$(2.1) \quad g * g' = e = g' * g.$$

es único.

*Demostración.* Sea  $g'' \in G$  otro elemento tal que

$$(2.2) \quad g * g'' = e = g'' * g.$$

Luego,

$$g' \stackrel{(G2)}{=} g' * e \stackrel{(2.2)}{=} g' * (g * g'') \stackrel{(G1)}{=} (g' * g) * g'' \stackrel{(2.1)}{=} e * g'' \stackrel{(G2)}{=} g''.$$

■

**2.2.3. Observación (Asociatividad generalizada).** Supongamos que  $*$  es una operación asociativa: para cualesquiera  $g, h, k \in G$  tenemos

$$(g * h) * k = g * (h * k).$$

Entonces en una expresión

$$g_1 * g_2 * \cdots * g_n$$

todos los posibles modos de poner los paréntesis dan el mismo resultado.

*Demostración.* Funciona el mismo argumento que vimos en el capítulo 0 para las composiciones de aplicaciones. ■

Normalmente vamos a usar la notación **multiplicativa**: escribir “ $g \cdot h$ ” o simplemente “ $gh$ ” en vez de “ $g * h$ ”. En este caso también sería lógico denotar el elemento neutro por 1, o por  $1_G$  para subrayar que es el elemento neutro de un grupo  $G$ . En vez de “operación  $*$ ” vamos a decir “producto”. Hay que recordar que en general este producto no es conmutativo: en general  $gh \neq hg$  (cuando el grupo no es abeliano). También será útil la notación para  $g \in G$  y  $n \in \mathbb{Z}$

$$g^n := \begin{cases} \underbrace{g \cdots g}_{n \text{ veces}}, & \text{si } n > 0, \\ 1, & \text{si } n = 0, \\ (g^{-n})^{-1}, & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

Note que se tiene la identidad

$$(g^m)^n = g^{mn}.$$

No olvidemos que la multiplicación no es conmutativa en general, así que, por ejemplo,  $(gh)^2 = ghgh$ , y en general no es lo mismo que  $g^2h^2 = ggghh$ .

Cuando el grupo es abeliano, es común la notación **aditiva**: en vez de “ $g * h$ ” se escribe “ $g + h$ ”. En este caso el elemento neutro se denota por 0.

## 2.2. ALGUNAS OBSERVACIONES RESPECTO A LOS AXIOMAS DE GRUPOS

Puesto que para cada  $g \in G$  su inverso  $g' \in G$  está definido de modo único, vamos a denotarlo por  $g^{-1}$ :

$$gg^{-1} = 1 = g^{-1}g.$$

En la notación aditiva, vamos a denotar los grupos abelianos por las letras  $A, B, C$  y sus elementos por  $a, b, c$ . En vez de los elementos inversos se habla de los elementos **opuestos** que se denotan por  $-a$ :

$$a + (-a) = 0 = (-a) + a.$$

Se usa la notación

$$(2.3) \quad n \cdot a := \begin{cases} \underbrace{a + \cdots + a}_{n \text{ veces}}, & \text{si } n > 0, \\ 0, & \text{si } n = 0, \\ -((-n) \cdot a), & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

Note que si  $A$  es un grupo abeliano, entonces para cualesquiera  $m, n \in \mathbb{Z}$ ,  $a, b \in A$  se tiene

$$\begin{aligned} (m+n) \cdot a &= m \cdot a + n \cdot a, \\ m \cdot (a+b) &= m \cdot a + m \cdot b, \\ (mn) \cdot a &= m \cdot (n \cdot a), \\ 1 \cdot a &= a. \end{aligned}$$

**2.2.4. Observación (Cancelación).** En todo grupo se cumple la cancelación:

$$gh' = gh'' \Rightarrow h' = h'', \quad g'h = g''h \Rightarrow g' = g''.$$

*Demostración.* Multiplicando la identidad  $gh' = gh''$  por  $g^{-1}$  por la izquierda, se obtiene

$$g^{-1} \cdot (gh') = g^{-1} \cdot (gh'')$$

Luego,

$$h' = 1 \cdot h' = (g^{-1}g) \cdot h' = g^{-1} \cdot (gh') = g^{-1} \cdot (gh'') = (g^{-1}g) \cdot h'' = 1 \cdot h'' = h''.$$

De la misma manera, la identidad  $g'h = g''h$  puede ser multiplicada por  $h^{-1}$  por la derecha. ■

**2.2.5. Observación.** Para todo  $g \in G$  se tiene  $(g^{-1})^{-1} = g$ .

**2.2.6. Observación.** Para un producto de dos elementos  $gh$  se tiene

$$(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}.$$

En general,

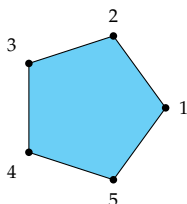
$$(g_1g_2 \cdots g_{n-1}g_n)^{-1} = g_n^{-1}g_{n-1}^{-1} \cdots g_2^{-1}g_1^{-1}.$$

Para entender la fórmula  $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$ , piense en el siguiente ejemplo: primero nos ponemos los calcetines y luego los zapatos. La operación inversa es primero quitarse los zapatos y luego los calcetines.



## 2.3 Grupos diédricos

Para un número fijo  $n = 3, 4, 5, \dots$  consideremos un polígono regular  $P$  de  $n$  vértices centrado en el origen del plano euclidiano  $\mathbb{R}^2$ . Numeremos sus vértices.



Pentágono regular.

Consideremos las isometrías del plano euclidiano  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que preservan el polígono; es decir,  $f(P) = P$ . Estas forman un grupo respecto a la composición. El elemento neutro es la aplicación identidad  $\text{id}$ . Este grupo se llama el **grupo de simetrías del  $n$ -ágono regular** o el **grupo diédrico**  $D_n$  <sup>\*\*</sup>.

Recordemos que las isometrías pueden ser descompuestas en aplicaciones de tres tipos: traslación, rotación y reflexión (simetría). Podemos descartar las traslaciones, ya que solo la traslación trivial (identidad) preserva  $P$ . Para las rotaciones, está claro que solo las rotaciones por los múltiplos de  $360^\circ/n$  preservan  $P$ . Por ejemplo, sea  $r: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la rotación de  $360^\circ/n$  grados en sentido antihorario. Su aplicación inversa  $r^{-1}$  es la rotación de  $360^\circ/n$  grados en sentido horario, que también puede ser realizada como la rotación de  $(n-1)360^\circ/n$  grados. Todas las rotaciones distintas son

$$r, r^2, r^3, \dots, r^{n-1}.$$

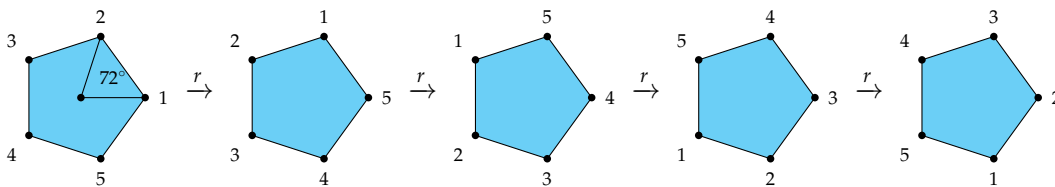
Aquí escribimos

$$r^i := \underbrace{r \circ \dots \circ r}_i.$$

Por la definición,  $r^0 := \text{id}$  y en este caso está claro que

$$r^n = \text{id}$$

(es la rotación de  $360^\circ$ ).



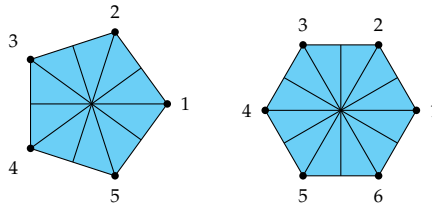
<sup>\*</sup>Del griego "di-", "dos" y "edra", que en este caso significa "cara". Por ejemplo, de la misma manera la palabra "dilema" significa "dos lemas [proposiciones]". El término "poliedro" significa una figura que tiene varias caras. En este caso  $P$  es una figura plana y entonces se puede decir que  $P$  tiene dos caras.

<sup>\*\*</sup>Ojo: en muchos textos el mismo grupo se denota por  $D_{2n}$ .

### 2.3. GRUPOS DIÉDRICOS

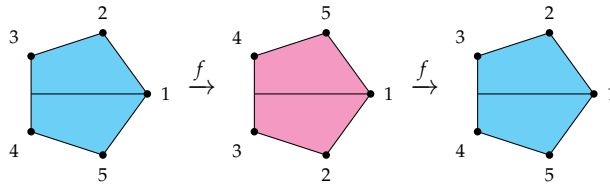
Las reflexiones que preservan  $P$  son precisamente las reflexiones respecto a los ejes de simetría de nuestro polígono regular. En total tenemos  $n$  ejes de simetría:

- si  $n$  es impar, cada uno de ellos pasa por el origen y uno de los vértices;
- si  $n$  es par, hay  $n/2$  ejes de simetría que pasan por los vértices opuestos y  $n/2$  que pasan por los lados opuestos.



(Más adelante veremos que de hecho, las propiedades del grupo  $D_n$  dependen la paridad de  $n$ .)

Sea  $f$  la reflexión respecto al eje que pasa por el origen y el vértice 1.



Tenemos

$$f^2 = \text{id}.$$

Obviamente,  $f$  no se expresa en términos de rotaciones:

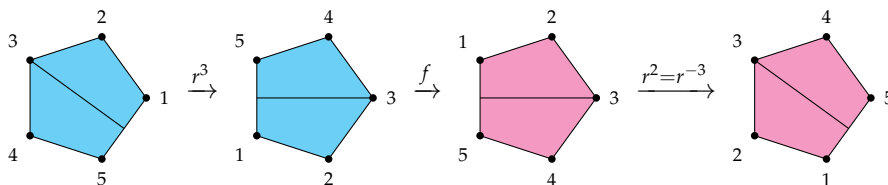
$$f \neq r^i \text{ para ningún } i,$$

y en general, los elementos

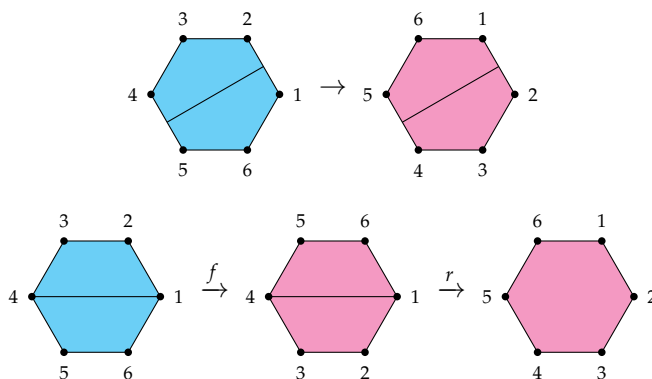
$$f, f \circ r, f \circ r^2, f \circ r^3, \dots, f \circ r^{n-1}$$

son distintos y no coinciden con los  $r^i$ .

Notemos que una reflexión respecto a otro eje puede ser realizada como una rotación seguida por  $f$  y otra rotación:



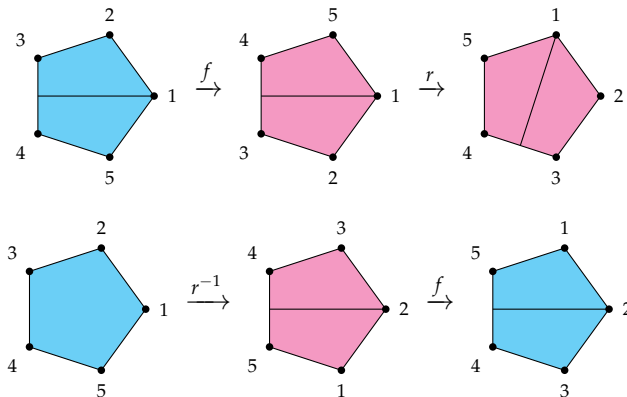
Si  $n$  es par, las reflexiones respecto a los ejes que pasan por los lados opuestos también pueden ser expresadas mediante  $f$  y  $r$ :



Entonces, hemos visto que todas las simetrías del  $n$ -ágono regular pueden ser expresadas como sucesiones de aplicaciones de  $r$  y  $f$ . Notamos que

$$r \circ f = f \circ r^{-1};$$

en palabras: una reflexión seguida por una rotación de  $360^\circ/n$  es lo mismo que la rotación de  $360^\circ/n$  en el sentido opuesto seguida por la reflexión respecto a la misma recta.



En particular,  $r \circ f \neq f \circ r$ , y el grupo  $D_n$  no es abeliano. Por inducción se sigue que

$$r^i \circ f = f \circ r^{-i} \text{ para todo } i.$$

Usando esto, se puede concluir que

$$D_n = \{\text{id}, r, r^2, \dots, r^{n-1}, f, fr, fr^2, \dots, fr^{n-1}\}$$

(a partir de ahora voy a omitir el signo "o"). Los elementos enumerados son visiblemente distintos, y hemos calculado entonces que

$$|D_n| = 2n.$$

## 2.4. GRUPO DE CUATERNIONES

---

Note que la tabla de multiplicación de  $D_n$  puede ser resumida en las fórmulas

$$r^n = f^2 = \text{id}, \quad rf = fr^{-1}.$$

Por ejemplo,

$$(fr^i) \cdot (fr^j) = f \cdot (r^i f) \cdot r^j = f \cdot (fr^{-i} \cdot r^j) = r^{j-i}.$$

**2.3.1. Ejemplo.** Consideremos el caso particular de  $D_3$ . Este grupo tiene 6 elementos:

$$D_3 = \{\text{id}, r, r^2, f, fr, fr^2\}$$

y la tabla de multiplicación viene dada por

$\cdot$	id	$r$	$r^2$	$f$	$fr$	$fr^2$
id	id	$r$	$r^2$	$f$	$fr$	$fr^2$
$r$	$r$	$r^2$	id	$fr^2$	$f$	$fr$
$r^2$	$r^2$	id	$r$	$fr$	$fr^2$	$f$
$f$	$f$	$fr$	$fr^2$	id	$r$	$r^2$
$fr$	$fr$	$fr^2$	$f$	$r^2$	id	$r$
$fr^2$	$fr^2$	$f$	$fr$	$r$	$r^2$	id

▲

Los grupos diédricos  $D_n$  nos van a servir como un ejemplo importante para varias definiciones y resultados.

## 2.4 Grupo de cuaterniones

**2.4.1. Ejemplo.** Consideremos el conjunto de 8 elementos

$$Q_8 = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}.$$

Definamos la multiplicación de elementos de la siguiente manera.  $\pm 1$  se comporta de modo habitual: para todo  $x \in Q_8$  tenemos

$$1 \cdot x = x \cdot 1, \quad (-1) \cdot x = x \cdot (-1) = -x.$$

y

$$(-1)^2 = 1.$$

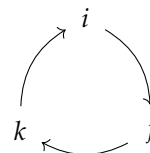
Los cuadrados de  $i, j, k$  son iguales a  $-1$ :

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1.$$

La multiplicación de  $i, j, k$  entre ellos es dada por

$$\begin{aligned} ij &= k, \quad ji = -k, \\ jk &= i, \quad kj = -i, \\ ki &= j, \quad ik = -j. \end{aligned}$$

$\cdot$	1	$i$	$j$	$k$
1	1	$i$	$j$	$k$
$i$	$i$	-1	$k$	$-j$
$j$	$j$	$-k$	-1	$i$
$k$	$k$	$j$	$-i$	-1



El dibujo a la derecha puede ayudar a memorizar las fórmulas: los caminos nos dan  $i \rightarrow j \rightarrow ij = k$ ,  $j \rightarrow k \rightarrow jk = i$ ,  $k \rightarrow i \rightarrow ki = j$ , y cuando cambiamos el orden de múltiplos, el signo cambia.

Esto define un grupo que se llama el **grupo de cuaterniones**. El elemento neutro es 1, y el lector puede verificar existencia de elementos inversos (es fácil) y asociatividad (esto puede ser un poco tedioso). Este grupo no es abeliano.

·	1	-1	i	-i	j	-j	k	-k
1	1	-1	i	-i	j	-j	k	-k
-1	-1	1	-i	i	-j	j	-k	k
i	i	-i	-1	1	k	-k	-j	j
-i	-i	i	1	-1	-k	k	j	-j
j	j	-j	-k	k	-1	1	i	-i
-j	-j	j	k	-k	1	-1	-i	i
k	k	-k	j	-j	-i	i	-1	1
-k	-k	k	-j	j	i	-i	1	-1

▲

## 2.5 Subgrupos

**2.5.1. Definición.** Sea  $G$  un grupo. Se dice que un subconjunto  $H \subseteq G$  es un **subgrupo** de  $G$  si

- 1)  $1_G \in H$ ,
- 2) para cualesquiera  $h_1, h_2 \in H$  tenemos  $h_1 * h_2 \in H$ ,
- 3) para todo  $h \in H$  tenemos  $h^{-1} \in H$ .

Las condiciones 1)–3) implican que  $H$  es también un grupo respecto a la misma operación. Ya que  $hh^{-1} = 1$  para todo  $h \in H$ , la condición 1) sirve solo para decir que  $H \neq \emptyset$ .

**2.5.2. Ejemplo.** Todo grupo  $G$  tiene por lo menos dos subgrupos: el **subgrupo trivial**  $\{1\}$  y el mismo  $G$ . Los subgrupos distintos de estos dos se llaman **subgrupos propios** de  $G$ . ▲

**2.5.3. Ejemplo.** Hemos visto que el grupo alternante  $A_n$  es un subgrupo de  $S_n$ . ▲

**2.5.4. Ejemplo.** Las isometrías del plano euclidiano  $\mathbb{R}^2$  forman un grupo. El grupo diédrico  $D_n$  es un subgrupo finito. ▲

**2.5.5. Observación.** Si  $H_i \subset G$  es una familia de subgrupos de  $G$ , entonces su intersección  $\bigcap_i H_i$  es también un subgrupo.

*Demostración.* Claro a partir de la definición de subgrupo. ■

Ahora compilemos las listas completas de subgrupos para algunos grupos de cardinalidad pequeña.

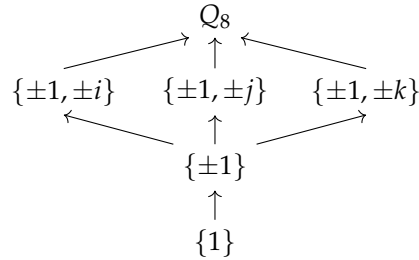
2.5. SUBGRUPOS

---

**2.5.6. Ejemplo.** En el grupo  $Q_8$ , aparte de los subgrupos triviales  $\{1\}$  y  $Q_8$ , hay un subgrupo de orden 2, que es  $\{\pm 1\}$ , y tres subgrupos de orden 4:

$$\{\pm 1, \pm i\}, \{\pm 1, \pm j\}, \{\pm 1, \pm k\}.$$

Las inclusiones de subgrupos están dibujados en el diagrama de abajo.



**2.5.7. Ejemplo.** Consideremos el grupo diédrico

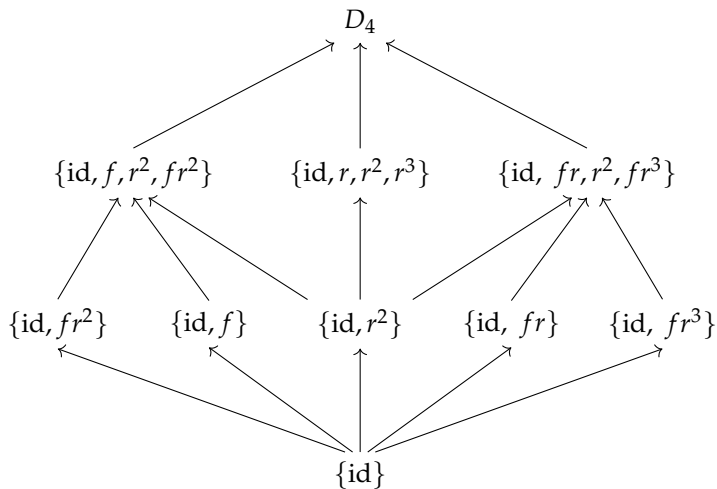
$$D_4 = \{\text{id}, r, r^2, r^3, f, fr, fr^2, fr^3\}.$$

Al igual que  $Q_8$ , este tiene 8 elementos, pero la estructura de sus subgrupos es totalmente diferente. Tenemos 5 subgrupos de orden 2:

$$\{\text{id}, r^2\}, \{\text{id}, f\}, \{\text{id}, fr\}, \{\text{id}, fr^2\}, \{\text{id}, fr^3\}.$$

y 3 subgrupos de orden 4:

$$\{\text{id}, f, r^2, fr^2\}, \{\text{id}, r, r^2, r^3\}, \{\text{id}, fr, r^2, fr^3\}.$$



**2.5.8. Ejemplo.** Revisando los elementos del grupo alternante  $A_4$ , se puede compilar la lista de sus subgrupos.

Cada una de las tres permutaciones de la forma  $(\bullet \bullet)(\bullet \bullet)$  corresponde a un subgrupo de orden 2:

$$\{\text{id}, (1\ 2)(3\ 4)\}, \quad \{\text{id}, (1\ 3)(2\ 4)\}, \quad \{\text{id}, (1\ 4)(2\ 3)\}.$$

Y junto con  $\text{id}$ , estas tres permutaciones forman un subgrupo de orden 4:

$$V := \{\text{id}, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$$

(la letra  $V$  viene del alemán "Vierergruppe", "grupo de cuatro"; el mismo grupo se conoce como el **grupo de Klein**).

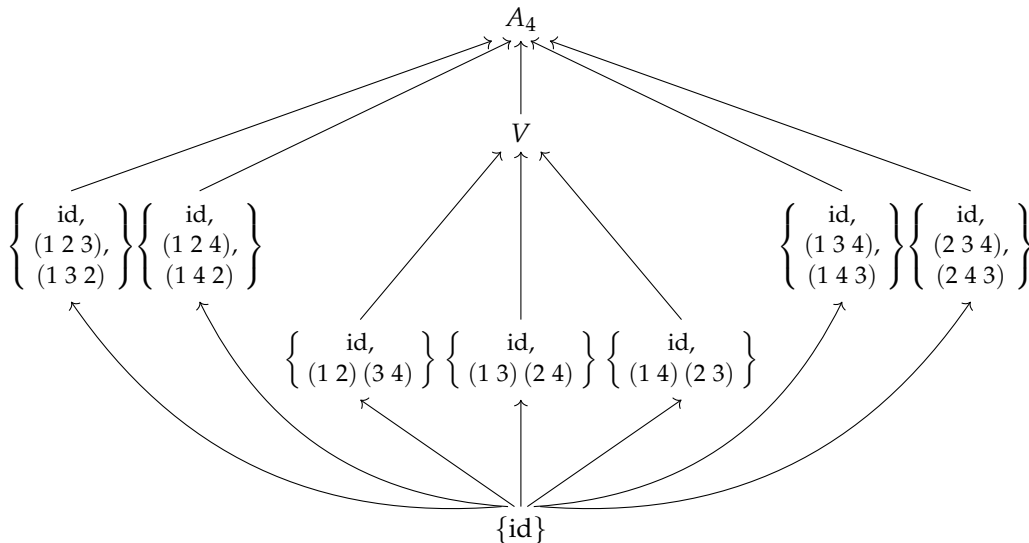
o	id	(1 2)(3 4)	(1 3)(2 4)	(1 4)(2 3)
id	id	(1 2)(3 4)	(1 3)(2 4)	(1 4)(2 3)
(1 2)(3 4)	(1 2)(3 4)	id	(1 4)(2 3)	(1 3)(2 4)
(1 3)(2 4)	(1 3)(2 4)	(1 4)(2 3)	id	(1 2)(3 4)
(1 4)(2 3)	(1 4)(2 3)	(1 3)(2 4)	(1 2)(3 4)	id

Para los 3-ciclos tenemos

$$\begin{aligned} (1\ 2\ 3)^2 &= (1\ 3\ 2), & (1\ 3\ 2)^2 &= (1\ 2\ 3), \\ (1\ 2\ 4)^2 &= (1\ 4\ 2), & (1\ 4\ 2)^2 &= (1\ 2\ 4), \\ (1\ 3\ 4)^2 &= (1\ 4\ 3), & (1\ 4\ 3)^2 &= (1\ 3\ 4), \\ (2\ 3\ 4)^2 &= (2\ 4\ 3), & (2\ 4\ 3)^2 &= (2\ 3\ 4), \end{aligned}$$

lo que nos da cuatro subgrupos de orden 3:

$$\{\text{id}, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}, \quad \{\text{id}, (1\ 2\ 4), (1\ 4\ 2)\}, \quad \{\text{id}, (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 3)\}, \quad \{\text{id}, (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3)\}.$$



## 2.6. EL CENTRO

Hay una manera ingeniosa de ver que en  $A_4$  no hay otros subgrupos, pero todavía no hemos desarrollado el lenguaje adecuado. ▲

**2.5.9. Comentario.** El número de subgrupos de  $S_n$  y  $A_n$  crece muy rápido con  $n$ . Hemos descrito los subgrupos de  $A_4$ , pero en  $A_5$  ya hay 59 subgrupos. De la misma manera, en  $S_3$  hay 6 diferentes subgrupos (haga el ejercicio 2.6 de abajo), pero en  $S_4$  ya son 30.

$n$ :	2	3	4	5	6	7	8	9	10
subgrupos de $S_n$ :	2	6	30	156	1455	11 300	151 221	1 694 723	29 594 446
subgrupos de $A_n$ :	1	2	10	59	501	3786	48 337	508 402	6 469 142

Véanse <http://oeis.org/A005432> y <http://oeis.org/A029725>.

## 2.6 El centro

Un subgrupo importante es el centro.

**2.6.1. Definición.** Para un grupo  $G$ , se dice que  $g$  está en su **centro** si  $g$  conmuta con todos los elementos de  $G$ : tenemos  $gh = hg$  para todo  $h \in G$ . El conjunto de los elementos del centro se denota por

$$Z(G) := \{g \in G \mid gh = hg \text{ para todo } h \in G\} = \{g \in G \mid g = hgh^{-1} \text{ para todo } h \in G\}.$$

**2.6.2. Observación.**  $G$  es abeliano si y solamente si  $Z(G) = G$ .

**2.6.3. Observación.**  $Z(G)$  es un subgrupo de  $G$ .

*Demostración.* Para la identidad  $1 \in G$  obviamente tenemos  $1h = h1 = h$  para todo  $h \in G$ , entonces  $1 \in Z(G)$ . Luego, si  $g, g' \in Z(G)$ , entonces para todo  $h \in G$

$$(gg')h = g(g'h) = g(hg') = (gh)g' = (hg)g' = h(gg'),$$

así que  $gg' \in Z(G)$ . Por fin, si  $g \in Z(G)$ , entonces para todo  $h \in G$  tenemos

$$g^{-1}h = (h^{-1}g)^{-1} = (gh^{-1})^{-1} = hg^{-1},$$

así que  $g^{-1} \in Z(G)$ . ■

**2.6.4. Ejemplo.** Para el grupo simétrico tenemos  $Z(S_n) = \{\text{id}\}$  para  $n \geq 3$ , y en este sentido  $S_n$  está muy lejos de ser abeliano.

De hecho, sea  $\sigma \in S_n$  una permutación diferente de  $\text{id}$ . Entonces existen diferentes índices  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  tales que

$$\sigma: i \mapsto j.$$

Ya que  $n > 2$ , podemos elegir otro índice  $k$  tal que  $k \neq i$  y  $k \neq j$ . Consideremos la transposición  $\tau = (jk)$ . Tenemos

$$\tau\sigma\tau^{-1}: \tau(i) = i \mapsto \tau(j) = k.$$

Entonces,  $\tau\sigma\tau^{-1} \neq \sigma$  y por lo tanto  $\sigma \notin Z(G)$ . ▲



**2.6.5. Ejemplo.** Revisando la tabla de multiplicación del grupo de cuaterniones  $Q_8$ , se ve que

$$Z(Q_8) = \{\pm 1\}.$$

▲

**2.6.6. Ejemplo.** Calculemos el centro del grupo diédrico  $D_n$  para  $n \geq 3$ . Tenemos

$$D_n = \{\text{id}, r, r^2, \dots, r^{n-1}, f, fr, fr^2, \dots, fr^{n-1}\}.$$

Ya que todos los elementos de  $D_n$  son productos de  $f$  y  $r$ , tenemos  $x \in Z(D_n)$  si y solamente si

$$fx = xf, \quad rx = xr.$$

1) Para  $x$  de la forma  $fr^i$  tenemos

$$rx = xr \iff rfr^i = fr^i \cdot r \iff fr^{i-1} = fr^{i+1} \iff r^{i-1} = r^{i+1}.$$

La última condición es equivalente a  $i-1 \equiv i+1 \pmod{n}$ , lo que es imposible para  $n > 2$ . Podemos concluir que los elementos  $fr^i$  no están en el centro.

2) Para  $x$  de la forma  $r^i$  tenemos obviamente  $rx = xr$ . Luego,

$$fx = xf \iff fr^i = r^i f \iff fr^i = fr^{-i} \iff r^i = r^{-i}.$$

Esto es equivalente a  $i \equiv -i \pmod{n}$ ; es decir,  $2i \equiv 0 \pmod{n}$ . Esto es posible solamente si  $n$  es par e  $i = n/2$ .

Resumiendo nuestros cálculos, tenemos

$$Z(D_n) = \begin{cases} \{\text{id}\}, & \text{si } n \geq 3 \text{ es impar,} \\ \{\text{id}, r^{n/2}\}, & \text{si } n \geq 4 \text{ es par.} \end{cases}$$

▲

## 2.7 Ejercicios

**Ejercicio 2.1.** Calcule que  $(fr^i)^2 = \text{id}$  en  $D_n$  para cualquier  $i \in \mathbb{Z}$ . En general, calcule  $(fr^i)(fr^j)$  para  $i, j \in \mathbb{Z}$ .

**Ejercicio 2.2.** Demuestre que  $\mathbb{Q} \setminus \{-1\}$  es un grupo abeliano respecto a la operación

$$x * y := xy + x + y.$$

**Ejercicio 2.3.** Sea  $X$  un conjunto y  $2^X$  el conjunto de sus subconjuntos. Para  $A, B \subseteq X$ , definamos la *diferencia simétrica* por

$$A \Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Demuestre que  $2^X$  es un grupo abeliano respecto a  $\Delta$ .

**Ejercicio 2.4.** Para dos parámetros fijos  $a, b \in \mathbb{R}$  definamos una función

$$\begin{aligned} \phi_{a,b}: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\mapsto ax + b. \end{aligned}$$

Consideremos el conjunto

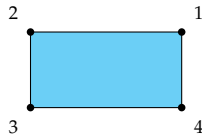
$$\text{Aff}_1(\mathbb{R}) := \{\phi_{a,b} \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}\}.$$

Verifique que  $\text{Aff}_1(\mathbb{R})$  es un grupo respecto a la composición habitual de aplicaciones y que no es abeliano.

**Ejercicio 2.5.** Supongamos que  $G$  es un grupo donde cada elemento  $g \in G$  satisface  $g^2 = 1$ . Demuestre que  $G$  es abeliano.

**Ejercicio 2.6.** Encuentre todos los subgrupos del grupo simétrico  $S_3$ .

**Ejercicio 2.7.** Escriba la tabla de multiplicación del grupo de simetrías de un rectángulo que no es un cuadrado. (Note que este tiene menos simetrías que un cuadrado.)



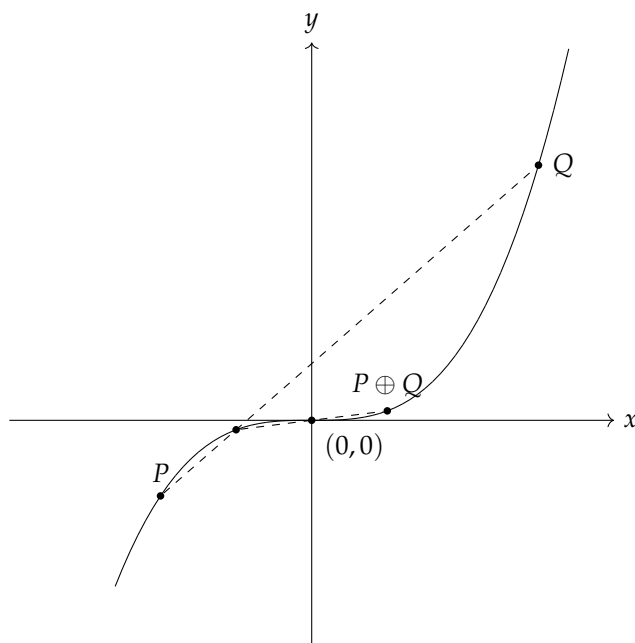
**Ejercicio 2.8.** Consideremos el conjunto de puntos  $(x, y)$  en el plano real que satisfacen la ecuación  $y = x^3$ :

$$X(\mathbb{R}) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^3\}.$$

Definamos la siguiente operación sobre  $X(\mathbb{R})$ : para dos puntos  $P, Q \in X(\mathbb{R})$ , consideremos la recta  $\ell$  que pasa por  $P$  y  $Q$ , o la tangente si  $P = Q$ . Sea  $R$  la intersección de  $\ell$  con otro punto de  $X(\mathbb{R})$ . Entonces, definimos la suma de  $P$  y  $Q$  como

$$P \oplus Q := -R;$$

es decir, el punto simétrico a  $R$  respecto al origen.



- 1) Demuestre que  $X(\mathbb{R})$  es un grupo abeliano respecto a  $\oplus$ .
- 2) Demuestre que el conjunto

$$X(\mathbb{Q}) := \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \mid y = x^3\}$$

(cuyos elementos se denominan "puntos racionales" de la curva  $X$ ) forman un subgrupo de  $X(\mathbb{R})$ .

*Nota: este ejercicio requiere un buen conocimiento del álgebra de nivel de Baldor.*

**Ejercicio 2.9.** Sea  $G$  un grupo y  $H, K \subset G$  dos subgrupos. Demuestre que  $H \cup K$  es un grupo si y solamente si  $H \subseteq K$  o  $K \subseteq H$ .

**Ejercicio 2.10.** Hemos visto que el centro del grupo simétrico es trivial:

$$Z(S_n) = \{\text{id}\} \quad \text{para } n \geq 3.$$

Demuestre que para el grupo alternante sobre 4 elementos

$$Z(A_4) = \{\text{id}\}.$$

*Nota: más adelante veremos en el curso que  $Z(A_n) = \{\text{id}\}$  para  $n \geq 4$ .*



# Capítulo 3

## Anillos y cuerpos

En este curso vamos a estudiar solamente grupos, pero para ver algunos ejemplos importantes de grupos, necesitamos revisar las definiciones de diferentes estructuras algebraicas. Estas se estudian en otros cursos y bastará que el lector conozca los ejemplos principales que voy a mencionar en este capítulo.

### 3.1 Anillos

**3.1.1. Definición.** Un **anillo**  $R$  es un conjunto dotado de dos operaciones  $+$  (adición) y  $\cdot$  (multiplicación) que satisfacen los siguientes axiomas.

R1)  $R$  es un grupo abeliano respecto a  $+$ ; es decir,

R1a) la adición es asociativa: para cualesquiera  $x, y, z \in R$  tenemos

$$(x + y) + z = x + (y + z);$$

R1b) existe un elemento neutro  $0 \in R$  (cero) tal que para todo  $x \in R$  se cumple

$$0 + x = x = x + 0;$$

R1c) para todo  $x \in R$  existe un elemento opuesto  $-x \in R$  que satisface

$$(-x) + x = x + (-x) = 0;$$

R1d) la adición es conmutativa: para cualesquiera  $x, y \in R$  se cumple

$$x + y = y + x;$$

R2) la multiplicación es **distributiva** respecto a la adición: para cualesquiera  $x, y, z \in R$  se cumple

$$x \cdot (y + z) = xy + xz, \quad (x + y) \cdot z = xz + yz;$$

### 3.1. ANILLOS

---

R3) la multiplicación es asociativa: para cualesquiera  $x, y, z \in R$  tenemos

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z);$$

R4) existe un elemento neutro multiplicativo  $1 \in R$  (identidad) tal que para todo  $x \in R$  se cumple

$$1 \cdot x = x = x \cdot 1.$$

Además, si se cumple el axioma

R5) la multiplicación es conmutativa: para cualesquiera  $x, y \in R$  se cumple

$$xy = yx.$$

se dice que  $R$  es un **anillo conmutativo**.

**3.1.2. Digresión.** En algunos contextos naturales también surgen anillos sin identidad (donde no se cumple el axioma R4)) y anillos no asociativos (donde no se cumple R3)), pero los vamos a ignorar en este curso.

Note que respecto a la multiplicación, no se pide existencia de elementos inversos ( $x^{-1}$  tal que  $xx^{-1} = 1 = x^{-1}x$ ) para ningún elemento.

**3.1.3. Observación.** De los axiomas de arriba siguen las propiedades habituales como

$$\begin{aligned} 0 \cdot x &= x \cdot 0 = 0, \\ x \cdot (-y) &= (-x) \cdot y = -xy, \\ x(y - z) &= xy - xz, \quad (x - y)z = xz - yz. \end{aligned}$$

*Demostración.* Ejercicio para el lector. ■

Algunas propiedades conocidas se cumplen solamente en anillos conmutativos, como, por ejemplo, el teorema del binomio

$$(x + y)^n = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

En un anillo no conmutativo tenemos

$$(x + y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2,$$

donde  $xy$  e  $yx$  no necesariamente coinciden.

**3.1.4. Ejemplo.** Los números enteros  $\mathbb{Z}$ , racionales  $\mathbb{Q}$ , reales  $\mathbb{R}$ , complejos  $\mathbb{C}$  forman anillos conmutativos respecto a la adición y multiplicación habitual. ▲

**3.1.5. Ejemplo.** Para  $n = 1, 2, 3, \dots$  hemos notado en el capítulo 0 que sobre el conjunto

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} := \{[a]_n \mid a \in \mathbb{Z}\} = \{[0]_n, [1]_n, \dots, [n-1]_n\}$$

formado por los restos módulo  $n$

$$[a]_n := \{b \in \mathbb{Z} \mid a \equiv b \pmod{n}\}$$

se puede definir la adición y multiplicación mediante las fórmulas

$$\begin{aligned} [a]_n + [b]_n &:= [a + b]_n, \\ [a]_n \cdot [b]_n &:= [ab]_n. \end{aligned}$$

Se ve que  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  es un anillo conmutativo respecto a la adición y multiplicación módulo  $n$ . De hecho, estas operaciones son visiblemente asociativas y conmutativas. Las clases de equivalencia  $[0]_n$  y  $[1]_n$  son el cero y la identidad respectivamente. Los elementos opuestos son dados por  $-[a]_n = [-a]_n$ .

He aquí la tabla de adición y multiplicación para  $n = 4$  (escribo simplemente “[ $a$ ]” en vez de “[ $a$ ]<sub>4</sub>”):

+	[0]	[1]	[2]	[3]	·	[0]	[1]	[2]	[3]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[1]	[2]	[3]	[0]	[1]	[0]	[1]	[2]	[3]
[2]	[2]	[3]	[0]	[1]	[2]	[0]	[2]	[0]	[2]
[3]	[3]	[0]	[1]	[2]	[3]	[0]	[3]	[3]	[1]

La notación “ $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ” será clara después de la definición de grupos cociente que veremos más adelante en nuestro curso. En algunos libros de texto se encuentra la notación “ $\mathbb{Z}_n$ ”, pero su uso en este contexto es un pecado mortal: si  $n = p$  es primo, normalmente  $\mathbb{Z}_p$  denota el *anillo de los enteros  $p$ -ádicos*. No lo vamos a ver en este curso, pero es algo muy importante en álgebra y aritmética. ▲

**3.1.6. Ejemplo.** El **anillo de los enteros de Gauss** es dado por

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-1}] := \{a + b\sqrt{-1} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C},$$

donde la adición y multiplicación están definidas de la manera habitual como para los números complejos. El cero y la identidad son los números  $0 + 0 \cdot \sqrt{-1}$  y  $1 + 0 \cdot \sqrt{-1}$  respectivamente. Está claro que para cualesquiera  $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$  tenemos  $x + y \in \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$  y  $xy \in \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$  y por lo tanto todos los axiomas de anillos conmutativos se verifican fácilmente, ya que estos se cumplen para los números complejos. ▲

**3.1.7. Ejemplo.** Otro ejemplo del mismo tipo: consideremos el número complejo

$$\zeta_3 = e^{2\pi\sqrt{-1}/3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1}.$$

Es una raíz cúbica de la unidad en el sentido de que  $\zeta_3^3 = 1$ . Se cumple la relación

$$\zeta_3^2 + \zeta_3 + 1 = 0.$$

### 3.1. ANILLOS

(En general, el lector puede demostrar que para  $\zeta_n := e^{2\pi\sqrt{-1}/n}$  se cumple  $\sum_{0 \leq k < n} \zeta_n^k = 0$ .) Consideremos el conjunto

$$\mathbb{Z}[\zeta_3] := \{a + b\zeta_3 \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}.$$

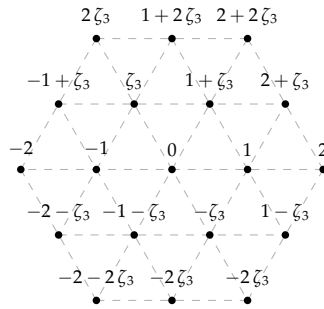
Está claro que para cualesquiera  $x, y \in \mathbb{Z}[\zeta_3]$  se tiene  $x + y \in \mathbb{Z}[\zeta_3]$ . Para la multiplicación, si  $x = a + b\zeta_3$  e  $y = c + d\zeta_3$ , entonces

$$(a + b\zeta_3) \cdot (c + d\zeta_3) = ac + (ad + bc)\zeta_3 + bd\zeta_3^2,$$

y usando la relación  $\zeta_3^2 = 1 - \zeta_3$ , podemos escribir la última expresión como

$$(ac - bd) + (bc + ad - bd)\zeta_3.$$

Entonces, para cualesquiera  $x, y \in \mathbb{Z}[\zeta_3]$  tenemos  $xy \in \mathbb{Z}[\zeta_3]$ . Después de esta verificación se ve fácilmente que  $\mathbb{Z}[\zeta_3]$  es un anillo conmutativo, puesto que  $\mathbb{C}$  lo es. Este se llama el **anillo de los enteros de Eisenstein**<sup>\*</sup>. El dibujo de abajo representa los enteros de Eisenstein en el plano complejo.



**3.1.8. Ejemplo.** Tercer y último ejemplo de este tipo: añadamos a los números enteros la raíz cuadrada de 2:

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}.$$

Tenemos

$$(a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) = ac + 2bd + (ad + bc)\sqrt{2},$$

entonces para cualesquiera  $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$  se tiene  $xy \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ . El conjunto  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$  es un anillo conmutativo respecto a la adición y multiplicación habitual de números reales. Podemos llamar  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$  el **anillo de los enteros de Pitágoras**. ▲

**3.1.9. Ejemplo.** En general, un **entero algebraico** es un número  $\alpha \in \mathbb{C}$  que satisface alguna ecuación polinomial

$$f(\alpha) = \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0,$$

<sup>\*</sup>FERDINAND GOTTHOLD MAX EISENSTEIN (1823–1852), matemático alemán, estudiante de Dirichlet, conocido por sus contribuciones en la teoría de números. Murió a los 29 años de tuberculosis (como Abel).



donde  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}$  y el coeficiente mayor  $a_n$  es igual a 1 (en este caso se dice que  $f$  es un polinomio **mónico**). Un resultado importante nos dice que todos los enteros algebraicos forman un anillo conmutativo, pero a priori no es claro para nada: si  $\alpha$  es una raíz de un polinomio  $f$  como arriba y  $\beta$  es una raíz de otro polinomio

$$g(\beta) = \beta^m + b_{m-1}\beta^{m-1} + \dots + b_1\beta + b_0,$$

entonces deben existir otros polinomios que tienen como sus raíces  $\alpha \pm \beta$  y  $\alpha\beta$ , pero ¿cómo encontrarlos?

Por ejemplo,  $\sqrt{2}$  es una raíz de la ecuación  $x^2 - 2 = 0$  y  $\sqrt{3}$  es una raíz de la ecuación  $x^2 - 3 = 0$ . Luego, la suma  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  es una raíz de la ecuación

$$x^4 - 10x^2 + 1 = 0.$$

De hecho,

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 2\sqrt{6} + 5, \quad (\sqrt{2} + \sqrt{3})^4 = 20\sqrt{6} + 49,$$

así que

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^4 - 10(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 + 1 = 0.$$

El producto  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$  es una raíz de

$$X^2 - 6 = 0.$$

En general, dados dos enteros algebraicos  $\alpha$  y  $\beta$ , no es tan fácil encontrar los polinomios mónicos con coeficientes enteros que tienen  $\alpha \pm \beta$  y  $\alpha\beta$  como sus raíces. Vamos a ver más adelante que es siempre posible. ▲

### 3.2 Anillo de matrices $M_n(R)$

Todos los anillos de arriba son conmutativos. Mencionemos un ejemplo de anillos no conmutativos muy importante que seguramente es familiar al lector.

Sea  $R$  un anillo conmutativo. Entonces las matrices de  $n \times n$  con elementos en  $R$  forman un anillo que vamos a denotar por  $M_n(R)$ . Recordemos que la adición de matrices se define término por término:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \cdots & a_{nn} + b_{nn} \end{pmatrix},$$

mientras que el producto

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

### 3.2. ANILLO DE MATRICES $M_N(R)$

---

se define mediante la fórmula

$$c_{ij} := \sum_{1 \leq k \leq n} a_{ik} b_{kj}.$$

El cero es la matriz nula

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

y el neutro multiplicativo es la matriz identidad

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En un primer curso de álgebra lineal normalmente se considera  $R = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$  y se verifican los axiomas de anillos para este caso, pero el anillo específico  $R$  es irrelevante para llevar a cabo la construcción general.

El anillo  $M_n(R)$  no es conmutativo para  $n \geq 2$ : por ejemplo, para  $n = 2$  tenemos

$$(3.1) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

y luego

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

se cumple si y solamente si  $1 = 0$ . El lector puede verificar que esto es posible si y solamente si  $R = \{0\}$  es un anillo que consiste en un elemento. Este se conoce como el **anillo nulo**.

En general, las únicas matrices que conmutan con todas las matrices son las **matrices escalares** que tienen forma

$$\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix}$$

para algún  $a \in R$ . Lo vamos a ver en los ejercicios, pero el lector puede tratar de probarlo para las matrices de  $2 \times 2$ . Por ejemplo, se puede considerar una matriz  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  y ver qué significan las identidades  $AB = BA$  para

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

### 3.3 Cuerpos

**3.3.1. Definición.** Un **cuerpo**  $k$  es un anillo conmutativo donde  $1 \neq 0$  (es decir,  $k \neq \{0\}$ ) y todo elemento no nulo es invertible. Es decir, para todo  $x \neq 0$  existe  $x^{-1}$  tal que

$$xx^{-1} = x^{-1}x = 1.$$

**3.3.2. Ejemplo.** Los anillos conmutativos  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  son cuerpos. ▲

**3.3.3. Definición.** Cuando en un anillo se tiene  $xy = 0$  para algunos elementos no nulos  $x$  e  $y$ , se dice que estos son **divisores de cero**. Si un anillo  $R$  no tiene divisores de cero, se dice que  $R$  es un **dominio de integridad**.

En otras palabras,  $R$  es un dominio de integridad si para cualesquiera  $x, y \in R$  se cumple

$$(3.2) \quad \text{si } xy = 0 \text{ entonces } x = 0 \text{ o } y = 0.$$

La existencia de elementos inversos en un cuerpo garantiza que es un dominio de integridad.

**3.3.4. Observación.** *Todo cuerpo es un dominio de integridad.*

*Demostración.* En un cuerpo, si  $x \neq 0$ , entonces existe su inverso  $x^{-1}$  y multiplicando la identidad  $xy = 0$  por  $x^{-1}$ , se obtiene

$$x^{-1}(xy) = (x^{-1}x)y = 1 \cdot y = y = 0.$$

De la misma manera,  $y \neq 0$  implica que  $x = 0$ . ■

**3.3.5. Ejemplo.** El anillo conmutativo  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  no es un cuerpo en general. Por ejemplo, en  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  tenemos divisores de cero

$$[2]_4 \cdot [2]_4 := [2 \cdot 2]_4 = [0]_4,$$

lo que contradice (3.2). El problema es que el elemento  $[2]_2$  no es invertible. ▲

**3.3.6. Observación.** *El anillo  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  de los restos módulo  $n$  es un cuerpo si y solamente si  $n = p$  es primo.*

*Demostración.* Si  $n$  no es primo, es decir,  $n = ab$  para algunos  $a, b < n$ , entonces

$$[a]_n \cdot [b]_n = [0]_n,$$

y por lo tanto  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  no es un cuerpo. En general, para un entero  $a$  existe  $b$  tal que

$$ab \equiv 1 \pmod{n}$$

(inverso módulo  $n$ ) si y solamente si  $a$  es coprimo con  $n$ ; es decir,  $\text{mcd}(a, n) = 1$ . De hecho, si  $\text{mcd}(a, n) = 1$ , entonces tenemos la identidad de Bézout\*

$$ab + nc = 1 \quad \text{para algunos } b, c \in \mathbb{Z}.$$

\*El lector que no se acuerda del mcd y sus propiedades debería consultar el apéndice A.

### 3.3. CUERPOS

Reduciendo esta identidad módulo  $n$ , se obtiene  $ab \equiv 1 \pmod{n}$ . En la otra dirección, supongamos que  $ab \equiv 1 \pmod{n}$  para algún  $b$ . Entonces, tenemos

$$ab + nc = 1$$

para algún  $c \in \mathbb{Z}$ . Pero  $\text{mcd}(a, n)$  es el mínimo número positivo de la forma  $ax + ny$  para  $x, y \in \mathbb{Z}$ .

En particular, si  $p$  es primo, para todo  $a \not\equiv 0 \pmod{p}$  existe  $b$  tal que  $ab \equiv 1 \pmod{p}$ . ■

**3.3.7. Digresión.** De hecho, existe un cuerpo de 4 elementos, mas es diferente de  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ . He aquí su tabla de adición y multiplicación:

+	0	1	$a$	$b$	·	0	1	$a$	$b$
0	0	1	$a$	$b$	0	0	0	0	0
1	1	0	$b$	$a$	1	0	1	$a$	$b$
$a$	$a$	$b$	0	1	$a$	0	$a$	$b$	1
$b$	$b$	$a$	1	0	$b$	0	$b$	1	$a$

En general, todo cuerpo finito necesariamente tiene orden  $q = p^k$  donde  $p = 2, 3, 5, 7, 11, \dots$  es primo y  $k = 1, 2, 3, 4, \dots$ . Estos cuerpos se denotan por  $\mathbb{F}_{p^k}$ . Cuando  $k = 1$ , es la misma cosa que  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , pero para  $k > 1$ , como hemos notado,  $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$  no es un cuerpo, así que  $\mathbb{F}_{p^k}$  tiene construcción diferente. Vamos a estudiarlo en la continuación de este curso.

He aquí una aplicación interesante de los cuerpos  $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ .

**3.3.8. Observación.** Si  $p$  es primo, entonces en el cuerpo  $\mathbb{F}_p$  tenemos

$$(x + y)^p = x^p + y^p$$

para cualesquiera  $x, y \in \mathbb{F}_p$

*Demostración.* El teorema del binomio nos da

$$(x + y)^p = x^p + \binom{p}{1} x^{p-1}y + \binom{p}{2} x^{p-2}y^2 + \dots + \binom{p}{p-1} xy^{p-1} + y^p.$$

Pero  $p \mid \binom{p}{i}$  para  $i = 1, \dots, p-1$  (¡ejercicio!), así que todos los términos de la suma son congruentes a cero módulo  $p$  (es decir, son nulos en  $\mathbb{F}_p$ ), excepto  $x^p$  e  $y^p$ . ■

La aplicación  $x \mapsto x^p$  sobre  $\mathbb{F}_p$  se conoce como la **aplicación de Frobenius**.

**3.3.9. Corolario (Pequeño teorema de Fermat).** : Sea  $p$  un número entero. Si  $a$  es un número entero tal que  $p \nmid a$ , entonces

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

*Demostración.* Notemos que en  $\mathbb{F}_p$  se cumple

$$(3.3) \quad x^p = x.$$

De hecho, si  $x = [0]$  o  $x = [1]$ , es obvio. Luego, por inducción, si esto se cumple para  $x = [a]$ , entonces

$$([a + 1])^p = ([a] + [1])^p = [a]^p + [1]^p = [a] + [1] = [a + 1].$$

Ahora si  $a$  es un entero tal que  $p \nmid a$ , entonces  $x = [a]$  es un elemento no nulo en  $\mathbb{F}_p$ , y por lo tanto es invertible. La identidad (3.3) implica

$$a^{p-1} = a^{-1}a^p = a^{-1}a = 1.$$

Es decir,

$$[a^{p-1}] = [a]^{p-1} = [1] \iff a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

■

### 3.4 Anillo de polinomios $R[X]$

**3.4.1. Definición.** Sea  $R$  un anillo conmutativo. Un **polinomio** con coeficientes en  $R$  en una variable  $X$  es una *suma formal*

$$f = \sum_{i \geq 0} a_i X^i,$$

donde  $a_i \in R$ , y casi todos los  $a_i$  son nulos, excepto un número finito de ellos. Esto quiere decir que la suma formal de arriba es finita:  $f = \sum_{0 \leq i \leq n} a_i X^i$  para algún  $n$ .

Las sumas de polinomios están definidas por

$$(3.4) \quad \sum_{i \geq 0} a_i X^i + \sum_{i \geq 0} b_i X^i := \sum_{i \geq 0} (a_i + b_i) X^i$$

y los productos por

$$(3.5) \quad \left( \sum_{i \geq 0} a_i X^i \right) \cdot \left( \sum_{i \geq 0} b_i X^i \right) := \sum_{k \geq 0} \left( \sum_{i+j=k} a_i b_j \right) X^k.$$

El cero es el polinomio  $0 = \sum_{0 \leq i \leq n} a_i X^i$  donde todos los coeficientes  $a_i$  son nulos y la identidad es el polinomio  $1 = \sum_{0 \leq i \leq n} a_i X^i$  donde  $a_0 = 1$  y el resto de los coeficientes son nulos. Ya que  $R$  es un anillo conmutativo, de la definición de producto está claro que  $f \cdot g = g \cdot f$ , y también se puede ver que el producto es asociativo:  $f \cdot (g \cdot h) = (f \cdot g) \cdot h$ . Todos los polinomios forman un anillo conmutativo que se denota por  $R[X]$ .

**3.4.2. Definición.** Para un polinomio  $f = \sum_{i \geq 0} a_i X^i \in R[X]$  su **grado** es dado por

$$\deg f := \max\{i \mid a_i \neq 0\}.$$

Para el polinomio nulo, se define

$$\deg 0 := -\infty.$$

Si  $f = 0$  o  $\deg f = 0$ , se dice que  $f$  es un polinomio **constante**.

**3.4.3. Proposición.** Para cualesquiera  $f, g \in R[X]$  se tiene

$$\deg(fg) \leq \deg f + \deg g.$$

Además, si  $R$  es un dominio de integridad, entonces

$$\deg(fg) = \deg f + \deg g.$$

*Demostración.* Para  $f = 0$  o  $g = 0$  la identidad  $\deg(fg) = \deg f + \deg g$  se cumple gracias a nuestra definición del grado del polinomio nulo. Supongamos entonces que  $f$  y  $g$  no son nulos y que  $\deg f = m$ ,  $\deg g = n$ ,

$$f = \sum_{0 \leq i \leq m} a_i X^i, \quad g = \sum_{0 \leq i \leq n} b_i X^i.$$

El coeficiente de  $X^k$  en el producto  $fg$  es  $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$ . Ya que  $a_i = 0$  para  $i > m$  y  $b_j = 0$  para  $j > n$ , está claro que  $c_k = 0$  para  $k > n + m$ , así que por lo menos se cumple  $\deg(fg) \leq \deg f + \deg g$ . Para  $k = m + n$  tenemos

$$c_{m+n} = a_0 b_{m+n} + a_1 b_{m+n-1} + \cdots + a_m b_n + \cdots + a_{m+n-1} b_1 + a_{m+n} b_0 = a_m b_n$$

(casi todos los términos en la suma son nulos por la misma razón). Si  $R$  es un dominio de integridad, entonces  $a_m \neq 0$  y  $b_n \neq 0$  implica que  $c_{m+n} = a_m b_n \neq 0$ . Esto demuestra que  $\deg(fg) = \deg f + \deg g$ . ■

**3.4.4. Corolario.** El anillo  $R[X]$  es un dominio de integridad si y solamente si  $R$  lo es.

*Demostración.* Si  $R$  es un dominio de integridad, entonces para el producto de dos polinomios tenemos

$$\deg(fg) = \deg f + \deg g.$$

En particular, si  $\deg f > -\infty$  y  $\deg g > -\infty$ , tenemos  $\deg(fg) > -\infty$ . En otras palabras,  $f \neq 0$  y  $g \neq 0$  implica  $fg \neq 0$ .

Viceversa, si  $R[X]$  es un dominio de integridad, el anillo  $R$  corresponde a los polinomios de grado 0 y por lo tanto es también un dominio de integridad. ■

**3.4.5. Comentario.** Por nuestra definición, un polinomio es una suma formal  $\sum_{i \geq 0} a_i X^i$  donde casi todos los coeficientes son nulos. Si permitimos existencia de un número infinito de coeficientes no nulos, estas sumas formales forman un anillo conmutativo respecto a la suma y producto dados por las mismas fórmulas (3.4) y (3.5). Este anillo se llama el **anillo de series formales en  $X$**  y se denota por  $R[[X]]$ . Si  $R$  es un dominio de integridad, entonces  $R[[X]]$  es también un dominio de integridad. Sin embargo, esto se demuestra de otra manera: la noción de grado no tiene sentido si en  $\sum_{i \geq 0} a_i X^i$  puede haber coeficientes no nulos de grado arbitrariamente grande. Para los detalles, haga los ejercicios al final de este capítulo.

**3.4.6. Definición.** Para un polinomio  $f = \sum_{0 \leq i \leq n} a_i X^i \in R[X]$  y un elemento  $c \in R$  la **evaluación de  $f$  en  $c$**  es el elemento

$$f(c) := \sum_{0 \leq i \leq n} a_i c^i \in R.$$

Si  $f(c) = 0$ , se dice que  $c$  es una **raíz** (o un **cerro**) de  $f$ .

**3.4.7. Proposición.** Sea  $f \in R[X]$  un polinomio no nulo con coeficientes en un dominio de integridad  $R$ . Entonces  $f$  tiene  $\leq \deg f$  raíces distintas en  $R$ .

**3.4.8. Ejemplo.** El polinomio cuadrático  $f = X^2 + 1 \in \mathbb{C}[X]$  tiene dos raíces complejas  $\pm\sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ . Si lo consideramos como un polinomio en  $\mathbb{R}[X]$ , entonces este no tiene raíces.

El polinomio  $f = X^2 + 1 \in \mathbb{F}_3[X]$  no tiene raíces en  $\mathbb{F}_3$ ; tenemos

$$f([0]) = [1], \quad f([1]) = [2], \quad f([2]) = [2]^2 + [1] = [2].$$

El polinomio  $f = 2X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 3X + 1 \in \mathbb{Z}[X]$  puede ser escrito como

$$f = 2(X-1)(X-\sqrt{-1})(X+\sqrt{-1})(X-1/2).$$

Su única raíz en  $\mathbb{Z}$  es 1.

El polinomio  $f = 2X^2 + 2X \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  es cuadrático, pero todo elemento de  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  es su raíz:

$$f([0]) = f([1]) = f([2]) = f([3]) = [0].$$

Esto no contradice el enunciado de arriba, ya que  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  no es un dominio de integridad.  $\blacktriangle$

Para demostrar 3.4.7, necesitamos el siguiente resultado auxiliar.

**3.4.9. Lema.** Sea  $f \in R[X]$  un polinomio con coeficientes en un anillo conmutativo  $R$ . Entonces  $f(c) = 0$  para algún  $c \in R$  si y solamente si

$$f = (X - c) \cdot g$$

para algún polinomio  $g \in R[X]$ .

*Demostración (división sintética).* En una dirección es obvio: si podemos escribir

$$f = (X - c) \cdot g,$$

entonces la evaluación en  $c$  nos da

$$f(c) = (c - c) \cdot g(c) = 0.$$

En la otra dirección, supongamos que  $\deg f = n$  y escribamos

$$f = \sum_{0 \leq i \leq n} a_i X^i.$$

Es posible encontrar  $g$  de la forma deseada de grado  $n - 1$ . Escribamos

$$g = \sum_{0 \leq i \leq n-1} b_i X^i,$$

donde  $b_i$  son ciertos coeficientes que necesitamos encontrar. Analicemos la identidad

$$f = (X - c) \cdot g + b_{-1},$$

### 3.4. ANILLO DE POLINOMIOS $R[X]$

---

donde  $b_{-1} \in R$  es alguna constante. Tenemos

$$\sum_{0 \leq i \leq n} a_i X^i = (X - c) \sum_{0 \leq i \leq n-1} b_i X^i + b_{-1}.$$

Desarrollando la parte derecha, se obtiene

$$\sum_{0 \leq i \leq n} a_i X^i = \sum_{1 \leq i \leq n} b_{i-1} X^i - \sum_{0 \leq i \leq n-1} c b_i X^i + b_{-1} = \sum_{0 \leq i \leq n-1} (b_{i-1} - c b_i) X^i + b_{n-1} X^n.$$

Esto corresponde al siguiente sistema de ecuaciones sobre los  $b_i$ :

$$\begin{aligned} a_n &= b_{n-1}, \\ a_{n-1} &= b_{n-2} - c b_{n-1}, \\ a_{n-2} &= b_{n-3} - c b_{n-2}, \\ &\dots \\ a_1 &= b_0 - c b_1, \\ a_0 &= b_{-1} - c b_0 \end{aligned}$$

y nos lleva a las recurrencias

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= a_n, \\ b_{n-2} &= a_{n-1} + c b_{n-1}, \\ b_{n-3} &= a_{n-2} + c b_{n-2}, \\ &\dots \\ b_i &= a_{i+1} + c b_{i+1}, \\ &\dots \\ b_0 &= a_1 + c b_1, \\ b_{-1} &= a_0 + c b_0 \end{aligned}$$

que definen el polinomio  $g$  y la constante  $b_{-1}$ . Evaluando en  $X = c$  ambas partes de la identidad

$$f = (X - c) \cdot g + b_{-1},$$

se obtiene

$$b_{-1} = f(c) = 0. \quad \blacksquare$$

**3.4.10. Comentario.** Las recurrencias de la demostración precedente nos dan un modo eficaz de calcular el valor  $f(c)$  para un polinomio  $f = \sum_{0 \leq i \leq n} a_i X^i$ : si

$$b_{n-1} = a_n \quad \text{y} \quad b_i = a_{i+1} + c b_{i+1} \quad \text{para} \quad -1 \leq i \leq n-1,$$



entonces

$$f(c) = b_{-1}.$$

Esto se conoce como el **algoritmo de Horner**<sup>\*</sup>. Note que usando las recurrencias de arriba,  $f(c)$  puede ser calculado usando solamente  $n$  sumas y  $n$  multiplicaciones, lo que es mucho más eficaz que calcular directamente

$$a_0 + a_1 c + a_2 c^2 + \cdots + a_n c^n.$$

Ahora estamos listos para probar 3.4.7.

*Demostración de 3.4.7.* Inducción sobre  $n = \deg f$ . Si  $n = 0$ , entonces  $f$ , siendo un polinomio constante no nulo, no tiene raíces. Para el paso inductivo, notamos que si  $c \in R$  es una raíz de  $f$ , entonces

$$f = (X - c)g$$

para algún polinomio  $g \in R[X]$ . Luego,

$$\deg f = \deg(X - c) \cdot \deg g$$

(aquí se usa la hipótesis que  $R$  es un dominio de integridad), así que  $\deg g = n - 1$  y por la hipótesis de inducción sabemos que  $g$  tiene  $\leq n - 1$  raíces. Toda raíz de  $g$  es una raíz de  $f$ , y si  $c' \neq c$  es una raíz de  $f$ , entonces la identidad en  $R$

$$0 = f(c') = (c - c') \cdot g(c')$$

implica que  $g(c') = 0$  y  $c'$  es una raíz de  $g$  (de nuevo, se usa la hipótesis que  $R$  es un dominio de integridad). Podemos concluir que  $f$  tiene  $\leq n$  diferentes raíces. ■

**3.4.11. Comentario.** A veces hay cierta confusión entre los polinomios y funciones polinomiales. Para cualquier polinomio  $f \in R[X]$  la evaluación define una función

$$\begin{aligned} R &\rightarrow R, \\ c &\mapsto f(c). \end{aligned}$$

Sin embargo, no siempre existe una correspondencia biyectiva entre las aplicaciones que surgen de esta manera y los elementos de  $R[X]$ . Por ejemplo, para  $R = \mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  hay solamente  $p^p$  diferentes aplicaciones  $\mathbb{F}_p \rightarrow \mathbb{F}_p$ , mientras que el anillo  $\mathbb{F}_p[X]$  es infinito: sus elementos son las expresiones formales  $\sum_{0 \leq i \leq n} a_i X^i$  con  $a_i \in \mathbb{F}_p$ .

Para dar un ejemplo específico: el polinomio  $X^p - X \in \mathbb{F}_p[X]$  evaluado en cualquier elemento de  $\mathbb{F}_p$  nos da 0, gracias al pequeño teorema de Fermat que acabamos de revisar arriba, mientras que  $X^p - X$  no es nulo como un elemento de  $\mathbb{F}_p[X]$  (es decir, como una *expresión formal*).

<sup>\*</sup>WILLIAM GEORGE HORNER (1786–1837), matemático inglés.

## 3.5 ¿Para qué sirven los anillos?

Hay mucho más ejemplos importantes de anillos conmutativos y cuerpos, pero no es el tema principal de nuestro curso, así que por el momento es todo. Los anillos conmutativos tienen mucha importancia en las matemáticas modernas. En muchas situaciones hay una correspondencia

Objetos geométricos (“espacios”)  $\longleftrightarrow$  Objetos algebraicos hechos de anillos conmutativos.

A veces para solucionar problemas geométricos, se puede pasar a los objetos algebraicos correspondientes. Por otro lado, hay muchos objetos algebraicos que surgen naturalmente en la teoría de números; un ejemplo básico son los anillos como  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ ,  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$  que hemos visto arriba. A tales objetos se puede asociar ciertos “espacios” y aplicar la intuición geométrica para resolver problemas aritméticos. Es uno de los temas principales de las matemáticas a partir de los años 50-60 del siglo pasado. Preguntar a un matemático moderno si él prefiere trabajar con objetos algebraicos o usar la intuición geométrica es como preguntarse si uno prefiere quedarse ciego o sordo.

Los cuerpos son un caso muy especial de anillos, y de hecho, bajo la correspondencia geométrica-algebraica que mencioné, a un cuerpo corresponde un espacio que consiste solo de un punto. Los anillos  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ ,  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$  son también bastante sencillos: si los cuerpos tienen dimensión 0, estos tienen dimensión 1. Hay anillos de dimensiones superiores, por ejemplo si consideramos el anillo de polinomios  $R[X]$ , la dimensión sube por 1:

$$\dim R[X] = \dim R + 1.$$

En particular, la dimensión de  $k[X]$  para un cuerpo  $k$  es igual a 1. También hay anillos de dimensión infinita, pero no los vamos a encontrar en este curso.

## 3.6 Espacios vectoriales

Para terminar, recordemos la definición de espacios vectoriales que el lector probablemente conoce de cursos de álgebra lineal.

**3.6.1. Definición.** Sea  $k$  un cuerpo. Un **espacio vectorial** es un conjunto  $V$  dotado de dos operaciones

$$\begin{aligned} +: V \times V &\rightarrow V, \\ (u, v) &\mapsto u + v; \\ \cdot: k \times V &\rightarrow V, \\ (a, u) &\mapsto a \cdot u. \end{aligned}$$

Los elementos de  $V$  se llaman **vectores** mientras que los elementos de  $k$  se llaman **escalares**. La operación  $+$  se llama la **adición** de vectores y la operación  $\cdot$  se llama la **acción** de los escalares sobre los vectores. Se pide que se cumplan los siguientes axiomas.

V1)  $V$  es un grupo abeliano respecto a la operación  $+$ ; es decir, la adición es asociativa:

$$(u + v) + w = u + (v + w) \quad \text{para cualesquiera } u, v, w \in V,$$

existe el elemento neutro (**vector nulo**)  $0 \in V$  tal que

$$0 + u = u + 0 = u \quad \text{para todo } u \in V,$$

para todo vector  $u \in V$  existe el **vector opuesto**  $-u$  tal que

$$u + (-u) = (-u) + u = 0 \quad \text{para todo } u \in V,$$

y la adición es conmutativa:

$$u + v = v + u \quad \text{para cualesquiera } u, v \in V.$$

V2) La multiplicación por escalares es bilineal: se cumple

$$(a + b) \cdot u = a \cdot u + b \cdot u \quad \text{para cualesquiera } a, b \in k, u \in V$$

y

$$a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v \quad \text{para todo } a \in k, u, v \in V.$$

V3) La multiplicación por escalares es compatible con la multiplicación en  $k$ :

$$(ab) \cdot u = a \cdot (b \cdot u) \quad \text{para cualesquiera } a, b \in k, u \in V.$$

V4) La multiplicación por la identidad de  $k$  es la identidad:

$$1 \cdot u = u \quad \text{para todo } u \in V.$$

Muchas propiedades habituales siguen de V1)–V4):

- 1)  $a \cdot 0 = 0$  para todo  $a \in k$ ,
- 2)  $0 \cdot u = 0$  para todo  $u \in V$ ,
- 3)  $(-1) \cdot u = -u$  para todo  $u \in V$ ,
- 4)  $a \cdot (-u) = -(a \cdot u)$  para todo  $a \in k, u \in V$ ,
- 5)  $a \cdot (u - v) = a \cdot u - a \cdot v$  para todo  $a \in k, u, v \in V$ ,
- 6)  $(a - b) \cdot u = a \cdot u - b \cdot u$  para cualesquiera  $a, b \in k, u \in V$ .

**3.6.2. Ejemplo.** Si  $k$  es un cuerpo y  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  es un número natural fijo, entonces el conjunto

$$k^n := \underbrace{k \times \cdots \times k}_n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in k\}$$

respecto a las operaciones

$$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) := (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$$

y

$$a \cdot (a_1, \dots, a_n) := (aa_1, \dots, aa_n)$$

forma un espacio vectorial. El vector nulo es dado por  $0 = (0, \dots, 0)$  y los vectores opuestos son  $-(a_1, \dots, a_n) = (-a_1, \dots, -a_n)$ .

Para  $n = 0$  tenemos  $k^0 := \{0\}$  que se llama el **espacio vectorial nulo**. ▲

El lector debe conocer bien los espacios como  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{C}^n$ . En geometría y análisis a veces se usan estructuras extra sobre estos espacios como una métrica, la topología asociada, productos interiores, etc. Todo esto no hace parte de la definición abstracta de espacios vectoriales. Sin embargo, muchos resultados básicos que se estudian en un curso introductorio de álgebra lineal siguen de los axiomas V1)–V4).

**3.6.3. Definición.** Una **base** de un espacio vectorial  $V$  es una familia de vectores  $(u_i)_{i \in I}$  tal que todo vector  $u \in V$  puede ser escrito como una combinación lineal de los  $u_i$ :

$$u = \sum_{i \in I} a_i \cdot u_i,$$

donde  $a_i = 0$  para todo  $i$ , excepto un número finito. Además, se pide que los  $u_i$  sean linealmente independientes; es decir,

$$\text{si } \sum_{i \in I} a_i \cdot u_i = 0, \text{ entonces } a_i = 0 \text{ para todo } i \in I.$$

**3.6.4. Ejemplo.** El espacio  $k^n$  viene con una base canónica dada por

$$e_1 := (1, 0, 0, \dots, 0), \quad e_2 := (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad e_n = (0, 0, 0, \dots, 1).$$

▲

Recordemos que todo espacio vectorial  $V$  posee una base y todas las bases tienen la misma cardinalidad que es la **dimensión** de  $V$ . La existencia de base en cualquier espacio vectorial se demuestra mediante el lema de Zorn.

**3.6.5. Ejemplo.**  $\mathbb{R}$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{Q}$  y por lo tanto posee una base sobre  $\mathbb{Q}$ . Es decir, existe una familia de números reales linealmente independientes sobre  $\mathbb{Q}$  tal que todo número  $x \in \mathbb{R}$  es una combinación lineal de ellos. Esta base se conoce como la **base de Hamel**. Es infinita y no es explícita; su existencia puede ser justificada por el lema de Zorn. ▲

### 3.7 Ejercicios

**Ejercicio 3.1.** Sea  $p$  un número primo. Demuestre que los coeficientes binomiales  $\binom{p}{i}$  son divisibles por  $p$  para  $i = 1, \dots, p-1$ .

**Ejercicio 3.2.** Para  $n = 2, 3, 4, 5, \dots$  consideremos la raíz de la unidad  $\zeta_n := e^{2\pi i/n} \in \mathbb{C}$ .

1) Demuestre la identidad  $1 + \zeta_n + \zeta_n^2 + \dots + \zeta_n^{n-1} = 0$ .

2) Consideremos el conjunto

$$\mathbb{Z}[\zeta_n] := \{a_0 + a_1 \zeta_n + a_2 \zeta_n^2 + \dots + a_{n-1} \zeta_n^{n-1} \mid a_i \in \mathbb{Z}\}.$$

Demuestre que es un anillo conmutativo respecto a la suma y adición habitual de los números complejos.

**Ejercicio 3.3.** Deduzca de los axiomas de anillos las siguientes propiedades:

$$0 \cdot x = x \cdot 0 = 0, \quad x \cdot (-y) = (-x) \cdot y = -xy, \quad x(y - z) = xy - xz, \quad (x - y)z = xz - yz$$

para cualesquiera  $x, y, z \in R$ .

**Ejercicio 3.4.** En un anillo  $R$  puede ser que  $0 = 1$ . Pero en este caso  $R$  tiene solo un elemento.

1) Demuestre que un conjunto  $R = \{0\}$  que consiste en un elemento puede ser dotado de modo único de una estructura de un anillo conmutativo. Este anillo se llama el **anillo nulo**.

2) Demuestre que si en un anillo  $R$  se cumple  $1 = 0$ , entonces  $R = \{0\}$ .

**Ejercicio 3.5.** Para un número fijo  $n = 1, 2, 3, \dots$  consideremos el conjunto de fracciones con  $n$  en el denominador:

$$\mathbb{Z}[1/n] := \left\{ \frac{m}{n^k} \mid m \in \mathbb{Z}, k = 0, 1, 2, 3, \dots \right\} \subset \mathbb{Q}.$$

De modo similar, para un número primo fijo  $p = 2, 3, 5, 7, 11, \dots$  consideremos las fracciones con denominador no divisible por  $p$ :

$$\mathbb{Z}_{(p)} := \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0, p \nmid b \right\} \subset \mathbb{Q}.$$

Verifique que  $\mathbb{Z}[1/n]$  y  $\mathbb{Z}_{(p)}$  son anillos conmutativos respecto a la suma y producto habituales.

**Ejercicio 3.6.** Sea  $R$  un anillo conmutativo. Una **serie formal de potencias** con coeficientes en  $R$  en una variable  $X$  es una suma formal

$$f = \sum_{i \geq 0} a_i X^i,$$

donde  $a_i \in R$ . A diferencia de polinomios, se puede tener un número infinito de coeficientes no nulos. Las sumas y productos de series formales están definidos por

$$\sum_{i \geq 0} a_i X^i + \sum_{i \geq 0} b_i X^i := \sum_{i \geq 0} (a_i + b_i) X^i, \quad \left( \sum_{i \geq 0} a_i X^i \right) \cdot \left( \sum_{i \geq 0} b_i X^i \right) := \sum_{k \geq 0} \left( \sum_{i+j=k} a_i b_j \right) X^k.$$

### 3.7. EJERCICIOS

---

- 1) Note que las series formales forman un anillo conmutativo. Este se denota por  $R[[X]]$ .
- 2) Verifique la identidad

$$(1 + X) \cdot (1 - X + X^2 - X^3 + X^4 - X^5 + \dots) = 1$$

en  $R[[X]]$  (es decir, los coeficientes de la serie formal al lado derecho son  $a_0 = 1$  y  $a_i = 0$  para  $i > 0$ ).

- 3) Para  $R = \mathbb{Q}$  verifique la identidad  $\left(\sum_{i \geq 0} \frac{X^i}{i!}\right)^n = \sum_{i \geq 0} \frac{n^i}{i!} X^i$  en el anillo de series formales  $\mathbb{Q}[[X]]$ .

**Ejercicio 3.7.** Para una serie de potencias  $f \in R[[X]]$  sea  $v(f)$  el mínimo índice tal que el coeficiente correspondiente no es nulo:

$$v(f) := \min\{i \mid a_i \neq 0\};$$

y si  $f = 0$ , pongamos  $v(0) := +\infty$ .

- 1) Demuestre que para cualesquiera  $f, g \in R[[X]]$  se cumple la desigualdad

$$v(fg) \geq v(f) + v(g)$$

y la igualdad  $v(fg) = v(f) + v(g)$  si  $R$  es un dominio de integridad.

- 2) Demuestre que  $R[[X]]$  es un dominio de integridad si y solamente si  $R$  lo es.

**Ejercicio 3.8.** Sea  $R$  un anillo conmutativo. En el anillo de matrices  $M_n(R)$  denotemos por  $e_{ij}$  para  $1 \leq i, j \leq n$  la matriz cuyos coeficientes son nulos, salvo el coeficiente  $(i, j)$  que es igual a 1. Sea  $A \in M_n(R)$  una matriz arbitraria de  $n \times n$  con coeficientes en  $R$ .

- 1) Demuestre que en el producto de matrices  $e_{ij} A$  la fila  $i$  es igual a la fila  $j$  de  $A$  y el resto de los coeficientes son nulos.
- 2) Demuestre que en el producto de matrices  $A e_{ij}$  la columna  $j$  es igual a la columna  $i$  de  $A$  y el resto de los coeficientes son nulos.
- 3) Demuestre que

$$e_{ij} A = A e_{ij}$$

para todo  $1 \leq i, j \leq n$ ,  $i \neq j$  si y solamente si  $A$  es una **matriz escalar**:

$$A = aI = \begin{pmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{pmatrix}$$

para algún  $a \in R$ .

- 4) Concluya que las únicas matrices en  $M_n(R)$  que conmutan con todas las matrices son las matrices escalares.

# Capítulo 4

## Grupos de unidades

Después del capítulo precedente, podemos dar algunos ejemplos de grupos que no hemos visto antes. Los siguientes ejemplos son banales en el sentido de que ciertas estructuras algebraicas ya tienen axiomas de grupos como una parte de su definición.

**4.0.1. Ejemplo.** Todo anillo (y en particular todo cuerpo) es un grupo abeliano respecto a la adición. Por ejemplo,  $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  son grupos abelianos respecto a la adición habitual de números. ▲

**4.0.2. Ejemplo.** Los restos módulo  $n$  forman un anillo y en particular un grupo abeliano respecto a la adición. ▲

**4.0.3. Ejemplo.** Tenemos una cadena de subgrupos aditivos

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

**4.0.4. Ejemplo.** Los números enteros divisibles por  $n$  forman un subgrupo de  $\mathbb{Z}$ : ▲

$$n\mathbb{Z} := \{nx \mid x \in \mathbb{Z}\}.$$

**4.0.5. Ejemplo.** Todo espacio vectorial es un grupo abeliano respecto a la adición de vectores. Por ejemplo, para todo cuerpo  $k$ , el espacio vectorial  $k^n$  es un grupo abeliano. ▲

### 4.1 El grupo de unidades de un anillo

En general, salvo 1 (identidad) en un anillo  $R$  no hay elementos inversos respecto a la multiplicación. Los elementos que tienen inversos forman un grupo.

**4.1.1. Definición.** Si para  $u \in R$  existe  $u^{-1}$  tal que

$$(4.1) \quad uu^{-1} = u^{-1}u = 1,$$

se dice que  $u$  es una **unidad**<sup>\*</sup> o un **elemento invertible**.

Como siempre, el elemento  $u^{-1}$  está definido de modo único por (4.1); esto se demuestra de la misma manera que la unicidad de los elementos inversos en un grupo.

**4.1.2. Comentario.** Supongamos que para  $u \in R$  existen dos elementos  $a, b \in R$  tales que  $au = 1$  y  $ub = 1$ . En este caso necesariamente  $a = b$ :

$$a = a \cdot 1 = a(ub) = (au)b = 1 \cdot b = b.$$

Las unidades forman un grupo respecto a la multiplicación que se denota por  $R^\times$ . De hecho,  $1 \in R^\times$  es el elemento neutro y si  $u, v \in R^\times$ , entonces  $uv \in R^\times$ :

$$(uv) \cdot (v^{-1}u^{-1}) = (v^{-1}u^{-1}) \cdot (uv) = 1.$$

**4.1.3. Ejemplo.** En un cuerpo todo elemento no nulo  $x \in k$  tiene su inverso  $x^{-1}$ , así que el grupo de unidades viene dado por

$$k^\times = k \setminus \{0\}.$$

Es abeliano (por nuestra definición, la multiplicación en cuerpo es conmutativa). ▲

**4.1.4. Ejemplo.** Para  $\mathbb{Z}$  obviamente tenemos

$$\mathbb{Z}^\times = \{\pm 1\}.$$

▲

**4.1.5. Ejemplo.** Tenemos una cadena de subgrupos multiplicativos

$$\{\pm 1\} \subset \mathbb{Q}^\times \subset \mathbb{R}^\times \subset \mathbb{C}^\times.$$

▲

**4.1.6. Ejemplo.** El grupo  $\mathbb{Q}^\times$  tiene como su subgrupo el conjunto  $\mathbb{Q}_{>0}$  formado por los números racionales positivos. De la misma manera, los números reales positivos  $\mathbb{R}_{>0}$  forman un subgrupo de  $\mathbb{R}^\times$ . ▲

## 4.2 El círculo y las raíces de la unidad

El grupo  $\mathbb{C}^\times$  contiene varios subgrupos interesantes.

**4.2.1. Ejemplo.** Recordemos que para un número complejo  $z = x + y\sqrt{-1} \in \mathbb{C}$  su **valor absoluto** es dado por

$$|z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(x + y\sqrt{-1}) \cdot (x - y\sqrt{-1})} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

---

<sup>\*</sup>No confundir con *la identidad*  $1 \in R$ , que es nada más un ejemplo muy particular de unidades.



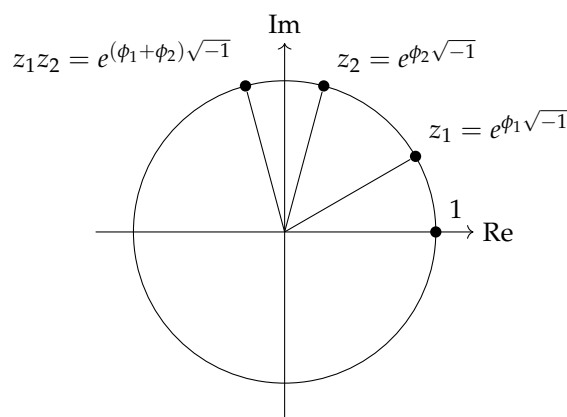
Notamos que para cualesquiera  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  se cumple

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

Se ve que el conjunto de los números complejos de valor absoluto 1

$$\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \{e^{i\phi} \mid 0 \leq \phi < 2\pi\}$$

es un subgrupo de  $\mathbb{C}^\times$  respecto a la multiplicación. Este grupo se llama el **grupo del círculo**, ya que sus elementos son los puntos del círculo unitario en el plano complejo.



▲

**4.2.2. Ejemplo.** Para un número  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ , una **raíz  $n$ -ésima de la unidad** es un número complejo  $z$  tal que

$$z^n = 1.$$

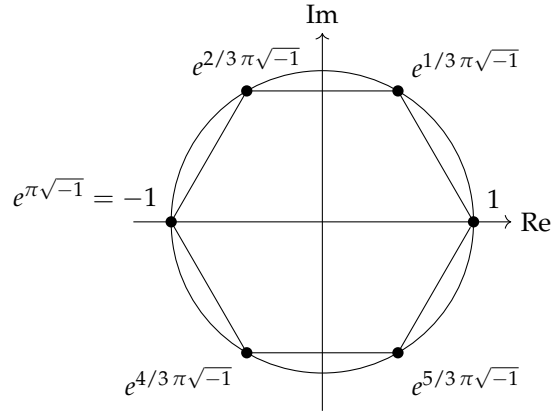
Como sabemos, esta ecuación tiene precisamente  $n$  soluciones diferentes

$$e^{2\pi k i/n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Estas forman un grupo abeliano respecto a la multiplicación compleja. Este grupo se denota por  $\mu_n(\mathbb{C})$  y se llama el **grupo de las raíces  $n$ -ésimas de la unidad**:

$$\mu_n(\mathbb{C}) := \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}.$$

Como el ejemplo más sencillo tenemos  $\mu_2(\mathbb{C}) = \{\pm 1\}$ . El dibujo de abajo representa el grupo  $\mu_6(\mathbb{C})$  en el plano complejo.



Si  $m \mid n$ , entonces  $z^m = 1$  implica  $z^n = 1$  y se ve que  $\mu_m(\mathbb{C})$  es un subgrupo de  $\mu_n(\mathbb{C})$ . Por ejemplo, en el dibujo de arriba se ve que  $\mu_2(\mathbb{C}) \subset \mu_6(\mathbb{C})$  y  $\mu_3(\mathbb{C}) \subset \mu_6(\mathbb{C})$ . Todas las raíces de la unidad forman un grupo

$$\mu_\infty(\mathbb{C}) = \{z \in \mathbb{C}^\times \mid z^n = 1 \text{ para algún } n = 1, 2, 3, \dots\} = \bigcup_{n \geq 1} \mu_n(\mathbb{C}).$$

Tenemos una cadena de subgrupos

$$\mu_m(\mathbb{C}) \stackrel{\text{si } m \mid n}{\subset} \mu_n(\mathbb{C}) \subset \mu_\infty(\mathbb{C}) \subset \mathbb{T} \subset \mathbb{C}^\times.$$



### 4.3 Los restos módulo $n$ invertibles

**4.3.1. Ejemplo.** Un número  $a \in \mathbb{Z}$  es invertible módulo  $n = 1, 2, 3, \dots$  si y solamente si  $\text{mcd}(a, n) = 1$ :

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times = \{[a]_n \mid \text{mcd}(a, n) = 1\}.$$

Por ejemplo,

$$\begin{aligned} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\times &= \{[1]_1\}, \\ (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^\times &= \{[1]_3, [2]_3\}, \\ (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\times &= \{[1]_4, [3]_4\}, \\ (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times &= \{[1]_5, [2]_5, [3]_5, [4]_5\}, \\ (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^\times &= \{[1]_6, [5]_6\}, \\ (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\times &= \{[1]_7, [2]_7, [3]_7, [4]_7, [5]_7, [6]_7\}, \\ (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times &= \{[1]_8, [3]_8, [5]_8, [7]_8\}, \\ (\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^\times &= \{[1]_9, [2]_9, [4]_9, [5]_9, [7]_9, [8]_9\}, \\ (\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^\times &= \{[1]_{10}, [3]_{10}, [7]_{10}, [9]_{10}\}, \\ &\dots \end{aligned}$$

La función

$$\phi(n) := |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times| = \text{número de enteros entre } 0 \text{ y } n-1 \text{ coprimos con } n$$

se llama la **función  $\phi$  de Euler**. He aquí algunos de sus valores\*:

$n$ :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\phi(n)$ :	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4	12	6	8
$n$ :	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$\phi(n)$ :	8	16	6	18	8	12	10	22	8	20	12	18	12	28	8

La función  $\phi$  de Euler cumple las siguientes propiedades.

1) si  $p = 2, 3, 5, 7, 11, \dots$  es primo y  $k = 1, 2, 3, 4, \dots$ , tenemos

$$\phi(p^k) = p^k \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

2) si  $m$  y  $n$  son coprimos, entonces

$$\phi(mn) = \phi(m) \cdot \phi(n)$$

(se dice que  $\phi$  es una **función multiplicativa**).

Para demostrar 1), consideramos los números

$$a = 0, 1, 2, \dots, p^k - 2, p^k - 1.$$

En esta lista hay  $p^k$  elementos. Luego,  $\text{mcd}(a, p^k) = 1$  si y solamente si  $p \nmid a$ . Los números en la lista tales que  $p \mid a$  son los múltiplos de  $p$ :  $0, p, 2p, 3p, \dots$ —cada  $p$ -ésimo número, en total  $p^k/p$  de ellos. Entonces,

$$\phi(p^k) = p^k - p^k/p = p^k \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

En particular, para  $k = 1$  tenemos  $\phi(p) = p - 1$ . Es otro modo de decir que  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  es un cuerpo (tiene todos sus elementos invertibles, salvo el cero).

En general, las mismas consideraciones pueden ser aplicadas a un número arbitrario  $n = p_1^{k_1} \cdots p_\ell^{k_\ell}$ . De los números

$$0, 1, 2, \dots, n - 1$$

para cada  $p_i$  se puede quitar los  $n/p_i$  múltiplos de  $p_i$ . Pero algunos de estos múltiplos son divisibles al mismo tiempo por  $p_i$  y  $p_j$  para  $i \neq j$ , o por tres diferentes primos, etc. El conteo requiere una especie del principio de inclusión-exclusión y nos lleva a la fórmula

$$(4.2) \quad \phi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_\ell}\right).$$

De esta expresión está clara la propiedad 2). Sin embargo, sería más convincente primero demostrar 2) de otra manera y luego deducir (4.2). Es lo que vamos a hacer más adelante. ▲

\*Tenemos  $\phi(1) = 1$ . De hecho,  $\mathbb{Z}/1\mathbb{Z}$  es el anillo nulo, y su único elemento es invertible.

## 4.4 Unidades en anillos aritméticos

4.4.1. **Ejemplo.** Para los enteros de Gauss el grupo de unidades es de orden 4:

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]^\times = \{\pm 1, \pm \sqrt{-1}\}.$$

Para verlo, definamos la aplicación

$$\begin{aligned} N: \mathbb{Z}[\sqrt{-1}] &\rightarrow \mathbb{Z}, \\ a + b\sqrt{-1} &\mapsto (a + b\sqrt{-1})(a - b\sqrt{-1}) = a^2 + b^2, \end{aligned}$$

llamada la **norma**. Note que  $N(x) \geq 0$  para todo  $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ . La norma es multiplicativa:

$$N(xy) = N(x)N(y).$$

Esto implica que para todo  $u \in \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]^\times$  se tiene

$$N(u)N(u^{-1}) = N(uu^{-1}) = N(1) = 1,$$

y por lo tanto  $N(u) = 1$ . Viceversa, para  $a + b\sqrt{-1}$  podemos calcular su inverso en el cuerpo de números complejos:

$$(a + b\sqrt{-1})^{-1} = \frac{a - b\sqrt{-1}}{(a + b\sqrt{-1})(a - b\sqrt{-1})} = \frac{a - b\sqrt{-1}}{a^2 + b^2}.$$

Si  $N(a + b\sqrt{-1}) = a^2 + b^2 = 1$ , entonces  $(a + b\sqrt{-1})^{-1} \in \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ . Esto demuestra que

$$a + b\sqrt{-1} \in \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]^\times \quad \text{si y solamente si} \quad N(a + b\sqrt{-1}) = a^2 + b^2 = 1.$$

La ecuación  $a^2 + b^2 = 1$  tiene 4 soluciones enteras  $(\pm 1, 0), (0, \pm 1)$  que corresponden a  $\pm 1, \pm \sqrt{-1}$ . Estos elementos son invertibles.

$\cdot$	+1	-1	$+\sqrt{-1}$	$-\sqrt{-1}$
+1	+1	-1	$+\sqrt{-1}$	$-\sqrt{-1}$
-1	-1	+1	$-\sqrt{-1}$	$+\sqrt{-1}$
$+\sqrt{-1}$	$+\sqrt{-1}$	$-\sqrt{-1}$	-1	+1
$-\sqrt{-1}$	$-\sqrt{-1}$	$+\sqrt{-1}$	+1	-1

El mismo argumento demuestra que para un entero  $n = 2, 3, 4, \dots$  y el anillo conmutativo

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-n}] = \{a + b\sqrt{-n} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

se tiene  $\mathbb{Z}[\sqrt{-n}]^\times = \{\pm 1\}$  para todo  $n \geq 2$  —para verlo, considere la norma

$$N(a + b\sqrt{-n}) := (a + b\sqrt{-n})(a - b\sqrt{-n}) = a^2 + nb^2.$$

▲

**4.4.2. Ejemplo.** Para el anillo  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$  podemos considerar la norma

$$N: \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \rightarrow \mathbb{Z},$$

$$a + b\sqrt{2} \mapsto (a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2.$$

Esta aplicación es también multiplicativa y por lo tanto  $N(u) = \pm 1$  para todo  $u \in R^\times$ . Luego, tenemos

$$(a + b\sqrt{2})^{-1} = \frac{a - b\sqrt{2}}{(a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2})} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2},$$

así que

$$a + b\sqrt{2} \text{ si y solamente si } N(a + b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2 = 1.$$

Entonces, para calcular el grupo  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times$ , hay que encontrar las soluciones enteras de la ecuación

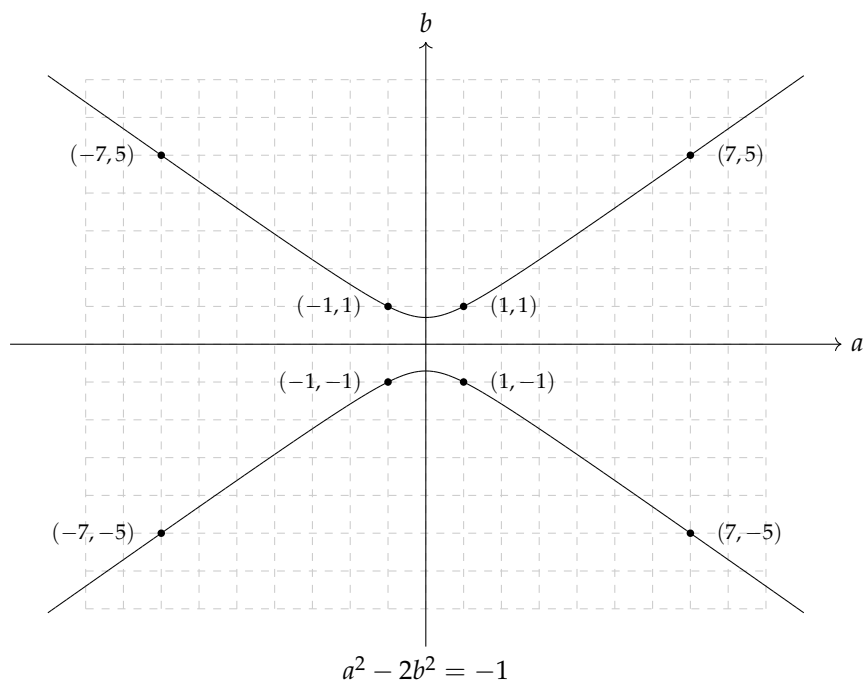
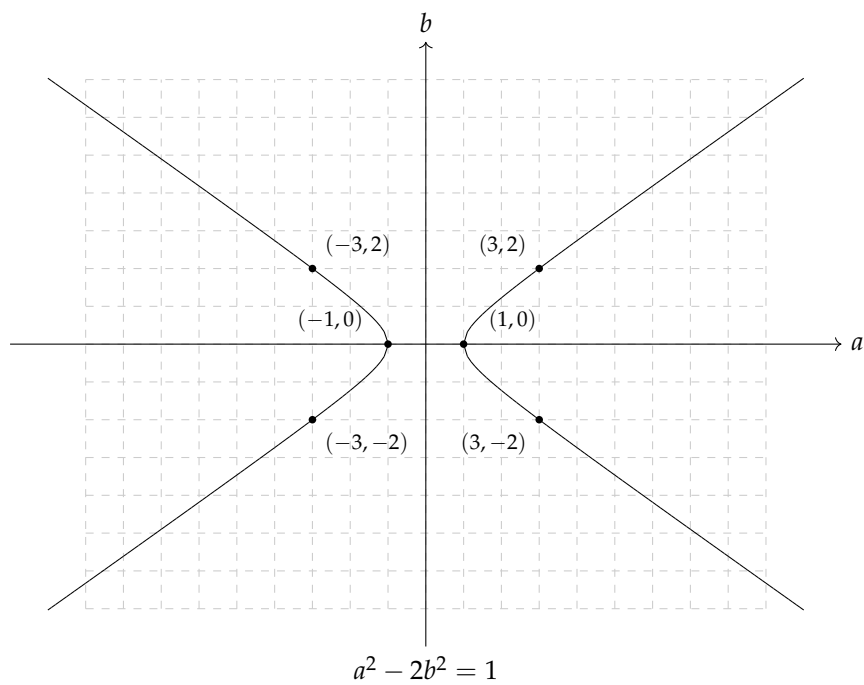
$$a^2 - 2b^2 = \pm 1.$$

Esta se conoce como la **ecuación de Pell**<sup>\*</sup>. No vamos a entrar en los detalles, pero hay un número infinito de soluciones  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ . Por ejemplo,

$$(4.3) \quad (a, b) = (\pm 1, 0), (\pm 1, \pm 1), (\pm 3, \pm 2), (\pm 7, \pm 5), \dots$$

---

<sup>\*</sup>JOHN PELL (1611–1685), matemático inglés. No hay documentos que demuestren que Pell trabajó en algún momento de su vida en la “ecuación de Pell”; la atribución del nombre se debe a Euler. Así que como matemático, Pell es conocido por una ecuación que nunca estudió.



Las soluciones (4.3) corresponden a las unidades

$$\begin{aligned} \pm 1 &= \pm(1 - \sqrt{2})^0, \\ \pm(1 + \sqrt{2}), \pm(1 - \sqrt{2}) &= \mp(1 + \sqrt{2})^{-1}, \\ \pm(3 + 2\sqrt{2}) &= \pm(1 + \sqrt{2})^2, \quad \pm(3 - 2\sqrt{2}) = \pm(1 + \sqrt{2})^{-2}, \\ \pm(7 + 5\sqrt{2}) &= \pm(1 + \sqrt{2})^3, \quad \pm(7 - 5\sqrt{2}) = \mp(1 + \sqrt{2})^{-3}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Note que todas las soluciones de arriba son de la forma  $\pm(1 + \sqrt{2})^n$  para algún  $n \in \mathbb{Z}$ . Evidentemente, son unidades y estas forman un subgrupo de  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times$ . De hecho, no hay otras unidades:

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times = \{\pm(1 + \sqrt{2})^n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Vamos a omitir la demostración ya que esta requiere un análisis más atento de la ecuación de Pell. ▲

La diferencia entre  $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]^\times$  por un lado y  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$  por el otro lado es que en el primer anillo el elemento que hemos añadido a  $\mathbb{Z}$  es complejo (es decir,  $\text{Im } \sqrt{-1} \neq 0$ ), mientras que  $\sqrt{2}$  es real. Esto se estudia en la teoría de números algebraica. Para otro ejemplo similar, véase el ejercicio 4.1.

## 4.5 Polinomios invertibles

En el capítulo anterior hemos introducido el anillo de polinomios  $R[X]$ , y sería interesante calcular su grupo de unidades.

**4.5.1. Observación.** Si un polinomio  $f = \sum_{i \geq 0} a_i X^i \in R[X]$  es invertible, entonces su coeficiente constante es invertible en  $R$ ; es decir,  $a_0 \in R^\times$ .

*Demostración.* Si existe otro polinomio  $g = \sum_{i \geq 0} b_i X^i \in R[X]$  tal que  $fg = 1$ , esto significa que los coeficientes del producto de  $f$  y  $g$  están dados por

$$c_k := \sum_{i+j=k} a_i b_j = \begin{cases} 1, & \text{si } k = 0, \\ 0, & \text{si } k > 0. \end{cases}$$

En particular,  $a_0 b_0 = 1$ , lo que significa que  $b_0 = a_0^{-1}$ . ■

Entonces, la condición  $a_0 \in R^\times$  es necesaria para que  $f = \sum_{i \geq 0} a_i X^i \in R[X]$  sea invertible, pero no es suficiente. Para simplificar la vida, supongamos que  $R$  es un dominio de integridad:  $ab = 0$  implica  $a = 0$  o  $b = 0$ . En este caso nos puede servir la noción del grado de un polinomio.

**4.5.2. Proposición.** Si  $R$  es un dominio de integridad, entonces un polinomio  $f = \sum_{i \geq 0} a_i X^i \in R[X]$  es invertible en  $R[X]$  si y solamente si  $a_0 \in R^\times$  y  $a_i = 0$  para  $i > 0$ . En otras palabras, se tiene una identificación

$$R[X]^\times = R^\times.$$

*Demostración.* Apenas hemos visto que la condición  $a_0 \in R^\times$  es necesaria. Ahora si  $f$  es invertible, tenemos  $fg = 1$  para algún polinomio  $g$  y luego la identidad

$$0 = \deg(fg) = \deg f + \deg g$$

implica que  $\deg f = \deg g = 0$ . ■

**4.5.3. Comentario.** Si en  $R$  hay divisores de cero, por ejemplo si  $R = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ , entonces tenemos solamente la desigualdad  $\deg(fg) \leq \deg f + \deg g$  en lugar de  $\deg(fg) = \deg f + \deg g$  y nuestro argumento no funciona. En este caso existen polinomios invertibles de grados superiores. Por ejemplo, en el anillo  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}[X]$  se cumple

$$(2X + 1) \cdot (2X + 1) = 4X^2 + 4X + 1 \equiv 1 \pmod{4}.$$

## 4.6 El grupo lineal general

En los cursos básicos de álgebra lineal mucho tiempo se dedica a multiplicación e inversión de matrices. De hecho, detrás de todo esto hay un grupo.

**4.6.1. Definición.** Sea  $V$  un espacio vectorial sobre un cuerpo. Consideremos todas las aplicaciones lineales *invertibles*  $f: V \rightarrow V$  (isomorfismos entre  $V$  y sí mismo); es decir, las que poseen un aplicación lineal inversa  $f^{-1}: V \rightarrow V$  tal que

$$f \circ f^{-1} = \text{id}_V = f^{-1} \circ f.$$

Estas forman un grupo respecto a la composición habitual de aplicaciones. El elemento neutro es la aplicación identidad y los elementos inversos son las aplicaciones inversas. Este grupo se denota por  $\text{GL}(V)$  y se llama el **grupo lineal general** de  $V$ .

Note que este es un análogo lineal del grupo simétrico  $S_X$ . De hecho,  $\text{GL}(V)$  es un subconjunto de  $S_V$ , pero no tiene sentido considerar todas las biyecciones de conjuntos  $V \rightarrow V$ —son muchas—y por esto restringimos nuestra atención a las biyecciones lineales; es decir, las biyecciones que preservan la estructura algebraica de  $V$ .

En general, todas las aplicaciones lineales  $f: V \rightarrow V$  forman un anillo  $\text{End}(V)$  que se llama el **anillo de endomorfismos** de  $V$ . La adición en este anillo viene dada por

$$(f + g)(v) := f(v) + g(v)$$

y la multiplicación de  $f$  por  $g$  es la composición  $f \circ g$ . Este anillo no es conmutativo si  $\dim V > 1$ . El grupo lineal general es el grupo de unidades correspondiente:

$$\text{GL}(V) = \text{End}(V)^\times.$$

El procedimiento habitual para hacer cálculos con aplicaciones lineales es fijar una base y usar matrices. En el capítulo anterior hemos encontrado el anillo de matrices  $M_n(R)$ . Es un anillo no conmutativo, pero también tiene sentido considerar su grupo de unidades.



**4.6.2. Observación.** Los elementos invertibles en el anillo de matrices  $M_n(R)$  son precisamente las matrices con determinante invertible en  $R$ :

$$M_n(R)^\times = \{A \in M_n(R) \mid \det A \in R^\times\}.$$

*Demostración.* El determinante satisface

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

para cualesquiera  $A, B \in M_n(R)$ . Luego, si para  $A \in M_n(R)$  existe su matriz inversa  $A^{-1} \in M_n(R)$ , entonces

$$1 = \det(I) = \det(A A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(A^{-1}) \cdot \det(A),$$

lo que demuestra que para toda matriz invertible en  $M_n(R)$  se tiene necesariamente  $\det(A) \in R^\times$ . En la otra dirección, si  $\det(A) \in R^\times$ , podemos usar la fórmula (también conocida como la “regla de Cramer”)

$$A^{-1} = \det(A)^{-1} \operatorname{adj}(A),$$

donde  $\operatorname{adj}(A)$  es la **matriz adjunta**. ■

**4.6.3. Definición.** El grupo

$$\operatorname{GL}_n(R) := M_n(R)^\times = \{A \in M_n(R) \mid \det A \in R^\times\}$$

se llama el **grupo lineal general** sobre  $R$ .

**4.6.4. Ejemplo.** Si  $R = k$  es un cuerpo, entonces

$$\operatorname{GL}_n(k) = \{A \in M_n(k) \mid \det A \neq 0\}.$$
▲

**4.6.5. Ejemplo.** Para las matrices con elementos enteros, tenemos

$$\operatorname{GL}_n(\mathbb{Z}) = \{A \in M_n(\mathbb{Z}) \mid \det A = \pm 1\}.$$
▲

**4.6.6. Ejemplo.** Para  $n = 1$  tenemos

$$\operatorname{GL}_1(R) = R^\times.$$

Para  $n \geq 2$  y  $R \neq 0$  el grupo  $\operatorname{GL}_n(R)$  no es abeliano (en los ejercicios de abajo vamos a calcular su centro). ▲

**4.6.7. Ejemplo.** Las matrices de  $n \times n$  con determinante 1 forman un grupo

$$\operatorname{SL}_n(R) := \{A \in \operatorname{GL}_n(R) \mid \det A = 1\}.$$

Es un subgrupo de  $\operatorname{GL}_n(R)$  conocido como el **grupo lineal especial**. En particular, el grupo

$$\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}) := \{A \in M_2(\mathbb{Z}) \mid \det A = 1\}$$

tiene mucha importancia en aritmética; es conocido como el **grupo modular** y vamos a verlo más adelante. ▲

**4.6.8. Ejemplo.** Hemos visto que para todo primo  $p$  los restos módulo  $p$  forman un cuerpo  $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . Entonces, el anillo de matrices  $M_n(\mathbb{F}_p)$  es finito, de orden  $p^{n^2}$ , y en particular los grupos  $\text{GL}_n(\mathbb{F}_p)$  y  $\text{SL}_n(\mathbb{F}_p)$  son también finitos. ¿Cuál es su orden?

El grupo  $\text{GL}_n(\mathbb{F}_p)$  consiste de matrices invertibles de  $n \times n$ . Para contarlas, podemos escribirlas fila por fila (o columna por columna), recordando que entre estas no podemos tener dependencias lineales. En la primera fila podemos escribir cualquier vector  $(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n})$ , salvo el vector nulo  $(0, 0, \dots, 0)$ . Tenemos  $|\mathbb{F}_p|^n = p^n - 1$  posibilidades. Luego, en la segunda fila podemos poner cualquier vector  $(x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n})$ , salvo los  $p = |\mathbb{F}_p|$  vectores linealmente dependientes con  $(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n})$ . Continuando de este modo notamos que para la  $i$ -ésima fila hay  $p^n - p^i$  posibilidades. Entonces, el número de matrices invertibles de  $n \times n$  con elementos en un cuerpo finito  $\mathbb{F}_p$  es\*

$$|\text{GL}_n(\mathbb{F}_p)| = (p^n - 1) \cdot (p^n - p) \cdots (p^n - p^{n-1}).$$

Para el grupo  $\text{SL}_n(\mathbb{F}_p)$  es suficiente notar que si hay una matriz  $A \in \text{SL}_n(\mathbb{F}_p)$ , es decir,  $\det A = 1$ , entonces multiplicando  $A$  por un escalar  $a \in \mathbb{F}_p^\times = \mathbb{F}_p \setminus \{0\}$ , se obtiene una matriz  $A' := aA$  con  $\det A' = a$ . Además, todas las matrices con determinante  $a$  se producen de este modo. Esto demuestra que

$$|\text{GL}_n(\mathbb{F}_p)| = |\mathbb{F}_p^\times| \cdot |\text{SL}_n(\mathbb{F}_p)|;$$

es decir,

$$|\text{SL}_n(\mathbb{F}_p)| = \frac{1}{p-1} \cdot |\text{GL}_n(\mathbb{F}_p)|.$$

Notamos que para  $p = 2$  se tiene

$$\text{GL}_n(\mathbb{F}_2) = \text{SL}_n(\mathbb{F}_2)$$

(de hecho, en  $\mathbb{F}_2$  el único elemento no nulo es 1).

Por ejemplo, el grupo  $\text{GL}_2(\mathbb{F}_2)$  tiene 6 elementos:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, D := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, E := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

He aquí su tabla de multiplicación\*\*.

\*En general existen cuerpos finitos  $\mathbb{F}_q$  de orden  $q = p^k$  donde  $p$  es primo. Para  $k = 1$  tenemos  $\mathbb{F}_q = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  y para  $k > 1$  omití la construcción por falta de tiempo. Para  $\mathbb{F}_q$  la fórmula y su prueba sería idéntica, solo hay que reemplazar “ $p$ ” por “ $q$ ”.

\*\*La compilé con ayuda de computadora para no equivocarme. Favor de no hacer estos cálculos otra vez; verifique alguna fila para ver cómo se multiplican las matrices sobre  $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \pmod{2}.$$

·	<i>I</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>
<i>I</i>	<i>I</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>
<i>A</i>	<i>A</i>	<i>I</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
<i>B</i>	<i>B</i>	<i>E</i>	<i>I</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>
<i>C</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>I</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
<i>D</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>E</i>	<i>I</i>
<i>E</i>	<i>E</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>I</i>	<i>D</i>

El siguiente caso no trivial sería de  $GL_2(\mathbb{F}_3)$ , y este grupo ya tiene  $(3^2 - 1) \cdot (3^2 - 3) = 48$  elementos y no es muy instructivo enumerarlos todos...

Sería interesante comparar la tabla de multiplicación de arriba con la tabla de multiplicación en el grupo simétrico  $S_3$ .

◦	id	(1 2)	(2 3)	(1 3)	(1 2 3)	(1 3 2)
id	id	(1 2)	(2 3)	(1 3)	(1 2 3)	(1 3 2)
(1 2)	(1 2)	id	(1 2 3)	(1 3 2)	(2 3)	(1 3)
(2 3)	(2 3)	(1 3 2)	id	(1 2 3)	(1 3)	(1 2)
(1 3)	(1 3)	(1 2 3)	(1 3 2)	id	(1 2)	(2 3)
(1 2 3)	(1 2 3)	(1 3)	(1 2)	(2 3)	(1 3 2)	id
(1 3 2)	(1 3 2)	(2 3)	(1 3)	(1 2)	id	(1 2 3)



## 4.7 Ejercicios

**Ejercicio 4.1.** Para el anillo de los enteros de Eisenstein  $\mathbb{Z}[\zeta_3]$ , calcule el grupo de unidades  $\mathbb{Z}[\zeta_3]^\times$  y escriba la tabla de multiplicación correspondiente.

Indicación: considere la norma

$$N(a + b\zeta_3) := (a + b\zeta_3)\overline{(a + b\zeta_3)} = a^2 - ab + b^2.$$

**Ejercicio 4.2.** Sea  $R$  un anillo conmutativo. Se dice que un elemento  $u \in R$  es una **unidad** si existe un elemento  $u^{-1} \in R$  tal que  $uu^{-1} = u^{-1}u = 1$ . Se dice que  $x \in R$  es un **nilpotente** si existe un número  $n = 1, 2, 3, \dots$  tal que  $x^n = 0$ .

Encuentre las unidades y nilpotentes en los anillos  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  y  $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ .

**Ejercicio 4.3.** Continuemos con las nociones introducidas en el ejercicio precedente. Sea  $R$  un anillo conmutativo.

- 1) Demuestre que si  $x \in R$  es un nilpotente y  $a \in R$  es cualquier elemento del anillo, entonces  $ax$  es un nilpotente.
- 2) Demuestre que si  $x, y \in R$  son nilpotentes, entonces  $x + y$  es también un nilpotente.
- 3) Demuestre que si  $x \in R$  es un nilpotente, entonces  $1 + x$  es una unidad.

Indicación: recuerde la identidad

$$(1 + X) \cdot (1 - X + X^2 - X^3 + X^4 - X^5 + \dots) = 1$$

en  $R[[X]]$ .

- 4) Demuestre que si  $u \in R$  es una unidad y  $x \in R$  es un nilpotente, entonces  $u + x$  es una unidad.

**Ejercicio 4.4.** Calcule la matriz inversa para las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{F}_3), \quad \begin{pmatrix} 1 & X & 0 \\ 0 & 1 & X \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}[X]).$$

**Ejercicio 4.5.** Consideremos las matrices de  $n \times n$  que tienen 1 en las entradas diagonales, ceros debajo de la diagonal y números arbitrarios arriba de la diagonal.

$$\{(x_{ij}) \mid x_{ii} = 1 \text{ para todo } i, x_{ij} = 0 \text{ para } i > j\}.$$

Por ejemplo, para  $n = 3$  son de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Demuestre que estas matrices forman un subgrupo de  $GL_n(R)$ .

**Ejercicio 4.6.** Consideremos el conjunto de matrices

$$O_n(k) = \{A \in GL_n(k) \mid A^t A = A A^t = I\},$$

donde  $A^t$  denota la matriz transpuesta.

- 1) Demuestre que  $O_n(k)$  es un subgrupo de  $GL_n(k)$ . Este se llama el **grupo ortogonal** sobre  $k$ .
- 2) Para  $n = 2$  y  $k = \mathbb{R}$  demuestre que los elementos de  $O_2(\mathbb{R})$  son de la forma

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \text{ o } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

- 3) Demuestre que el grupo diédrico  $D_n$  es un subgrupo de  $O_2(\mathbb{R})$ . Escriba las matrices\* que corresponden a los elementos  $r$  y  $f$ .

**Ejercicio 4.7.** Demuestre que el grupo  $SL_2(\mathbb{Z})$  es infinito.

**Ejercicio 4.8.** Demuestre que las únicas matrices invertibles que conmutan con todas las matrices son las **matrices escalares**

$$aI = \begin{pmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{pmatrix} \text{ para } a \in \mathbb{R}^\times.$$

Es decir,

$$Z(GL_n(\mathbb{R})) = \{aI \mid a \in \mathbb{R}^\times\}.$$

- 1) Fijemos algunos índices  $1 \leq i, j \leq n$ ,  $i \neq j$ . Denotemos por  $e_{ij}$  la matriz de  $n \times n$  cuyos coeficientes son nulos, excepto el coeficiente  $(i, j)$  que es igual a 1. Consideremos las matrices  $I + e_{ij}$ . Estas tienen ceros en todas las entradas, excepto 1 en la posición  $(i, j)$  y en la diagonal. Demuestre que

$$\det(I + e_{ij}) = 1$$

En particular,  $I + e_{ij} \in GL_n(\mathbb{R})$ .

- 2) Supongamos que  $A \in Z(GL_n(\mathbb{R}))$ . En particular, debe cumplirse

$$(I + e_{ij}) A = A (I + e_{ij}),$$

que es equivalente a la identidad

$$e_{ij} A = A e_{ij}$$

en el anillo de matrices  $M_n(\mathbb{R})$ . Recuerde la tarea anterior donde hemos visto que esto implica que  $A$  es una matriz escalar.

- 3) Note que el centro de  $Z(SL_n(\mathbb{R}))$  también consiste en las matrices escalares (de determinante 1).

**Ejercicio 4.9.** Demuestre que una serie formal de potencias  $f = \sum_{i \geq 0} a_i X^i \in \mathbb{R}[[X]]$  es invertible (pertenece a  $\mathbb{R}[[X]]^\times$ ) si y solamente si su coeficiente constante es invertible ( $a_0 \in \mathbb{R}^\times$ ).

**Ejercicio 4.10.** Calcule las series  $(1 - X)^{-1}$ ,  $(1 - X^2)^{-1}$ ,  $(1 - (X + X^2))^{-1}$  en el anillo  $\mathbb{Z}[[X]]$ .

\*En este ejercicio hay que identificar las aplicaciones lineales  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  con matrices de  $2 \times 2$ .



# **Parte II**

# **Teoría de grupos**





# Capítulo 5

## Homomorfismos

Les mathématiciens n'étudient pas des objets, mais des relations entre les objets

---

Poincaré

Hemos visto algunas nociones básicas de grupos y varios ejemplos. Para comparar grupos, estudiar construcciones sobre ellos e investigar sus propiedades más sutiles, hay que saber cómo estos se relacionan. Aquí el concepto clave es el de homomorfismo, una aplicación entre grupos que preserva su estructura (la operación del grupo).

**5.0.1. Definición.** Un **homomorfismo** de grupos  $G$  y  $H$  es una aplicación  $f: G \rightarrow H$  tal que para cualesquiera  $g_1, g_2 \in G$  se cumple:

$$f(g_1 g_2) = f(g_1) f(g_2).$$

### 5.1 Ejemplos de homomorfismos

**5.1.1. Ejemplo.** Para todo grupo  $G$  la aplicación identidad  $\text{id}: G \rightarrow G$  es un homomorfismo. ▲

**5.1.2. Ejemplo.** Para ver más homomorfismos familiares, podemos revisar algunas propiedades del análisis real y complejo conocidas a todo el mundo.

1) El signo de un número racional (resp. real) no nulo es un homomorfismo

$$\mathbb{Q}^\times \rightarrow \{\pm 1\} \text{ (resp. } \mathbb{R}^\times \rightarrow \{\pm 1\}), \quad x \mapsto \text{sgn } x := \begin{cases} +1, & \text{si } x > 0, \\ -1, & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

donde  $\mathbb{Q}^\times = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$  (resp.  $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ) es el grupo de los números racionales (resp. reales) no nulos.

2) El valor absoluto de un número racional (resp. real, complejo) no nulo es un homomorfismo

$$\mathbb{Q}^\times \rightarrow \mathbb{Q}_{>0}, \text{ (resp. } \mathbb{R}^\times \rightarrow \mathbb{R}_{>0}, \mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{R}_{>0}), \quad x \mapsto |x|.$$

### 5.1. EJEMPLOS DE HOMOMORFISMOS

---

De hecho, para cualesquiera  $x$  e  $y$  se tiene

$$|xy| = |x| \cdot |y|.$$

- 3) Consideremos el grupo de los números reales respecto a la adición  $\mathbb{R}$  y el grupo de los números reales positivos respecto a la multiplicación  $\mathbb{R}_{>0}$ . La función exponencial es un homomorfismo

$$\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}, \quad x \mapsto e^x.$$

De hecho, para cualesquiera  $x, y \in \mathbb{R}$  tenemos

$$e^{x+y} = e^x e^y.$$

En general, para  $a > 0$ , la aplicación

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^\times, \quad x \mapsto a^x$$

es un homomorfismo: se cumple

$$a^{x+y} = a^x a^y.$$

- 4) Para los números complejos la exponencial es un homomorfismo

$$\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times, \quad z \mapsto e^z.$$

Para cualesquiera  $z, w \in \mathbb{C}$  tenemos

$$e^{z+w} = e^z e^w.$$

- 5) El logaritmo natural es un homomorfismo

$$\log: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \log x;$$

para cualesquiera  $x, y > 0$  se cumple

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y).$$

En general, para  $a > 0, a \neq 1$  el logaritmo de base  $a$

$$\log_a: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \log_a x$$

es un homomorfismo: para cualesquiera  $x, y > 0$  se tiene

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y).$$

- 6) La raíz  $n$ -ésima es un homomorfismo

$$\mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}, \quad x \mapsto \sqrt[n]{x}.$$

De hecho, tenemos

$$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}.$$

En general, para cualquier número real positivo  $\alpha > 0$  la aplicación

$$\mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}, \quad x \mapsto x^\alpha$$

es un homomorfismo: se tiene

$$(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha.$$

7) La conjugación compleja  $z \mapsto \bar{z}$  es un homomorfismo aditivo y multiplicativo a la vez:

$$\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{y} \quad \mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times.$$

Para cualesquiera  $z, w$  se cumple

$$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{z\bar{w}} = \bar{z}w.$$

▲

**5.1.3. Ejemplo.** En el primer capítulo hemos estudiado el signo de permutación

$$\text{sgn}: S_n \rightarrow \{\pm 1\}$$

que es un homomorfismo entre el grupo simétrico y el grupo multiplicativo  $\{\pm 1\}$ . De hecho, hemos visto que para cualesquiera  $\sigma, \tau \in S_n$  se cumple

$$\text{sgn}(\sigma\tau) = \text{sgn} \sigma \cdot \text{sgn} \tau.$$

▲

**5.1.4. Ejemplo.** El determinante de matrices invertibles de  $n \times n$  es un homomorfismo de grupos

$$\det: \text{GL}_n(R) \rightarrow R^\times.$$

▲

**5.1.5. Ejemplo.** La reducción módulo  $n$  es un homomorfismo de grupos aditivos

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \\ a &\mapsto [a]_n. \end{aligned}$$

En efecto,  $[a+b]_n = [a]_n + [b]_n$  por la misma definición de la adición de los restos módulo  $n$  (recordemos que uno tiene que verificar por separado que esta adición no depende de los representantes particulares de las clases de equivalencia).

Si  $n \mid m$ , entonces tenemos un homomorfismo de grupos aditivos

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \\ [a]_m &\mapsto [a]_n. \end{aligned}$$

## 5.1. EJEMPLOS DE HOMOMORFISMOS

De hecho, primero notamos que esta aplicación está bien definida: si  $a \equiv a' \pmod{m}$ , esto quiere decir que  $m \mid (a - a')$ , pero luego  $n \mid (a - a')$ , así que  $a \equiv a' \pmod{n}$ . Es un homomorfismo por la definición de la adición módulo  $m$  y  $n$ :

$$[a]_m + [b]_m = [a + b]_m = [a + b]_n = [a]_n + [b]_n.$$

De la misma manera, se ve que hay un homomorfismo de grupos multiplicativos

$$\begin{aligned} (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times &\rightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times, \\ [a]_m &\mapsto [a]_n. \end{aligned}$$

▲

**5.1.6. Ejemplo.** Para un número entero no nulo  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  su **valuación  $p$ -ádica** es el máximo número natural  $k$  tal que  $p^k$  divide a  $n$ :

$$v_p(n) := \text{máx}\{k \mid p^k \mid n\}.$$

(Para  $n = 0$  normalmente se define  $v_p(0) := +\infty$ , pero no vamos a usar esta convención.)

Ahora para dos números no nulos  $m, n \in \mathbb{Z}$  se puede escribir

$$m = p^{v_p(m)} m', \quad n = p^{v_p(n)} n',$$

donde  $p \nmid m'$  y  $p \nmid n'$ , y luego,

$$mn = p^{v_p(m)+v_p(n)} m'n',$$

donde  $p \nmid (m'n')$ , así que

$$v_p(mn) = v_p(m) + v_p(n).$$

Ahora todo número racional no nulo puede ser representado por una fracción  $m/n$ , donde  $m, n \neq 0$  son algunos números enteros. Podemos definir

$$v_p\left(\frac{m}{n}\right) := v_p(m) - v_p(n).$$

Esta definición depende del número racional y no de su representación como fracción. De hecho, tenemos

$$\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'} \iff mn' = m'n.$$

Ahora

$$v_p(m) + v_p(n') = v_p(mn') = v_p(m'n) = v_p(m') + v_p(n),$$

así que

$$v_p\left(\frac{m}{n}\right) := v_p(m) - v_p(n) = v_p(m') - v_p(n') =: v_p\left(\frac{m'}{n'}\right).$$

Esto significa que la función

$$v_p: \mathbb{Q}^\times \rightarrow \mathbb{Z},$$

$$\frac{m}{n} \mapsto v_p\left(\frac{m}{n}\right) := v_p(m) - v_p(n)$$

está bien definida. Es un homomorfismo entre el grupo multiplicativo  $\mathbb{Q}^\times$  y el grupo aditivo  $\mathbb{Z}$ : para cualesquiera  $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2} \in \mathbb{Q}^\times$  tenemos

$$v_p\left(\frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2}\right) = v_p\left(\frac{m_1 m_2}{n_1 n_2}\right) = v_p(m_1 m_2) - v_p(n_1 n_2)$$

$$= v_p(m_1) - v_p(n_1) + v_p(m_2) - v_p(n_2) = v_p\left(\frac{m_1}{n_1}\right) + v_p\left(\frac{m_2}{n_2}\right).$$

Si en lugar de  $\mathbb{Z}$  queremos trabajar con un grupo multiplicativo, podemos definir el **valor absoluto  $p$ -ádico** de  $x \in \mathbb{Q}^\times$  como sigue:

$$|x|_p := p^{-v_p(x)}.$$

Entonces, para cualesquiera  $x, y \in \mathbb{Q}^\times$  se cumple

$$|xy|_p = p^{-v_p(xy)} = p^{-v_p(x)} \cdot p^{-v_p(y)} = |x|_p \cdot |y|_p.$$

De esta manera se obtiene un homomorfismo de grupos multiplicativos

$$|\cdot|_p: \mathbb{Q}^\times \rightarrow \mathbb{R}_{>0},$$

$$x \mapsto |x|_p.$$

(Para  $x = 0$  se define  $|0|_p := 0$ , lo que concuerda con la definición  $v_p(0) := \infty$ .) ▲

**5.1.7. Ejemplo.** He aquí otro ejemplo curioso de la teoría de números. Para un número primo  $p$ , decimos que un entero  $a \in \mathbb{Z}$  es un **residuo cuadrático módulo  $p$**  si

$$a \equiv b^2 \pmod{p}$$

para algún  $b \in \mathbb{Z}$ . Podemos definir el **símbolo de Legendre** mediante

$$\left(\frac{a}{p}\right) := \begin{cases} +1, & \text{si } p \nmid a \text{ y } a \text{ es un residuo cuadrático módulo } p, \\ -1, & \text{si } p \nmid a \text{ y } a \text{ no es un residuo cuadrático módulo } p, \\ 0, & \text{si } p \mid a. \end{cases}$$

Obviamente, si  $a \equiv a' \pmod{p}$ , entonces

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{a'}{p}\right),$$

así que el símbolo de Legendre está definido sobre los restos módulo  $p$ . Luego, para cualesquiera  $a, b \in \mathbb{Z}$  se tiene

$$\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right) \left(\frac{b}{p}\right).$$

(está claro que el producto de dos residuos cuadráticos es un residuo cuadrático; un poco menos claro que el producto de dos no-residuos cuadráticos es un residuo cuadrático, pero lo veremos más adelante). Esto quiere decir que el símbolo de Legendre es un homomorfismo de grupos multiplicativos

$$\left(\frac{\cdot}{p}\right) : \mathbb{F}_p^\times = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \rightarrow \{\pm 1\},$$

$$[a]_p \mapsto \left(\frac{a}{p}\right).$$

▲

Las siguientes aplicaciones son homomorfismos por la definición de las estructuras algebraicas correspondientes.

**5.1.8. Ejemplo.**

- 1) Si  $R$  es un anillo (no necesariamente conmutativo) y  $c \in R$  su elemento fijo, entonces la multiplicación por  $c$  por la izquierda es un homomorfismo de grupos aditivos

$$R \rightarrow R, \quad x \mapsto cx.$$

En efecto, la multiplicación es distributiva por la definición de anillos: para cualesquiera  $x, y \in R$  debe cumplirse

$$c(x + y) = cx + cy.$$

De la misma manera, la multiplicación por la derecha es un homomorfismo

$$R \rightarrow R, \quad x \mapsto xc.$$

- 2) Si  $V$  es un espacio vectorial sobre un cuerpo  $k$  y  $\lambda \in k$  es un escalar fijo, entonces la multiplicación por  $\lambda$  es un homomorfismo de grupos aditivos

$$V \rightarrow V, \quad v \mapsto \lambda \cdot v.$$

En efecto, según los axiomas de espacios vectoriales, se tiene

$$\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v.$$

- 3) Recordemos que para un anillo conmutativo  $R$  y un polinomio

$$f = \sum_{0 \leq i \leq n} a_i X^i \in R[X],$$

su valor en  $c \in R$  viene dado por

$$f(c) = \sum_{0 \leq i \leq n} a_i c^i \in R.$$

Esto nos da un **homomorfismo de evaluación**

$$ev_c : R[X] \rightarrow R, \quad f \mapsto f(c).$$

▲

**5.1.9. Digresión.** En los ejercicios hemos mencionado el anillo de series de potencias  $R[[X]]$ . En general, ya que una suma  $f = \sum_{i \geq 0} a_i X^i \in R[[X]]$  puede tener un número infinito de coeficientes no nulos, no tiene sentido evaluar  $f$  en un elemento  $c \in R$ . Lo que siempre podemos hacer es “evaluar  $f$  en 0”:

$$\begin{aligned} R[[X]] &\rightarrow R, \\ f = \sum_{i \geq 0} a_i X^i &\mapsto f(0) = a_0. \end{aligned}$$

En general, evaluación de una serie  $f \in R[[X]]$  en un elemento arbitrario  $c \in R$  requiere de una noción de convergencia.

**5.1.10. Ejemplo.** Si  $A$  es un grupo abeliano, entonces para  $n \in \mathbb{Z}$  y para cualesquiera  $a, b \in A$  tenemos

$$n \cdot (a + b) := \underbrace{(a + b) + \cdots + (a + b)}_n = \underbrace{a + \cdots + a}_n + \underbrace{b + \cdots + b}_n = n \cdot a + n \cdot b,$$

así que la multiplicación por  $n$  es un homomorfismo que se denota por

$$A \xrightarrow{\times n} A$$

Cuando el grupo es abeliano, pero se usa la notación multiplicativa, se trata de las potencias  $n$ -ésimas  $a \mapsto a^n$ :

$$(ab)^n := \underbrace{ab \cdots ab}_n = \underbrace{a \cdots a}_n \cdot \underbrace{b \cdots b}_n =: a^n b^n.$$

Note que en un grupo no abeliano, en general  $(gh)^n \neq g^n h^n$ . Por ejemplo, se puede ver que  $G$  es abeliano si y solamente si  $(gh)^2 = g^2 h^2$  para cualesquiera  $g, h \in G$ . ▲

**5.1.11. Ejemplo.** En particular, si  $R$  es un anillo conmutativo y  $n \in \mathbb{Z}$ , entonces la  $n$ -ésima potencia es un homomorfismo de grupos multiplicativos

$$R^\times \rightarrow R^\times, \quad x \mapsto x^n.$$

Para el grupo aditivo subyacente, tenemos

$$(x + y)^n = \sum_{0 \leq i \leq n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i},$$

y esta expresión normalmente no es igual a  $x^n + y^n$ . Sin embargo, si en  $R$  se cumple  $p \cdot x$  para cualesquiera  $x \in R$ , por ejemplo para  $R = \mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , entonces

$$(x + y)^p = x^p + y^p.$$

Por ejemplo,

$$\mathbb{F}_p \rightarrow \mathbb{F}_p, \quad x \mapsto x^n$$

es un homomorfismo de grupos aditivos. ▲

## 5.2 Propiedades básicas de homomorfismos

**5.2.1. Observación.** La composición de dos homomorfismos  $f_1: G \rightarrow G'$  y  $f_2: G' \rightarrow G''$  es un homomorfismo  $f_2 \circ f_1: G \rightarrow G''$ .

*Demostración.* Para cualesquiera  $g_1, g_2 \in G$  tenemos

$$\begin{aligned} (f_2 \circ f_1)(g_1 g_2) &= f_2(f_1(g_1 g_2)) = f_2(f_1(g_1) f_1(g_2)) = f_2(f_1(g_1)) \cdot f_2(f_1(g_2)) \\ &= (f_2 \circ f_1)(g_1) \cdot (f_2 \circ f_1)(g_2). \end{aligned}$$

■

**5.2.2. Observación (Homomorfismos preservan el elemento neutro).** Si  $f: G \rightarrow H$  es un homomorfismo, entonces

$$f(1_G) = 1_H$$

*Demostración.* Tenemos

$$f(1_G) = f(1_G \cdot 1_G) = f(1_G) \cdot f(1_G),$$

y por lo tanto  $f(1_G)$  es el elemento neutro. ■

**5.2.3. Observación (Homomorfismos preservan los elementos inversos).** Si  $f: G \rightarrow H$  es un homomorfismo, entonces para todo  $g \in G$

$$f(g^{-1}) = f(g)^{-1}.$$

*Demostración.*

$$f(g^{-1}) \cdot f(g) = f(g^{-1} g) = f(1) = 1.$$

■

**5.2.4. Observación.** Sea  $1$  el grupo trivial. Para todo grupo  $G$  existe un homomorfismo único  $1 \rightarrow G$  y un homomorfismo único  $G \rightarrow 1$ .

Note que la situación con conjuntos es diferente: allí para todo  $X$  existe una aplicación única  $\emptyset \rightarrow X$  y una aplicación única  $X \rightarrow \{\bullet\}$ . Los conjuntos  $\emptyset$  y  $\{\bullet\}$  son diferentes (entre ellos no hay biyección). En el caso de grupos, el mismo grupo trivial  $1$  satisface ambas propiedades  $1 \xrightarrow{\exists!} G$  y  $G \xrightarrow{\exists!} 1$ .

**5.2.5. Corolario.** Para dos grupos  $G$  y  $H$  existe un homomorfismo único  $e: G \rightarrow H$  que se factoriza por el grupo trivial:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{e} & H \\ & \searrow \exists! & \nearrow \exists! \\ & 1 & \end{array}$$

Este se llama el **homomorfismo trivial** y está definido por

$$e(g) = 1_H \quad \text{para todo } g \in G.$$



**5.2.6. Ejemplo.** Para el signo de permutaciones tenemos

$$\text{sgn}(\text{id}) = +1$$

y

$$\text{sgn}(\sigma^{-1}) = \text{sgn}(\sigma)^{-1} = \text{sgn}(\sigma).$$

▲

**5.2.7. Observación (Homomorfismos preservan potencias).** Para todo  $n \in \mathbb{Z}$  tenemos

$$f(g^n) = f(g)^n.$$

*Demostración.* Inducción sobre  $n$ . La base es el caso de  $n = 0$  que corresponde a 5.2.2. Si  $n < 0$ , aplicamos 5.2.3. ■

**5.2.8. Corolario.** Si  $g^n = 1$ , entonces  $f(g)^n = 1$ .

## 5.3 Mono, epi, iso

**5.3.1. Definición (clásica).** Sea  $f: G \rightarrow H$  un homomorfismo de grupos.

- 1) Si  $f$  es una aplicación inyectiva, se dice que  $f$  es un **monomorfismo** y se escribe  $f: G \hookrightarrow H$ .
- 2) Si  $f$  es una aplicación sobreyectiva, se dice que  $f$  es un **epimorfismo** y se escribe  $f: G \twoheadrightarrow H$ .
- 3) Si  $f$  es una aplicación biyectiva, se dice que  $f$  es un **isomorfismo** y se escribe  $f: G \xrightarrow{\cong} H$ .

Cuando entre  $G$  y  $H$  existe un isomorfismo  $G \xrightarrow{\cong} H$ , se dice que  $G$  y  $H$  son grupos **isomorfos** y se escribe  $G \cong H$ .

En lugar de los sustantivos *monomorfismo*, *epimorfismo*, *isomorfismo* a veces se usan los adjetivos *mono*, *epi*, *iso*, por ejemplo “ $f$  es mono”.

**5.3.2. Ejemplo.** Si  $G \subset H$  es un subgrupo, la inclusión  $G \hookrightarrow H$  es un monomorfismo de grupos. ▲

**5.3.3. Ejemplo.** Los homomorfismos

$$\det: \text{GL}_n(R) \rightarrow R^\times$$

y

$$\text{sgn}: S_n \rightarrow \{\pm 1\}$$

son epi. ▲

**5.3.4. Ejemplo.** La exponencial compleja

$$\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times, \quad z \mapsto e^z$$

es epi, pero no es mono: para cualesquiera  $z \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{Z}$  tenemos  $e^z = e^{z+2\pi k\sqrt{-1}}$ . ▲

**5.3.5. Ejemplo.** Se ve que la aplicación  $f: x \mapsto x^p$  es un isomorfismo de grupos aditivos  $\mathbb{F}_p \rightarrow \mathbb{F}_p$  y grupos multiplicativos  $\mathbb{F}_p^\times \rightarrow \mathbb{F}_p^\times$ . De hecho,

$$f(x) = f(y) \iff x^p = y^p \iff (x - y)^p = x - y = 0,$$

donde la igualdad  $(x - y)^p = x - y$  es el pequeño teorema de Fermat. ▲

**5.3.6. Ejemplo.** Un grupo puede ser isomorfo a un subgrupo propio. Obviamente, es imposible para grupos finitos, pero para grupos infinitos, por ejemplo, tenemos un isomorfismo

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\rightarrow 2\mathbb{Z} := \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}, \\ n &\mapsto 2n. \end{aligned}$$

▲

**5.3.7. Ejemplo.** Sean  $X$  e  $Y$  dos conjuntos tales que existe una biyección  $f: X \rightarrow Y$ . Una elección de  $f$  induce un isomorfismo entre los grupos simétricos

$$\begin{aligned} S_X &\rightarrow S_Y, \\ (X \xrightarrow{\sigma} X) &\mapsto (Y \xrightarrow{f^{-1}} X \xrightarrow{\sigma} X \xrightarrow{f} Y). \end{aligned}$$

De hecho, es un homomorfismo de grupos:

$$f \circ (\sigma \circ \tau) \circ f^{-1} = (f \circ \sigma \circ f^{-1}) \circ (f \circ \tau \circ f^{-1}).$$

Es inyectivo, ya que  $f$  y  $f^{-1}$  son cancelables, siendo biyecciones:

$$f \circ \sigma \circ f^{-1} = f \circ \tau \circ f^{-1} \Rightarrow \sigma = \tau.$$

Es sobreyectivo: para toda biyección  $\phi: Y \rightarrow Y$ , consideremos la biyección  $\sigma: X \rightarrow X$  dada por

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\phi} Y \xrightarrow{f^{-1}} X$$

Entonces

$$f \circ \sigma \circ f^{-1} = f \circ (f^{-1} \circ \phi \circ f) \circ f^{-1} = \phi.$$

En particular, el grupo de permutaciones de los elementos de un conjunto finito  $X$  es isomorfo a  $S_n$  donde  $n = |X|$ . ▲

**5.3.8. Ejemplo.** Dado un cuerpo  $k$  consideremos el espacio vectorial  $k^n$  junto con su base estándar

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad e_n = (0, 0, 0, \dots, 1).$$

En los cursos de álgebra lineal se estudia que las aplicaciones lineales  $k^n \rightarrow k^n$  pueden ser representadas por las matrices de  $n \times n$ , de tal modo que la composición de aplicaciones lineales corresponde a la multiplicación de matrices. Aplicaciones lineales invertibles corresponden a matrices invertibles. Esto nos da un isomorfismo de grupos

$$\mathrm{GL}(k^n) \cong \mathrm{GL}_n(k).$$

Cuidado: en general, si  $V$  es cualquier espacio vectorial sobre  $k$  de dimensión  $n$ , una elección de base nos da un isomorfismo de espacios vectoriales  $f: V \xrightarrow{\cong} k^n$ , y por lo tanto un isomorfismo de grupos

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}(V) &\xrightarrow{\cong} \mathrm{GL}(k^n), \\ (\phi: V \rightarrow V) &\mapsto (f \circ \phi \circ f^{-1}: k^n \rightarrow k^n), \end{aligned}$$

pero este no es canónico ya que depende de la base escogida. ▲

**5.3.9. Observación.**  $f: G \rightarrow H$  es iso si y solamente si es invertible: existe otro homomorfismo de grupos  $f^{-1}: H \rightarrow G$  tal que

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_G, \quad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_H.$$

*Demostración.* Para  $h_1, h_2 \in H$  tenemos

$$\begin{aligned} f^{-1}(h_1 h_2) &= f^{-1}\left(f(f^{-1}(h_1)) \cdot f(f^{-1}(h_2))\right) = f^{-1}\left(f(f^{-1}(h_1) \cdot f^{-1}(h_2))\right) \\ &= f^{-1}(h_1) \cdot f^{-1}(h_2), \end{aligned}$$

donde la primera igualdad viene de  $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_H$ , la segunda igualdad se cumple porque  $f$  es un homomorfismo, y la tercera igualdad viene de  $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_G$ . ■

**5.3.10. Ejemplo.** La exponencial real

$$\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}, \quad x \mapsto \exp(x)$$

es un isomorfismo de grupos que posee una aplicación inversa, a saber el logaritmo:

$$\log: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \log(x).$$

Como hemos visto, la aplicación inversa es automáticamente un homomorfismo:

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y).$$

▲

**5.3.11. Corolario.** La isomorfía de grupos es una relación de equivalencia en el sentido de que para cualesquiera  $G, H, K$  tenemos

$$G \cong G, \quad G \cong H \Rightarrow H \cong G, \quad G \cong H, H \cong K \Rightarrow G \cong K.$$

**5.3.12. Ejemplo.** Salvo isomorfismo, los primeros grupos finitos son

- 1) el grupo trivial 1;
- 2) el grupo  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ;
- 3) el grupo  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ;
- 4) el grupo  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  y el grupo de cuatro  $V = \{\text{id}, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\} \subset A_4$ ;
- 5) el grupo  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ;
- 6) el grupo simétrico  $S_3$ , que es isomorfo al grupo diédrico  $D_3$ ;
- 7) el grupo  $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ ;
- 8) hay tres grupos abelianos de orden 8: uno de ellos es  $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$  y otros dos que vamos a construir más adelante; además, hay dos grupos no abelianos que ya conocemos: el grupo diédrico  $D_4$  y el grupo de cuaterniones  $Q_8$ .

Más adelante veremos que para todo primo  $p$  hay un grupo único de orden  $p$  salvo isomorfismo y es el grupo  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . También vamos a describir todos los grupos *abelianos* finitos salvo isomorfismo. Es muy difícil clasificar los grupos *no abelianos* finitos y no vamos a tocar el tema. ▲

Cuando dos grupos son isomorfos, estos pueden ser identificados, salvo alguna permutación de elementos que respecta la operación del grupo. En particular, dos grupos isomorfos tienen las mismas propiedades.

**5.3.13. Observación.** Si  $G \cong H$ , entonces  $G$  es abeliano si y solamente si  $H$  es abeliano.

**5.3.14. Ejemplo.** Ya que todo isomorfismo  $G \xrightarrow{\cong} H$  es una biyección de conjuntos, si  $G$  y  $H$  tienen diferente cardinalidad, estos no pueden ser isomorfos. Los grupos  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  y  $S_3$  tienen la misma cardinalidad  $6 = 3!$ . Sin embargo,  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  es un grupo abeliano, mientras que  $S_3$  no lo es, y por lo tanto no son isomorfos. ▲

**5.3.15. Definición.** Fijemos un grupo  $G$ . Un isomorfismo entre  $G$  y sí mismo se llama un **automorfismo**.

**5.3.16. Observación.** Los automorfismos de  $G$  forman un grupo respecto a la composición. Este se denota por  $\text{Aut}(G)$ .

*Demostración.* Siempre existe el automorfismo identidad  $\text{id}: G \rightarrow G$  y es el elemento neutro de  $\text{Aut}(G)$ . Si  $f_1: G \rightarrow G$  y  $f_2: G \rightarrow G$  son dos automorfismos, entonces su composición  $f_2 \circ f_1: G \rightarrow G$  es también un automorfismo. Todo automorfismo  $f: G \rightarrow G$  posee una aplicación inversa  $f^{-1}: G \rightarrow G$ , y como hemos visto arriba, es automáticamente un automorfismo. ■

**5.3.17. Ejemplo.** El grupo  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  respecto a la adición tiene dos automorfismos:  $\text{id}$  y un automorfismo no trivial

$$f: [0] \mapsto [0], \quad [1] \mapsto [2], \quad [2] \mapsto [1].$$

Tenemos  $f \circ f = \text{id}$  y luego  $\text{Aut}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . ▲

## 5.4 Imágenes

**5.4.1. Definición.** Sea  $f: G \rightarrow H$  un homomorfismo de grupos. El conjunto

$$\text{im } f := \{f(g) \mid g \in G\}$$

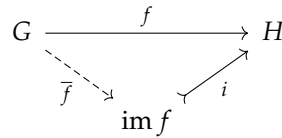
se llama la **imagen** de  $f$ .

**5.4.2. Observación.** Para todo homomorfismo  $f: G \rightarrow H$  la imagen  $\text{im } f$  es un subgrupo de  $H$ .

*Demostración.* Como hemos notado en 5.2.2, tenemos  $1_H \in \text{im } f$ . Luego, si  $f(g_1), f(g_2) \in \text{im } f$ , entonces  $f(g_1)f(g_2) = f(g_1g_2) \in \text{im } f$ . En fin, gracias a 5.2.3, si  $f(g) \in \text{im } f$ , entonces  $f(g)^{-1} = f(g^{-1}) \in \text{im } f$ . ■

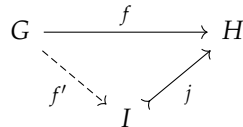
**5.4.3. Proposición (Propiedad universal de la imagen).** Sea  $f: G \rightarrow H$  un homomorfismo de grupos.

- 1) Existe una factorización de  $f$  por el monomorfismo canónico  $i: \text{im } f \hookrightarrow H$  (inclusión de subgrupo):



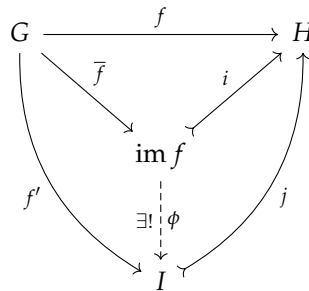
$$f = i \circ \bar{f}.$$

- 2) Supongamos que hay otro grupo  $I$  junto con un monomorfismo  $j: I \hookrightarrow H$  y una factorización de  $f$  por  $I$ :



$$f = j \circ f'.$$

Luego existe un único homomorfismo  $\phi: \text{im } f \rightarrow I$  que hace conmutar el siguiente diagrama:



$$\phi \circ \bar{f} = f', \quad j \circ \phi = i.$$

( $\phi$  es mono, puesto que  $i = j \circ \phi$  lo es).

*Demostración.* La parte 1) está clara de la definición de la imagen: ya que  $f$  toma sus valores en  $\text{im } f \subset H$ , en realidad  $f$  puede ser vista como una aplicación  $\bar{f}: G \rightarrow \text{im } f$ . Es un homomorfismo, puesto que  $f$  es un homomorfismo. Su composición con la inclusión del subgrupo  $i: \text{im } f \hookrightarrow H$  coincide con  $f$ .

En 2), la única opción para  $\phi$  para que se cumpla  $\phi \circ \bar{f} = f'$  es definir

$$\begin{aligned} \phi: \text{im } f &\rightarrow I, \\ f(g) &\mapsto f'(g). \end{aligned}$$

Esta aplicación está bien definida: si tenemos  $f(g_1) = f(g_2)$ , entonces

$$j(f'(g_1)) = f(g_1) = f(g_2) = j(f'(g_2)) \Rightarrow f'(g_1) = f'(g_2).$$

También se cumple  $i = j \circ \phi$ . En efecto, para  $h = f(g) \in \text{im } f$  tenemos

$$j(\phi(h)) = j(f'(g)) = f(g).$$

■

**5.4.4. Observación.** *Todo monomorfismo  $f: G \hookrightarrow H$  corresponde a un isomorfismo*

$$G \xrightarrow{\cong} \text{im } f \subset H.$$

**5.4.5. Ejemplo.** Toda permutación  $\sigma \in S_n$  puede ser extendida a una permutación de  $\{1, \dots, n, n+1\}$  poniendo

$$\sigma(n+1) := n+1.$$

Esto define un monomorfismo

$$S_n \hookrightarrow S_{n+1}.$$

De este modo  $S_n$  se identifica con un subgrupo de  $S_{n+1}$ . En este sentido, tenemos una cadena de subgrupos

$$S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset S_4 \subset S_5 \subset \dots$$

y podemos considerar su unión

$$S_\infty := \bigcup_{n \geq 1} S_n.$$

Este grupo permuta los elementos de  $\{1, 2, 3, \dots\}$ , pero para cada  $\sigma \in S_\infty$  tenemos  $\sigma(i) = i$  para todo  $i$ , excepto un número finito. ▲

Es algo parecido al grupo  $\mu_\infty(\mathbb{C}) := \bigcup_{n \geq 1} \mu_n(\mathbb{C})$ .

**5.4.6. Ejemplo.** A una matriz invertible  $A \in GL_n(R)$  podemos asociar una matriz invertible  $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_{n+1}(R)$  poniendo 1 en la entrada  $(n+1, n+1)$ . En este sentido se obtiene una cadena de subgrupos

$$GL_1(R) \subset GL_2(R) \subset GL_3(R) \subset GL_4(R) \subset \dots$$

Luego, se obtiene un grupo

$$GL_\infty(R) := \bigcup_{n \geq 1} GL_n(R).$$

Este consiste en matrices infinitas, pero cada una de ellas afecta solamente la parte finita de  $R \times R \times R \times \dots$  y deja el resto intacto. ▲

## 5.5 Núcleos

**5.5.1. Definición.** Sea  $f: G \rightarrow H$  un homomorfismo de grupos. El conjunto

$$\ker f := \{g \in G \mid f(g) = 1_H\}$$

se llama el **núcleo** de  $f$ .

A priori  $f$  es un subconjunto de  $G$ , pero en realidad, es su subgrupo.

**5.5.2. Observación.** Para todo homomorfismo  $f: G \rightarrow H$  el núcleo  $\ker f$  es un subgrupo de  $G$ .

*Demostración.* Primero,  $f(1_G) = 1_H$  (véase 5.2.2), entonces  $1_G \in \ker f$ . Luego,  $f(g_1 g_2) = f(g_1) f(g_2)$ , así que

$$g_1, g_2 \in \ker f \Rightarrow g_1 g_2 \in \ker f.$$

Por último, para todo  $x \in \ker f$  tenemos

$$f(g^{-1}) = f(g)^{-1} = (1_H)^{-1} = 1_H,$$

así que también  $g^{-1} \in \ker f$ . ■

**5.5.3. Ejemplo.** Por la definición, el grupo alternante es el núcleo del homomorfismo de signo:

$$A_n := \ker(S_n \xrightarrow{\text{sgn}} \{\pm 1\}).$$

**5.5.4. Ejemplo.** Tenemos

$$\ker(\mathbb{R}^\times \xrightarrow{\text{sgn}} \{\pm 1\}) = \mathbb{R}_{>0}.$$

**5.5.5. Ejemplo.** Por definición, el grupo  $SL_n(R)$  es el núcleo del homomorfismo del determinante sobre  $GL_n(R)$ :

$$SL_n(R) := \ker(GL_n(R) \xrightarrow{\det} R^\times).$$

## 5.5. NÚCLEOS

**5.5.6. Ejemplo.** Por definición, el grupo de las  $n$ -ésimas raíces de la unidad  $\mu_n(\mathbb{C})$  es el núcleo del homomorfismo  $z \mapsto z^n$  sobre  $\mathbb{C}^\times$ :

$$\mu_n(\mathbb{C}) := \ker(\mathbb{C}^\times \xrightarrow{(-)^n} \mathbb{C}^\times).$$

▲

**5.5.7. Observación.** Un homomorfismo  $f: G \rightarrow H$  es mono si y solamente si  $\ker f = \{1_G\}$ .

*Demostración.* Tenemos que ver que  $f$  es una aplicación inyectiva. Primero notamos que si  $\ker f$  contiene otro elemento  $g \neq 1_G$ , entonces

$$f(g) = f(1_G) = 1_H,$$

así que  $f$  no es inyectiva. Entonces, la condición  $\ker f = \{1_G\}$  es necesaria. Para ver que es también suficiente, notamos que si  $f(g_1) = f(g_2)$  para  $g_1, g_2 \in G$ , entonces

$$f(g_1 g_2^{-1}) = f(g_1) f(g_2^{-1}) = f(g_1) f(g_2)^{-1} = 1_H,$$

así que  $g_1 = g_2$ . ■

**5.5.8. Ejemplo.** Para la exponente compleja

$$\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times, \quad z \mapsto e^z$$

se tiene

$$\ker(\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times) = 2\pi\sqrt{-1}\mathbb{Z} = \{2\pi n\sqrt{-1} \mid n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}.$$

Por esto en el caso complejo, el logaritmo es más sutil: la exponencial toma el mismo valor en  $z + 2\pi n\sqrt{-1}$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ , lo que impide definir una función inversa  $\log: \mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}$ . ▲

**5.5.9. Proposición (Propiedad universal del núcleo).** Para un homomorfismo de grupos  $f: G \rightarrow H$ , sea  $\ker f$  su núcleo y sea  $i: \ker f \rightarrow G$  la inclusión.

- 1) La composición  $\ker f \xrightarrow{i} G \xrightarrow{f} H$  es el homomorfismo trivial.
- 2) Si  $j: K \rightarrow G$  es otro morfismo tal que la composición  $K \xrightarrow{j} G \xrightarrow{f} H$  es trivial, entonces existe un único homomorfismo de grupos  $\phi: K \rightarrow \ker f$  tal que  $i \circ \phi = j$ .

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \xrightarrow{=e} & & \\
 \ker f & \xrightarrow{i} & G & \xrightarrow{f} & H \\
 \uparrow \exists! \phi & \nearrow j & & \searrow & \\
 K & & & & \\
 & & \xleftarrow{=e} & & 
 \end{array}$$

*Demostración.* La parte 1) es evidente de la definición de  $\ker f$ . En la parte 2), tenemos  $f(j(x)) = 1$  para todo  $x \in K$ . Entonces,  $\text{im } j \subseteq \ker f$ , y esto nos da la factorización única de  $j: K \rightarrow G$  por  $\ker f$ . ■



**5.5.10. Observación.** Si tenemos un diagrama conmutativo de homomorfismos de grupos

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & H \\ \phi \downarrow & & \downarrow \psi \\ G' & \xrightarrow{f'} & H' \end{array}$$

entonces existe un único homomorfismo  $\ker f \rightarrow \ker f'$  que hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \ker f & \xrightarrow{\quad} & G & \xrightarrow{f} & H \\ \downarrow \exists! & & \downarrow \phi & & \downarrow \psi \\ \ker f' & \xrightarrow{\quad} & G' & \xrightarrow{f'} & H' \end{array}$$

*Demostración.* La flecha punteada existe y es única gracias a la propiedad universal de  $\ker f'$ , pero es nada más la restricción de  $\phi$  a  $\ker f$ . Tenemos que comprobar que su imagen pertenece a  $\ker f'$ . Si  $g \in \ker f$ , entonces  $f(g) = 1$ , y por lo tanto  $f'(\phi(g)) = \psi(f(g)) = 1$  y  $\phi(g) \in \ker f'$ , y la aplicación  $g \mapsto \phi(g)$  se restringe correctamente a  $\ker f \rightarrow \ker f'$ . ■

## 5.6 Caracterización de mono, epi, iso

**5.6.1. Proposición.** Un homomorfismo de grupos  $f: G \rightarrow H$  es inyectivo si y solamente si es cancelable por la izquierda: para todo par de homomorfismos de grupos

$$g, g': G' \rightarrow G$$

tenemos

$$f \circ g = f \circ g' \Rightarrow g = g'.$$

*Demostración.* Si  $f: G \rightarrow H$  es una aplicación inyectiva, entonces es cancelable por la izquierda para todas aplicaciones entre conjuntos  $g, g'$  (no necesariamente homomorfismos de grupos) como hemos notado en el capítulo 0.

La otra dirección es un poco más sutil: necesitamos ver que si un homomorfismo  $f$  es cancelable por la izquierda para homomorfismos de grupos  $g, g'$ , entonces es inyectivo. Consideramos la inclusión canónica  $i: \ker f \rightarrow G$  y el homomorfismo trivial  $e: \ker f \rightarrow G$ . Entonces,

$$f \circ i = f \circ e$$

—ambas composiciones nos dan un homomorfismo trivial  $\ker f \rightarrow H$ . Si  $f$  es cancelable por la izquierda, esto implica  $i = e$ ; es decir, que  $\ker f = \{1_G\}$  y por lo tanto  $f$  es inyectivo gracias a 5.5.7. ■

Entonces, para homomorfismos de grupos  $f: G \rightarrow H$  tenemos las equivalencias

$f$  es un homomorfismo inyectivo  $\iff f$  es cancelable por la izquierda

$$(f \circ g = f \circ g' \Rightarrow g = g' \text{ para homomorfismos } g, g'),$$

$f$  es un homomorfismo biyectivo  $\iff f$  es invertible (existe homomorfismo  $f^{-1}$ ).

El lector puede adivinar que también existe otra equivalencia

$f$  es un homomorfismo sobreyectivo  $\iff f$  es cancelable por la derecha

$$(g \circ f = g' \circ f \Rightarrow g = g' \text{ para homomorfismos } g, g').$$

Aquí la implicación " $\Rightarrow$ " es fácil (véase el capítulo 0), pero la otra implicación " $\Leftarrow$ " es más difícil y no la vamos a probar.

## 5.7 Ejercicios

**Ejercicio 5.1.** Sea  $f: G \rightarrow H$  un homomorfismo de grupos y sea  $K \subset H$  un subgrupo. Demuestre que  $f^{-1}(K)$  es un subgrupo de  $G$ .

**Ejercicio 5.2.** Sea  $R$  un anillo conmutativo. Para una matriz invertible  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  definamos su matriz **transpuesta inversa** por  $A^{-t} := (A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$ . Demuestre que la aplicación  $A \mapsto A^{-t}$  es un automorfismo  $\text{GL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$ .

**Ejercicio 5.3.** Sea  $G$  cualquier grupo,  $\mathbb{Z}$  el grupo aditivo de los números enteros y  $\mathbb{Q}$  el grupo aditivo de los números racionales.

- 1) Demuestre que todo homomorfismo  $f: \mathbb{Z} \rightarrow G$  está definido de modo único por el valor de  $f(1) \in G$ . Esto nos da una biyección natural

$$\text{Hom}(\mathbb{Z}, G) \xrightarrow{\cong} G, \quad f \mapsto f(1),$$

donde  $\text{Hom}(\mathbb{Z}, G)$  es el conjunto de homomorfismos  $\mathbb{Z} \rightarrow G$ .

- 2) Demuestre que todo homomorfismo  $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  del grupo aditivo de los números racionales está definido de modo único por el valor  $f(1) \in \mathbb{Q}$ . Esto nos da una biyección natural

$$\text{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Q}, \quad f \mapsto f(1),$$

donde  $\text{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q})$  es el conjunto de homomorfismos  $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ .

**Ejercicio 5.4.**

- 1) Encuentre los grupos  $\ker f$  e  $\text{im } f$  para el homomorfismo

$$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, \quad x \mapsto nx$$

donde  $n = 2, 3, 4, 5$ .

- 2) Calcule los grupos  $\text{Aut}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$  y  $\text{Aut}(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ .

**Ejercicio 5.5.** Consideremos el conjunto de matrices

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 > 0 \right\}.$$

Demuestre que es un subgrupo de  $\text{GL}_2(\mathbb{R})$  que es isomorfo a  $\mathbb{C}^\times$ .

**Ejercicio 5.6.** Encuentre isomorfismos de grupos  $D_3 \cong S_3 \cong \text{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ . ¿Puede haber isomorfismos  $D_n \cong S_n$  para  $n \neq 3$ ? ¿ $S_n \cong \text{GL}_m(\mathbb{F}_p)$ ?

**Ejercicio 5.7.** Demuestre que los grupos  $\mathbb{R}^\times$  y  $\mathbb{C}^\times$  no son isomorfos.

5.7. EJERCICIOS

**Ejercicio 5.8.** Asociemos a cada elemento del grupo de cuaterniones  $Q_8$  una matriz compleja de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \pm 1 &\mapsto \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}, & \pm i &\mapsto \begin{pmatrix} \pm\sqrt{-1} & 0 \\ 0 & \mp\sqrt{-1} \end{pmatrix}, \\ \pm j &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \mp 1 & 0 \end{pmatrix}, & \pm k &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & \pm\sqrt{-1} \\ \pm\sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Demuestre que esta correspondencia es un monomorfismo  $Q_8 \mapsto \text{SL}_2(\mathbb{C}) \subset \text{GL}_2(\mathbb{C})$ .

**Ejercicio 5.9.** Consideremos las **matrices triangulares superiores invertibles** (es decir, las matrices invertibles que tienen ceros debajo de la diagonal) y las matrices diagonales invertibles. Note que en ambos casos se tiene un subgrupo de  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ . Demuestre que la aplicación

$$\begin{pmatrix} * & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}$$

que deja las entradas diagonales intactas y aplica el resto de las entradas a 0 es un homomorfismo de grupos.

**Ejercicio 5.10.** La función exponencial puede ser definida para cualquier matriz  $A \in M_n(\mathbb{R})$  mediante la serie habitual  $e^A := \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} A^n$ , donde  $A^n := \underbrace{A \cdots A}_n$  son productos de matrices

iterados. Esta serie siempre converge a alguna matriz invertible. Demuestre que para  $n > 1$  la exponencial no es un homomorfismo  $M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$ ; es decir, en general  $e^{A+B} \neq e^A \cdot e^B$ .

Indicación: considere  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Ejercicio 5.11.** En los ejercicios para el capítulo anterior hemos mencionado el grupo de matrices ortogonales

$$O_n(k) = \{A \in \text{GL}_n(k) \mid A^t A = A A^t = I\}.$$

1) Demuestre que el determinante de una matriz ortogonal es igual a  $\pm 1$ .

Indicación: el determinante es un homomorfismo y  $\det A^t = \det A$ .

2) Demuestre que las matrices ortogonales de determinante  $+1$  forman un subgrupo

$$\text{SO}_n(k) := \{A \in \text{GL}_n(k) \mid A^t A = A A^t = I, \det A = +1\} \subset O_n(k).$$

Este se llama el **grupo ortogonal especial**.

3) Demuestre que el grupo  $\text{SO}_2(\mathbb{R})$  es isomorfo al grupo del círculo  $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ .

# Capítulo 6

## Generadores

En este capítulo veremos más ejemplos concretos de grupos y subgrupos. Un caso muy importante es el subgrupo generado por una colección de elementos. Cuando un grupo puede ser generado por un solo elemento, se dice que es cíclico. Ya conocimos a los grupos cíclicos (son precisamente los grupos aditivos  $\mathbb{Z}$  y  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ), pero ahora vamos a investigar sus propiedades de manera más sistemática.

### 6.1 Subgrupos generados

**6.1.1. Observación.** Sea  $G$  un grupo y  $X \subset G$  algún subconjunto. Entonces existe un subgrupo mínimo de  $G$  que contiene a  $X$ . Este se denota por  $\langle X \rangle$  y consiste precisamente en todos los productos finitos de la forma

$$g_1^{\epsilon_1} \cdots g_k^{\epsilon_k}, \quad k \geq 0,$$

donde  $g_i \in X$  y  $\epsilon_i = \pm 1$ . Para  $k = 0$  el producto vacío se considera como la identidad  $1 \in G$ .

*Demostración.* Evidentemente, tenemos

$$\langle X \rangle = \bigcap_{\substack{H \subseteq G \text{ subgrupo} \\ X \subseteq H}} H.$$

Este es un subgrupo, siendo una intersección de subgrupos. Luego, junto con todos los elementos de  $X$ , este debe contener todos sus inversos y sus productos, de donde el conjunto de productos finitos  $g_1^{\epsilon_1} \cdots g_k^{\epsilon_k}$  está contenido en  $\langle X \rangle$ . Pero este conjunto es un subgrupo, y por lo tanto coincide con  $\langle X \rangle$ . ■

**6.1.2. Comentario.** Escribamos el resultado de arriba para los grupos abelianos usando la notación aditiva. Si  $A$  es un grupo aditivo y  $X \subset A$  es su subconjunto, entonces tenemos

$$\langle X \rangle = \left\{ \sum_{a \in X} n_a a \mid n_a \in \mathbb{Z}, a \in X, n_a \neq 0 \text{ solo para un número finito de } a \right\}$$

(en otras palabras, tenemos combinaciones  $\mathbb{Z}$ -lineales *finitas* de los elementos de  $X$ .)

**6.1.3. Definición.** Se dice que  $\langle X \rangle$  es el subgrupo de  $G$  **generado** por  $X$ . Si  $\langle X \rangle = G$ , se dice que los elementos de  $X$  son **generadores** de  $G$ .

Por supuesto,  $X = G$  es un conjunto de generadores para cualquier grupo  $G$ . Pero en realidad, muchos grupos pueden ser generados por pocos elementos, muchos grupos infinitos se generan por un número finito de elementos, etc.

**6.1.4. Definición.** Si  $G$  posee un conjunto finito de generadores, se dice que  $G$  es **finitamente generado**.

**6.1.5. Ejemplo.** Hemos visto que el grupo diédrico  $D_n$  es generado por dos elementos  $r$  (rotación) y  $f$  (reflexión):

$$D_n = \langle r, f \rangle.$$

▲

**6.1.6. Ejemplo.** En el capítulo sobre los grupos simétricos y alternantes hemos visto que los siguientes son conjuntos de generadores para  $S_n$ :

- todas las transposiciones  $(i j)$  para  $1 \leq i < j \leq n$ ,
- las transposiciones  $(1 2), (2 3), (3 4), \dots, (n-1 n)$ ,
- las transposiciones  $(1 2), (1 3), \dots, (1 n)$ ,
- una transposición  $(1 2)$  y un  $n$ -ciclo  $(1 2 \cdots n)$ .

De modo similar, para el grupo alternante  $A_n$  con  $n \geq 3$ , tenemos los siguientes conjuntos de generadores:

- todos los 3-ciclos  $(i j k)$ ,
- los 3-ciclos de la forma  $(1 2 i)$ ,
- los 3-ciclos de la forma  $(i i+1 i+2)$ ,
- el 3-ciclo  $(1 2 3)$  y el ciclo

$$\begin{cases} (2 3 \cdots n), & \text{si } n \text{ es par,} \\ (1 2 3 \cdots n), & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

▲

**6.1.7. Ejemplo.** El grupo

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) := \{A \in M_2(\mathbb{Z}) \mid \det A = 1\}$$

puede ser generado por dos matrices:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculamos que

$$S^2 = -I, \quad T^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Si tenemos una matriz  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$  con  $c = 0$ , entonces  $ad = 1$  y luego  $A = \begin{pmatrix} \pm 1 & b \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$ . Pero

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T^b, \quad \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = S^2 T^{-b}.$$

Ahora vamos a ver que toda matriz en  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$  puede ser “reducida” a una matriz con  $c = 0$  mediante multiplicaciones por  $S$  y  $T$ . Calculamos el efecto de la multiplicación por  $S$  y  $T^n$  para  $n \in \mathbb{Z}$ :

$$S \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix},$$

$$T^n \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + nc & b + nd \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Si en una matriz  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  tenemos  $c \neq 0$  y  $|a| < |c|$ , podemos pasar a  $S \cdot A$  donde  $|a| \geq |c|$ . Entonces, se puede asumir que  $|a| \geq |c|$ . La división con resto nos da

$$a = cq + r, \quad \text{para } 0 \leq r < |c|.$$

Luego,

$$T^{-q}A = \begin{pmatrix} a - qc & b - qd \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & b - qd \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Multipliquemos esta matriz por  $S$ :

$$ST^{-q}A = S \cdot \begin{pmatrix} r & b - qd \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & -d \\ r & b - qd \end{pmatrix}.$$

Hemos obtenido una matriz donde el valor absoluto del primer elemento en la segunda fila se volvió estrictamente más pequeño. Podemos continuar de esta manera hasta que este se vuelva nulo. Esto quiere decir que para alguna matriz  $B \in \langle S, T \rangle$ , la matriz  $BA$  es de la forma  $\begin{pmatrix} \pm 1 & b \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \in \langle S, T \rangle$ . Podemos concluir que  $A \in \langle S, T \rangle$ .

Lo que acabamos de describir es un *algoritmo* que a partir de toda matriz en  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$  produce su expresión en términos de  $S$  y  $T$ . ▲

**6.1.8. Ejemplo.** Los números racionales  $\mathbb{Q}$  respecto a la adición forman un grupo que no es finitamente generado. De hecho, sea  $X \subset \mathbb{Q}$  un subconjunto finito:

$$X = \left\{ \frac{a_1}{b_1}, \dots, \frac{a_k}{b_k} \right\}.$$

Entonces,

$$\langle X \rangle = \left\{ n_1 \frac{a_1}{b_1} + \cdots + n_k \frac{a_k}{b_k} \mid n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Sin embargo,

$$n_1 \frac{a_1}{b_1} + \cdots + n_k \frac{a_k}{b_k} = \frac{\text{algún entero}}{b_1 \cdots b_k}.$$

En particular, si  $p$  es algún primo que no divide a ningún denominador  $b_1, \dots, b_k$ , entonces  $\frac{1}{p} \notin \langle X \rangle$ . ▲

## 6.2 Orden de un elemento

Un caso muy particular de subgrupos generados  $\langle X \rangle \subseteq G$  es cuando el conjunto  $X$  tiene solo un elemento  $g$ . En este caso el subgrupo generado por  $g$  es

$$\langle g \rangle = \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Hay dos posibilidades diferentes.

- 1) Si todas las potencias  $g^n$  son diferentes, entonces  $\langle g \rangle$  es un subgrupo infinito.
- 2) Si tenemos  $g^k = g^\ell$  para algunos  $k \neq \ell$ , entonces sin pérdida de generalidad  $k > \ell$ , luego  $g^{k-\ell} = 1$  y se ve que la sucesión  $(g^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  es periódica y el subgrupo  $\langle g \rangle$  es finito.

**6.2.1. Definición.** Para un elemento  $g \in G$ , el mínimo número  $n = 1, 2, 3, \dots$  tal que  $g^n = 1$  se llama el **orden** de  $g$  y se denota por  $\text{ord } g$ . Si  $g^n \neq 1$  para ningún  $n$ , se dice que  $g$  tiene orden infinito.

(Como siempre, vamos a usar la notación multiplicativa para la teoría general, pero no olvidemos que para un grupo abeliano con notación aditiva, en lugar de " $g^n = 1$ " se escribe " $n \cdot a = 0$ ".)

**6.2.2. Observación.** Si  $G$  es un grupo finito, entonces todos sus elementos tienen orden finito.

*Demostración.* Si  $g$  tuviera orden infinito, entre los elementos  $g^n$  para  $n \in \mathbb{Z}$  no habría repeticiones. Esto no es posible si  $G$  es finito. ■

**6.2.3. Ejemplo.** La identidad  $1 \in G$  es el único elemento de orden 1. ▲

**6.2.4. Ejemplo.** Un elemento  $g$  tiene orden 2 si y solamente si  $g \neq 1$  y  $g^{-1} = g$ . ▲

**6.2.5. Ejemplo.** En el grupo diédrico la reflexión  $f$  tiene orden 2, ya que  $f^2 = \text{id}$  y la rotación  $r$  tiene orden  $n$ . ▲

**6.2.6. Ejemplo.** La matriz  $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  tiene orden 4 en  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ . De hecho,

$$S^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I, \quad S^3 = -S, \quad S^4 = (S^2)^2 = I.$$



La matriz  $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$  tiene orden 3:

$$R^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, R^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Sin embargo, el producto

$$SR = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =: T$$

tiene orden infinito: para todo  $n \in \mathbb{Z}$  tenemos

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Recordamos que hemos visto en 6.1.7 que las matrices  $S$  y  $T$  generan el grupo  $SL_2(\mathbb{Z})$ . Ya que  $T = SR$ , se sigue que  $S$  y  $R$  generan  $SL_2(\mathbb{Z})$ . ▲

Este ejemplo demuestra que en general, en un grupo no abeliano, no hay ninguna relación entre  $\text{ord } g$ ,  $\text{ord } h$  y  $\text{ord}(gh)$ : puede ser que  $\text{ord } g < \infty$ ,  $\text{ord } h < \infty$ , pero  $\text{ord } gh = \infty$ . Esto sucede solamente para grupos no abelianos. El caso de grupos abelianos es más sencillo y más adelante vamos a describir la estructura de grupos abelianos finitamente generados.

Examinemos algunas propiedades básicas de órdenes.

**6.2.7. Observación.** Si  $g$  es un elemento de orden finito, entonces para todo número entero  $m$  tenemos

$$g^m = 1 \quad \text{si y solamente si} \quad \text{ord } g \mid m.$$

(En la notación aditiva:  $m \cdot a = 0$  si y solamente si  $\text{ord } a \mid m$ .)

*Demostración.* Sea  $n = \text{ord } g$ . Podemos dividir con resto  $m$  por  $n$ :

$$m = qn + r, \quad \text{para algún } 0 \leq r < n.$$

Luego,

$$g^m = g^{qn+r} = (g^n)^q \cdot g^r = g^r = 1,$$

pero puesto que  $r < n$  y  $n$  es el mínimo número positivo tal que  $g^n = 1$ , se sigue que  $r = 0$ . ■

**6.2.8. Ejemplo.** El orden de un  $k$ -ciclo  $(i_1 i_2 \cdots i_k)$  en el grupo simétrico  $S_n$  es igual a  $k$ . En general, para toda permutación  $\sigma \in S_n$  podemos considerar su descomposición en ciclos disjuntos

$$\sigma = \tau_1 \cdots \tau_s.$$

Luego, los  $\tau_i$  conmutan entre sí, así que

$$\sigma^k = \tau_1^k \cdots \tau_s^k.$$

## 6.2. ORDEN DE UN ELEMENTO

Los  $\tau_i^k$  son también disjuntos para cualquier  $k$ , así que  $\sigma^k = \text{id}$  si y solamente si  $\tau_i^k = \text{id}$  para todo  $i$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \text{ord}(\sigma) &= \text{mín}\{k \mid \tau_1^k = \text{id}, \dots, \tau_s^k = \text{id}\} = \text{mín}\{k \mid \text{ord } \tau_1 \mid k, \dots, \text{ord } \tau_s \mid k\} \\ &= \text{mcm}(\tau_1, \dots, \tau_s). \end{aligned}$$

Por ejemplo, para la permutación  $\sigma = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6\ 7)$  tenemos

$$\sigma^2 = (5\ 7\ 6), \sigma^3 = (1\ 2)(3\ 4), \sigma^4 = (5\ 6\ 7), \sigma^5 = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 7\ 6), \sigma^6 = \text{id}.$$

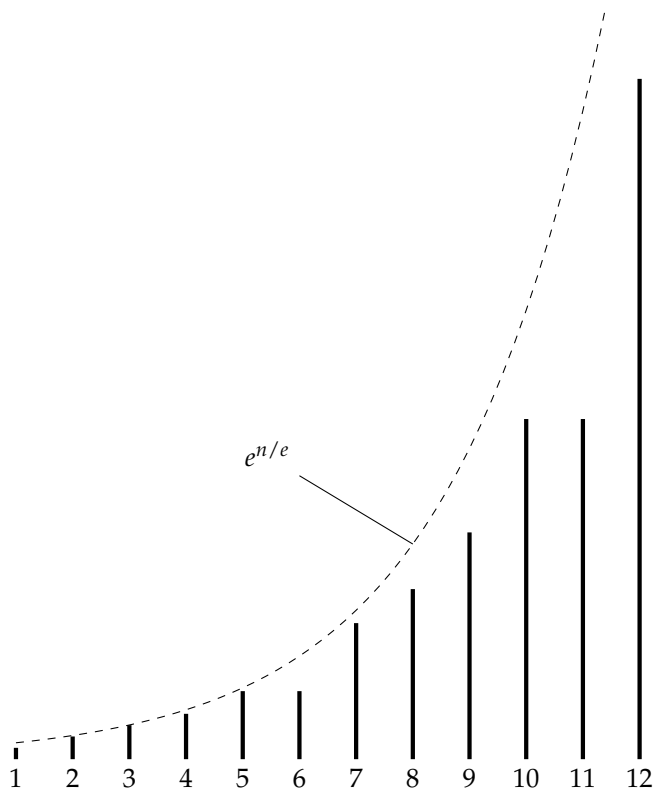
El número

$$g(n) := \text{máx}\{\text{ord } \sigma \mid \sigma \in S_n\} = \text{máx}\{\text{mcm}(n_1, \dots, n_s) \mid n_1 + \dots + n_s = n\}$$

se llama la **función de Landau**. He aquí algunos de sus valores (véase <http://oeis.org/A000793>):

$n$ :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$g(n)$ :	1	2	3	4	6	6	12	15	20	30	30	60

Hay varias expresiones asintóticas y desigualdades, por ejemplo  $g(n) \leq e^{n/e}$ .





**6.2.9. Corolario.** Si  $\text{ord } g = n$ , entonces

$$g^k = g^\ell \iff k \equiv \ell \pmod{n}.$$

*Demostración.* La igualdad  $g^k = g^\ell$  es equivalente a  $g^{k-\ell} = 1$  y luego a  $n \mid (k - \ell)$  gracias a la observación 6.2.7; es decir,  $k \equiv \ell \pmod{n}$ . ■

**6.2.10. Corolario.** Si  $\text{ord } g = n$ , entonces el subgrupo  $\langle g \rangle$  tiene  $n$  elementos.

*Demostración.* Tenemos

$$\langle g \rangle = \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{1, g, g^2, \dots, g^{n-1}\},$$

ya que  $0, 1, 2, \dots, n - 1$  representan todos los restos módulo  $n$ . ■

**6.2.11. Observación.** Si  $g$  es un elemento de orden finito, entonces

$$\text{ord } g^k = \frac{\text{ord } g}{\text{mcd}(\text{ord } g, k)}.$$

*Demostración.* Sea  $n = \text{ord } g$ . Si  $\text{mcd}(k, n) = d$ , entonces podemos escribir

$$n = n'd, \quad k = k'd, \quad \text{donde } \text{mcd}(n', k') = 1.$$

Luego,

$$n \mid km \iff n'd \mid k'dm \iff n' \mid k'm \iff n' \mid m,$$

y tenemos

$$\text{ord } g^k = \text{mín}\{m \mid (g^k)^m = 1\} = \text{mín}\{m \mid n \mid km\} = \text{mín}\{m \mid n' \mid m\} = n' = n/d. \quad \blacksquare$$

## 6.3 Grupos cíclicos

**6.3.1. Definición.** Se dice que un grupo  $G$  es **cíclico** si existe un elemento  $g \in G$  que genera todo  $G$ ; es decir  $G = \langle g \rangle$ .

En la situación de arriba, si  $g$  tiene orden finito, entonces, como hemos notado en 6.2.10, tenemos  $|\langle g \rangle| = \text{ord } g$ . Esto significa que un grupo finito es cíclico si y solamente si este posee un elemento de orden  $n = |G|$ . En este caso los elementos de  $G$  son

$$\{1, g, g^2, \dots, g^{n-1}\}.$$

**6.3.2. Observación.** Sea  $G = \langle g \rangle$  un grupo cíclico finito de orden  $n$ . Entonces, otro elemento  $g^k \in G$  es un generador de  $G$  si y solamente si  $\text{mcd}(k, n) = 1$ .

*Demostración.*  $g^k$  es un generador si y solamente si  $\text{ord } g^k = n$ . Para el orden de  $g^k$  tenemos la fórmula

$$\text{ord } g^k = \frac{n}{\text{mcd}(k, n)}$$

(véase 6.2.11). ■

**6.3.3. Ejemplo.** El grupo aditivo  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  es generado por  $[1]_n$ .

$$\begin{aligned} [0]_n &= 0 \cdot [1]_n, \\ [1]_n &= [1]_n, \\ [2]_n &= 2 \cdot [1]_n := [1]_n + [1]_n, \\ [3]_n &= 3 \cdot [1]_n := [1]_n + [1]_n + [1]_n, \\ &\vdots \end{aligned}$$

En general,  $[k]_n$  es un generador de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  si y solamente si  $\text{mcd}(k, n) = 1$ . El número de generadores de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  coincide con el valor de la función de Euler  $\phi(n)$ . ▲

**6.3.4. Ejemplo.** El grupo aditivo  $\mathbb{Z}$  es cíclico, generado por 1, ya que todo número entero puede ser escrito como  $\pm(1 + \dots + 1)$ . Otro generador de  $\mathbb{Z}$  es  $-1$ .

En general, si  $G = \langle g \rangle = \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$  es un grupo cíclico infinito, se ve que los únicos generadores son  $g$  y  $g^{-1}$ . ▲

Los ejemplos de arriba son de hecho todos los grupos cíclicos posibles, salvo isomorfismo.

**6.3.5. Proposición.** *Todo grupo cíclico finito de orden  $n$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .*

*Todo grupo cíclico infinito es isomorfo a  $\mathbb{Z}$ .*

*Demostración.* Si  $G$  es un grupo cíclico finito de orden  $n$ , entonces

$$G = \langle g \rangle = \{1, g, g^2, \dots, g^{n-1}\}.$$

para algún  $g \in G$ . Definamos la aplicación

$$\begin{aligned} f: G &\rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \\ g^k &\mapsto [k]_n. \end{aligned}$$

Esta aplicación está bien definida:  $g^k = g^\ell$  si y solamente si  $k \equiv \ell \pmod{n}$  (véase 6.2.9). Note que esto también demuestra que  $f$  es una biyección. Es un homomorfismo, ya que

$$f(g^k \cdot g^\ell) = f(g^{k+\ell}) = [k + \ell]_n = [k]_n + [\ell]_n = f(g^k) + f(g^\ell).$$

Ahora si

$$G = \langle g \rangle = \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

es un grupo cíclico infinito, entonces la aplicación

$$\begin{aligned} G &\rightarrow \mathbb{Z}, \\ g^n &\mapsto n \end{aligned}$$

es visiblemente un isomorfismo. ■

**6.3.6. Ejemplo.** El grupo de las raíces  $n$ -ésimas de la unidad  $\mu_n(\mathbb{C})$  es cíclico, generado por  $\zeta_n := e^{2\pi i/n}$ :

$$\mu_n(\mathbb{C}) = \{1, \zeta_n, \zeta_n^2, \dots, \zeta_n^{n-1}\}.$$

Tenemos un isomorfismo

$$\begin{aligned} \mu_n(\mathbb{C}) &\rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \\ \zeta_n^k &\mapsto [k]_n. \end{aligned}$$

En general,  $\zeta_n^k$  es un generador si y solamente si  $\text{mcd}(k, n) = 1$ . Los generadores de  $\mu_n(\mathbb{C})$  se llaman las raíces  $n$ -ésimas **primitivas** de la unidad. ▲

Note que el isomorfismo construido en 6.3.5 no es canónico: para construirlo, hemos escogido un generador  $g \in G$ . Diferentes generadores nos dan diferentes isomorfismos. Los grupos específicos  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ,  $\mu_n(\mathbb{C})$ ,  $\mathbb{Z}$  vienen con un generador canónico:  $[1]_n$ ,  $\zeta_n := e^{2\pi i/n}$ ,  $+1$  respectivamente.

**6.3.7. Ejemplo.** El grupo alternante

$$A_3 = \{\text{id}, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$$

es cíclico, generado por  $(1\ 2\ 3)$  o por  $(1\ 3\ 2)$ . Es isomorfo a  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ . ▲

**6.3.8. Proposición.** Sea  $G$  un grupo cíclico. Si  $H \subset G$  es un subgrupo, entonces  $H$  es también cíclico.

*Demostración.* Sea  $g$  un generador de  $G$ :

$$G = \langle g \rangle = \{g^k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Sin pérdida de generalidad  $H \neq \{\text{id}\}$  (en el caso contrario, la proposición es obvia). Entonces existe un número mínimo positivo  $k_0 = 1, 2, 3, \dots$  tal que  $g^{k_0} \in H$  (siendo un subgrupo,  $H$  contiene  $g^{-k}$  junto con  $g^k$ , así que este  $g^{k_0}$  siempre existe). Vamos a ver que  $g^{k_0}$  es un generador de  $H$ ; es decir,  $H = \langle g^{k_0} \rangle$ . De hecho, para todo  $g^k \in H$  podemos dividir con resto  $k$  por  $k_0$ :

$$k = qk_0 + r, \quad 0 \leq r < k_0.$$

Ahora, ya que  $H$  es un subgrupo, tenemos  $g^{-k_0} = (g^{k_0})^{-1} \in H$  y  $g^{-qk_0} = (g^{-k_0})^q \in H$ , y luego

$$g^{-qk_0} \cdot g^k = g^{-qk_0} \cdot g^{qk_0+r} = g^r \in H,$$

pero nuestra elección de  $k_0$  implica que  $r = 0$ . Entonces,  $k = qk_0$  y  $g^k = (g^{k_0})^q$ . ■

**6.3.9. Ejemplo.** Todos los subgrupos de  $\mathbb{Z}$  son de la forma

$$n\mathbb{Z} := \{0, \pm n, \pm 2n, \pm 3n, \dots\}.$$

Son cíclicos, generados por  $n$ . ▲

**6.3.10. Proposición.** Sea  $G$  es un grupo cíclico finito de orden  $n$ . Para todo subgrupo  $H \subset G$  se tiene  $|H| \mid n$ . Además, para todo  $d \mid n$  el grupo  $G$  contiene precisamente un subgrupo de orden  $d$ .

*Demostración.* Todo subgrupo  $H \subset G$  es necesariamente cíclico según 6.3.8, generado por  $g^k$  para algún  $k$ . Luego,

$$|H| = |\langle g^k \rangle| = \text{ord } g^k = n/d, \quad \text{donde } d = \text{mcd}(k, n).$$

De hecho, se tiene  $\langle g^k \rangle = \langle g^d \rangle$ . En efecto,  $d \mid k$  implica que  $\langle g^k \rangle \subseteq \langle g^d \rangle$ . Por otro lado,

$$|\langle g^d \rangle| = \text{ord } g^d = \frac{n}{\text{mcd}(d, n)} = n/d,$$

ya que  $d \mid n$ . Esto significa que  $\langle g^k \rangle = \langle g^d \rangle$ . Entonces,

$$H = \langle g^d \rangle.$$

Viceversa, a partir de cualquier  $d \mid n$  podemos considerar el subgrupo  $\langle g^d \rangle$ . Su orden es  $n/d$ . Para diferentes  $d, d' \mid n$  los subgrupos  $\langle g^d \rangle$  y  $\langle g^{d'} \rangle$  son diferentes, siendo grupos de diferente orden. ■

**6.3.11. Ejemplo.** En el grupo de las  $n$ -ésimas raíces de la unidad  $\mu_n(\mathbb{C})$  para todo  $m \mid n$  tenemos el subgrupo  $\mu_m(\mathbb{C}) \subset \mu_n(\mathbb{C})$ , y todos los subgrupos surgen de este modo. ▲

**6.3.12. Corolario.** Para la función  $\phi$  de Euler se cumple la identidad

$$\sum_{d \mid n} \phi(d) = n$$

donde la suma es sobre todos los divisores de  $n$ .

*Demostración.* Todo elemento  $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  tiene orden  $d = |\langle x \rangle|$  donde  $d \mid n$  y en total hay  $\phi(d)$  diferentes elementos de orden  $d$  que corresponden a diferentes generadores del único subgrupo de orden  $d$ . Entonces, la suma  $\sum_{d \mid n} \phi(d)$  nada más cuenta todos los  $n$  elementos de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . ■

**6.3.13. Ejemplo.**  $\phi(1) + \phi(2) + \phi(3) + \phi(6) = 1 + 1 + 2 + 2 = 6$ . ▲

Los grupos cíclicos son los grupos más simples que se pueden imaginar (¡salvo los grupos triviales!). Sin embargo, son de mucha importancia en aritmética.

## 6.4 Ejercicios

**Ejercicio 6.1.** Sea  $G$  un grupo. Supongamos que para dos elementos  $g, h \in G$  se cumple  $h = k g k^{-1}$  para algún  $k \in G$  (en este caso se dice que  $g$  y  $h$  son **conjugados**). Demuestre que el orden de  $g$  es finito si y solamente si el orden de  $h$  es finito, y en este caso  $\text{ord } g = \text{ord } h$ .

**Ejercicio 6.2.** Describa todos los tipos de ciclo posibles en el grupo simétrico  $S_5$  y encuentre los ordenes correspondientes.

**Ejercicio 6.3.** Encuentre el orden de cada uno de los elementos del grupo diédrico  $D_n$ .

**Ejercicio 6.4.** Encuentre los órdenes de las siguientes matrices en  $SL_2(\mathbb{Z})$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Ejercicio 6.5.** Expresar la matriz  $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  como un producto de matrices

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Ejercicio 6.6.** Demuestre que las matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

generan un subgrupo de  $GL_3(\mathbb{Z})$  que es isomorfo a  $S_3$ .

**Ejercicio 6.7.** Demuestre que el subgrupo de  $GL_2(\mathbb{Z})$  generado por las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

es isomorfo al grupo diédrico  $D_4$ ,

**Ejercicio 6.8.** Demuestre que el conjunto

$$X = \{1/p^k \mid p \text{ primo}, k = 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

genera el grupo aditivo  $\mathbb{Q}$ .

**Ejercicio 6.9.** Encuentre los elementos de orden finito en el grupo de isometrías del plano euclidiano  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

**Ejercicio 6.10.** Supongamos que  $G$  es un grupo finito de orden par. Demuestre que  $G$  tiene un elemento de orden 2.

**Ejercicio 6.11.** Supongamos que  $G$  es un grupo no trivial que no tiene subgrupos propios. Demuestre que  $G$  es un grupo cíclico finito de orden  $p$ , donde  $p$  es un número primo.

6.4. EJERCICIOS

---

El ejemplo de  $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$  y  $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  en  $SL_2(\mathbb{Z})$  demuestra que para dos elementos de orden finito, su producto puede tener orden infinito y además que un número finito de elementos de orden finito pueden generar un grupo infinito. Esto sucede gracias a la nonconmutatividad. La situación en grupos abelianos es más sencilla.

**Ejercicio 6.12.** Sea  $A$  un grupo abeliano (escrito en la notación aditiva).

- 1) Sea  $m = 1, 2, 3, \dots$  un número fijo. Demuestre que los elementos  $a \in A$  tales que  $m \cdot a = 0$  forman un subgrupo de  $A$ . Este se denota por  $A[m]$  y se llama el **subgrupo de  $m$ -torsión** en  $A$ .
- 2) Demuestre que todos los elementos de orden finito en  $A$  forman un subgrupo. Este se llama el **subgrupo de torsión** y se denota por  $A_{tors}$ :

$$A_{tors} = \bigcup_{m \geq 1} A[m].$$

- 3) Encuentre los grupos  $A[m]$  y  $A_{tors}$  para  $A = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^\times, \mathbb{C}^\times$ .

**Ejercicio 6.13.** Consideremos  $\mathbb{Q}$ , el grupo de los números racionales respecto a la adición. Demuestre que todo subgrupo finitamente generado de  $\mathbb{Q}$  es cíclico.

**Ejercicio 6.14.** Sea  $A$  un grupo abeliano.

- 1) Demuestre que para todo homomorfismo  $f: \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow A$  se tiene necesariamente  $f([1]_m) \in A[m]$ .
- 2) Demuestre que

$$\text{Hom}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, A) \rightarrow A[m], \quad f \mapsto f([1]_m)$$

es una biyección.

- 3) Describa todos los homomorfismos de grupos abelianos

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}, \quad \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

para diferentes  $m, n = 2, 3, 4, 5, \dots$

**Ejercicio 6.15.** Encuentre todos los homomorfismos entre el grupo  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  de los restos módulo  $n$  respecto a la adición y el grupo  $\mathbb{C}^\times$  de los números complejos no nulos respecto a la multiplicación.

**Ejercicio 6.16.** Demuestre que  $\text{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ .



# Capítulo 7

## Clases laterales

En este capítulo vamos a investigar la noción del subgrupo normal, que es fundamental para la teoría. Recordemos que hemos definido el anillo  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  considerando la relación de equivalencia

$$a \equiv b \pmod{n} \iff n \mid a - b$$

sobre los números enteros. Aquí la condición  $n \mid a - b$  puede ser escrita como  $a - b \in n\mathbb{Z}$ , donde  $n\mathbb{Z}$  es el subgrupo de  $\mathbb{Z}$  formado por los elementos divisibles por  $n$ . De modo similar, para cualquier grupo  $G$  y subgrupo  $H \subset G$ , se puede definir la “congruencia módulo  $H$ ” que va a ser una relación de equivalencia. Como en el caso de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , esto nos permite definir la operación de grupo sobre las clases de equivalencia, pero bajo una hipótesis especial sobre  $H$ .

### 7.1 Clases laterales

**7.1.1. Notación.** Para un subconjunto  $S \subset G$  y un elemento fijo  $g \in G$  escribimos

$$gS := \{gs \mid s \in S\}, \quad Sg := \{sg \mid s \in S\}.$$

En particular, para dos elementos fijos  $g_1, g_2 \in G$  se tiene

$$g_1 S g_2 = g_1 (S g_2) = (g_1 S) g_2 = \{g_1 s g_2 \mid s \in S\}.$$

Si  $G$  es un grupo abeliano, entonces  $gS = Sg$  para cualquier  $g \in G$ . Cuando  $G$  no es abeliano, en general  $gS \neq Sg$ .

**7.1.2. Observación.** Sea  $G$  un grupo y  $H$  su subgrupo. Consideremos la relación

$$g_1 \equiv g_2 \pmod{H}$$

para  $g_1, g_2 \in G$  dada por una de las siguientes condiciones equivalentes:

- 1)  $g_1^{-1} g_2 \in H$ .
- 2)  $g_2 \in g_1 H$  (es decir,  $g_2 = g_1 h$  para algún  $h \in H$ ).

## 7.1. CLASES LATERALES

---

*Esta es una relación de equivalencia.*

*Demostración.* La equivalencia de 1) y 2) está clara: la condición 1) quiere decir que  $g_1^{-1}g_2 = h$  para algún  $h \in H$ , pero esto es equivalente a  $g_2 = g_1h$ .

Ahora veamos que  $g_1 \equiv g_2 \pmod{H}$  es una relación de equivalencia. Primero, es reflexiva: tenemos  $g \equiv g \pmod{H}$  para todo  $g \in G$ , ya que  $g^{-1}g = 1 \in H$ . Luego, es simétrica: si  $g_1 \equiv g_2 \pmod{H}$ , esto quiere decir que  $g_1^{-1}g_2 \in H$ . Pero  $H$  es un subgrupo, y por lo tanto  $(g_1^{-1}g_2)^{-1} = g_2^{-1}g_1 \in H$ , así que  $g_2 \equiv g_1 \pmod{H}$ . Por fin, la relación es transitiva: si tenemos  $g_1 \equiv g_2 \pmod{H}$  e  $g_2 \equiv g_3 \pmod{H}$ , esto significa que

$$g_1^{-1}g_2 \in H, \quad g_2^{-1}g_3 \in H,$$

y entonces

$$(g_1^{-1}g_2)(g_2^{-1}g_3) = g_1^{-1}g_3 \in H;$$

es decir,  $g_1 \equiv g_3 \pmod{H}$ . ■

También podríamos considerar la relación

$$g_1 \sim g_2 \iff g_2g_1^{-1} \in H.$$

Ya que el grupo  $G$  no es necesariamente abeliano, en general esta relación es diferente de la relación de arriba, pero es también una relación de equivalencia.

**7.1.3. Observación.** Sea  $G$  un grupo y  $H$  su subgrupo. Consideremos la relación  $g_1 \sim g_2$  para  $g_1, g_2 \in G$  dada por una de las siguientes condiciones equivalentes:

- 1)  $g_2g_1^{-1} \in H$ .
- 2)  $g_2 \in Hg_1$  (es decir,  $g_2 = hg_1$  para algún  $h \in H$ ).

*Esta es una relación de equivalencia.*

*Demostración.* Similar a 7.1.2. ■

Como para toda relación de equivalencia, tenemos una descomposición de  $G$  en una unión disjunta de clases de equivalencia. Hemos visto que para la relación de 7.1.2 las clases de equivalencia son precisamente los conjuntos  $gH$  para  $g \in G$ , mientras que para la relación de 7.1.3 son los  $Hg$ .

**7.1.4. Definición.** Los subconjuntos  $gH \subset G$  se llaman las **clases laterales izquierdas**\* respecto a  $H$ . El conjunto de las clases laterales izquierdas se denota por  $G/H$ . Los subconjuntos  $Hg$  se llaman las **clases laterales derechas** respecto a  $H$ . El conjunto de las clases laterales derechas se denota por  $H \backslash G$ \*\*.

**7.1.5. Observación.** Para todo  $g \in G$  existen biyecciones de conjuntos

$$gH \cong H \quad \text{y} \quad Hg \cong H.$$

En otras palabras, cada clase lateral izquierda (resp. derecha) tiene la misma cardinalidad que  $H$ .

\*En inglés "clase lateral" se traduce como "coset".

\*\*No confundir la notación  $H \backslash G$  con la diferencia de conjuntos  $X \setminus Y$ .

*Demostración.* Por ejemplo, para las clases izquierdas, tenemos biyecciones

$$\begin{aligned} gH &\rightarrow H, \\ gh &\mapsto g^{-1}gh = h, \\ gh &\leftarrow h. \end{aligned}$$

■

**7.1.6. Observación.** *La aplicación entre conjuntos*

$$\begin{aligned} i: G &\rightarrow G, \\ g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

*induce una biyección canónica*

$$\begin{aligned} G/H &\rightarrow H \backslash G, \\ gH &\mapsto Hg^{-1}. \end{aligned}$$

*Demostración.* La aplicación está bien definida sobre las clases de equivalencia:  $g_1H = g_2H$  quiere decir que  $g_2 = g_1h$  para algún  $h \in H$ . Luego,  $g_2^{-1} = h^{-1}g_1^{-1}$ , así que  $Hg_2^{-1} = Hg_1^{-1}$ . Entonces, la aplicación  $g \mapsto g^{-1}$  envía la clase lateral izquierda  $gH$  a la clase lateral derecha  $Hg^{-1}$ .

Está claro que  $i$  es una biyección, puesto que  $i \circ i = \text{id}$ . ■

Aunque  $gH$  y  $Hg$  tienen la misma cardinalidad, en general  $gH \neq Hg$  si el grupo  $G$  no es abeliano.

**7.1.7. Ejemplo.** En el grupo simétrico  $S_n$  consideremos las permutaciones que dejan el número  $n$  fijo. Estas forman un subgrupo que es isomorfo a  $S_{n-1}$ :

$$H := \{\sigma \in S_n \mid \sigma(n) = n\} \cong S_{n-1}.$$

Dos permutaciones  $\sigma$  y  $\tau$  pertenecen a la misma clase lateral *izquierda* si  $\sigma^{-1}\tau \in H$ ; es decir, si  $\sigma(n) = \tau(n)$ . Entonces, tenemos  $n$  diferentes clases laterales izquierdas  $S_n/H$

$$L_i := \{\sigma \in S_n \mid \sigma(n) = i\}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Por otro lado,  $\sigma$  y  $\tau$  pertenecen a la misma clase lateral *derecha* si  $\tau\sigma^{-1} \in H$ ; es decir, si  $\sigma^{-1}(n) = \tau^{-1}(n)$ . Hay  $n$  diferentes clases laterales derechas  $H \backslash S_n$

$$R_i := \{\sigma \in S_n \mid \sigma(i) = n\}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Ahora si  $L_i = R_i$  para algún  $i$ , tenemos

$$\sigma(n) = i \iff \sigma(i) = n,$$

entonces  $i = n$ . ▲

**7.1.8. Ejemplo.** Consideremos el grupo aditivo  $\mathbb{C}$  e identifiquemos  $\mathbb{R}$  con el subgrupo de los números complejos  $z$  tales que  $\text{Im } z = 0$ . De la misma manera, consideremos el grupo multiplicativo  $\mathbb{C}^\times$  y sus subgrupos

$$\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C}^\times \mid |z| = 1\}$$

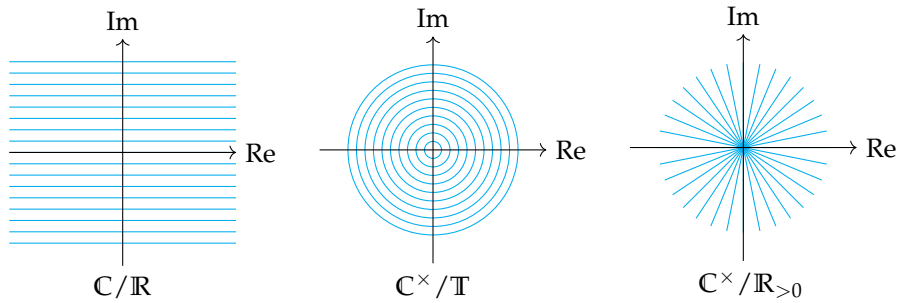
(el grupo del círculo) y

$$\mathbb{R}_{>0} = \{z \in \mathbb{C}^\times \mid \text{Im } z = 0, \text{Re } z > 0\}.$$

Los dibujos de abajo representan las clases laterales

$$\begin{aligned} \mathbb{C}/\mathbb{R} &= \{z + \mathbb{R} \mid z \in \mathbb{C}\}, \\ \mathbb{C}^\times/\mathbb{T} &= \{z\mathbb{T} \mid z \in \mathbb{C}^\times\}, \\ \mathbb{C}^\times/\mathbb{R}_{>0} &= \{z\mathbb{R}_{>0} \mid z \in \mathbb{C}^\times\} \end{aligned}$$

en el plano complejo.



▲

**7.1.9. Ejemplo.** Sea  $R$  un anillo conmutativo. Consideremos el grupo  $\text{GL}_n(R)$  y su subgrupo  $\text{SL}_n(R) := \{A \in \text{GL}_n(R) \mid \det A = 1\}$ . Para  $A, B \in \text{GL}_n(R)$  tenemos

$$\begin{aligned} A \text{SL}_n(R) = B \text{SL}_n(R) &\iff A^{-1}B \in \text{SL}_n(R) \iff \det(A^{-1}B) = \det(A)^{-1} \cdot \det(B) = 1 \\ &\iff \det A = \det B. \end{aligned}$$

De la misma manera,

$$\begin{aligned} \text{SL}_n(R) A = \text{SL}_n(R) B &\iff AB^{-1} \in \text{SL}_n(R) \iff \det(AB^{-1}) = \det(A) \cdot \det(B)^{-1} = 1 \\ &\iff \det A = \det B. \end{aligned}$$

Entonces, las clases laterales izquierdas y derechas coinciden:

$$A \text{SL}_n(R) = \text{SL}_n(R) A \quad \text{para todo } A \in \text{GL}_n(R),$$

y corresponden a las matrices de determinante fijo:

$$M_a = \{A \in \text{GL}_n(R) \mid \det A = a\} \quad \text{para algún } a \in R^\times.$$

▲

**7.1.10. Ejemplo.** Para el grupo simétrico  $G = S_n$  y el grupo alternante  $H = A_n$  tenemos

$$\sigma A_n = \tau A_n \iff \sigma^{-1} \tau \in A_n \iff \text{sgn}(\sigma^{-1} \tau) = 1 \iff \text{sgn} \sigma = \text{sgn} \tau,$$

y de la misma manera,

$$A_n \sigma = A_n \tau \iff \sigma \tau^{-1} \in A_n \iff \text{sgn}(\sigma \tau^{-1}) = 1 \iff \text{sgn} \sigma = \text{sgn} \tau.$$

Entonces,  $\sigma A_n = A_n \sigma$ , y hay solamente dos clases laterales: una formada por las permutaciones pares y la otra por las permutaciones impares:

$$A_n = \{\sigma \in S_n \mid \text{sgn} \sigma = +1\}, \quad (1\ 2) A_n = A_n (1\ 2) = \{\sigma \in S_n \mid \text{sgn} \sigma = -1\}.$$

▲

**7.1.11. Ejemplo.** El mismo razonamiento demuestra que para el grupo  $\mathbb{R}^\times$  y el subgrupo  $\mathbb{R}_{>0}$  hay dos clases laterales:

$$\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R}^\times \mid x > 0\}, \quad -1 \cdot \mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R}^\times \mid x < 0\}.$$

▲

## 7.2 Teorema de Lagrange y sus consecuencias

**7.2.1. Definición.** Si la cardinalidad  $|G/H| = |H \backslash G|$  es finita, este número se llama el **índice** de  $H$  en  $G$  y se denota por  $|G : H|$ .

**7.2.2. Ejemplo.** Tenemos  $|S_n : A_n| = 2$  y  $|\mathbb{R}^\times : \mathbb{R}_{>0}| = 2$ . Note en particular que un grupo infinito puede tener subgrupos de índice finito. ▲

**7.2.3. Proposición (Teorema de Lagrange).** Si  $G$  es un grupo finito y  $H$  es su subgrupo, entonces

$$|G| = |G : H| \cdot |H|.$$

*Demostración.*  $G$  se descompone en una unión disjunta de clases de equivalencia. En total hay  $|G : H|$  clases de equivalencia y cada una tiene  $|H|$  elementos como vimos en 7.1.5. ■

**7.2.4. Corolario.** Si  $G$  es un grupo finito y  $H \subset G$  es un subgrupo, entonces  $|G|$  es divisible por  $|H|$ .

**7.2.5. Ejemplo.** En el capítulo anterior hemos visto que un grupo cíclico de orden  $n$  tiene precisamente un subgrupo de orden  $d$  para cada  $d \mid n$ . ▲

**7.2.6. Ejemplo.** Hemos visto que el grupo de cuaterniones  $Q_8$  y el grupo diédrico  $D_4$  tienen subgrupos de orden 1, 2, 4, 8. ▲

**7.2.7. Ejemplo.** El grupo alternante  $A_n$  es un subgrupo del grupo simétrico  $S_n$ . Tenemos  $|A_n| = |S_n|/2$ . ▲

**7.2.8. Corolario.** Si  $G$  es un grupo finito, entonces el orden de todo elemento  $g \in G$  divide a  $|G|$ .

*Demostración.* El orden de  $g$  es el orden del subgrupo  $\langle g \rangle$  generado por  $g$ . ■

**7.2.9. Corolario.** Si  $|G| = n$ , entonces  $g^n = 1$  para todo  $g \in G$ .

*Demostración.* Sigue del hecho de que el orden de todo  $g \in G$  divide a  $|G|$ . ■

**7.2.10. Ejemplo.** Para el anillo  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  el grupo de unidades viene dado por

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times = \{[a]_n \mid \text{mcd}(a, n) = 1\}.$$

Su cardinalidad es la función  $\phi$  de Euler:

$$|(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times| = \phi(n).$$

Entonces, se tiene

$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n} \quad \text{si } \text{mcd}(a, n) = 1.$$

Esta congruencia se conoce como el **teorema de Euler**. En particular, si  $n = p$  es primo, se obtiene el pequeño teorema de Fermat:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \quad \text{si } p \nmid a.$$

Ya lo demostramos usando la identidad  $(x + y)^p = x^p + y^p$  en el cuerpo  $\mathbb{F}_p$ , y ahora obtuvimos otra prueba que usa la teoría de grupos. ▲

**7.2.11. Corolario.** Todo grupo de orden primo  $p$  es cíclico.

*Demostración.* Si  $|G| = p$ , entonces los subgrupos de  $G$  son de orden 1 o  $|G|$ ; es decir,  $G$  no tiene subgrupos propios. Sea  $g \in G$  un elemento tal que  $g \neq 1$ . Entonces  $\langle g \rangle \neq \{1\}$ , y por lo tanto  $\langle g \rangle = G$ . ■

## Algunos ejemplos elementales

**7.2.12. Ejemplo.** Para el grupo alternante  $A_4$  tenemos  $|A_4| = 4!/2 = 12$ , así que los subgrupos necesariamente tienen orden 1, 2, 3, 4, 6, 12. Cada subgrupo de orden 2 es de la forma  $\{\text{id}, \sigma\}$  donde  $\text{ord } \sigma = 2$ . Los elementos de orden 2 son permutaciones de la forma  $(\bullet \bullet)(\bullet \bullet)$ , productos de dos transposiciones disjuntas. Tenemos los siguientes tres subgrupos:

$$\langle (1\ 2)(3\ 4) \rangle, \quad \langle (1\ 3)(2\ 4) \rangle, \quad \langle (1\ 4)(2\ 3) \rangle.$$

Cada subgrupo de orden 3 es cíclico, generado por un elemento de orden 3, en este caso un 3-ciclo. Tenemos los siguientes cuatro subgrupos:

$$\langle (1\ 2\ 3) \rangle = \langle (1\ 3\ 2) \rangle, \quad \langle (1\ 2\ 4) \rangle = \langle (1\ 4\ 2) \rangle, \quad \langle (1\ 3\ 4) \rangle = \langle (1\ 4\ 3) \rangle, \quad \langle (2\ 3\ 4) \rangle = \langle (2\ 4\ 3) \rangle.$$

Ahora si  $G$  es un subgrupo de orden 4, sus elementos necesariamente tienen orden 2 o 4. En  $A_4$  no hay elementos de orden 4, y la única opción que nos queda es de considerar todos los tres elementos de orden 2 junto con la permutación identidad:

$$V = \{\text{id}, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}.$$

Se ve que esto es un subgrupo.

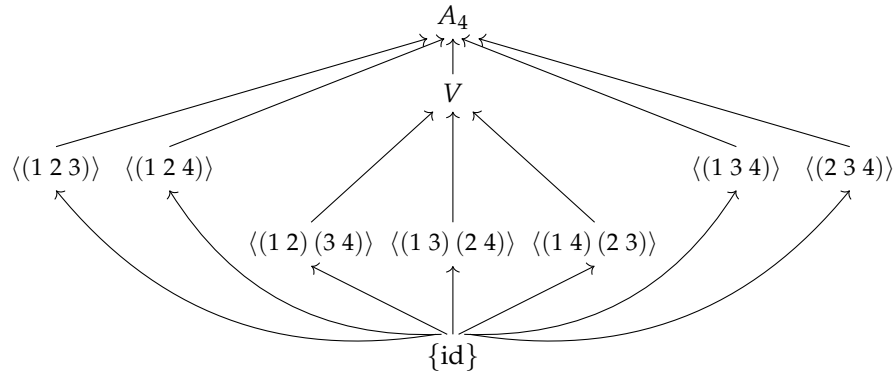
Si  $G$  es un subgrupo de orden 6, sus elementos necesariamente tienen orden 2 o 3; es decir, son 3-ciclos o permutaciones de la forma  $(\bullet \bullet)(\bullet \bullet)$ . Junto con cada 3-ciclo  $G$  debe contener su inverso. Las posibles opciones son

$$\{\text{id}, (a b c), (a c b), (1 2)(3 4), (1 3)(2 4), (1 4)(2 3)\}$$

y

$$\{\text{id}, (a b c), (a c b), (i j k), (i k j), (p q)(r s)\}.$$

Podemos descartar el primer caso: conjugando  $(a b c)$  por una de las permutaciones  $(\bullet \bullet)(\bullet \bullet)$  se obtiene otro 3-ciclo  $(a' b' c') \neq (a b c), (a c b)$ . De la misma manera, en el segundo caso, conjugando  $(p q)(r s)$  por un 3-ciclo se obtiene  $(p' q')(r' s') \neq (p q)(r s)$ . Podemos concluir que en  $A_4$  no hay subgrupos de orden 6.



▲

**7.2.13. Comentario.** El último ejemplo demuestra que si  $d \mid |G|$ , entonces  $G$  no necesariamente tiene subgrupos de orden  $d$ .

**7.2.14. Ejemplo.** Sea

$$G = \{1, a, b, c\}.$$

un grupo de orden 4. Sus elementos no triviales necesariamente tienen orden 2 o 4. Si en  $G$  hay un elemento de orden 4, entonces  $G$  es cíclico, isomorfo a  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ . En el caso contrario, todos los elementos no triviales son de orden 2 y la tabla de multiplicación viene dada por

·	1	$a$	$b$	$c$
1	1	$a$	$b$	$c$
$a$	$a$	1		
$b$	$b$		1	
$c$	$c$			1

7.2. TEOREMA DE LAGRANGE Y SUS CONSECUENCIAS

---

Ya que los elementos en las filas y columnas no se pueden repetir, tenemos una especie de sudoku y la única opción de completar la tabla es la siguiente:

·	1	$a$	$b$	$c$
1	1	$a$	$b$	$c$
$a$	$a$	1	$c$	$b$
$b$	$b$	$c$	1	$a$
$c$	$c$	$b$	$a$	1

Este grupo es isomorfo al grupo  $V \subset A_4$ . Acabamos de demostrar que  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  y  $V$  son los únicos grupos de orden 4 salvo isomorfismo. ▲

**7.2.15. Ejemplo.** Sea  $G$  un grupo de orden 6. Sus elementos no triviales necesariamente tienen orden 2, 3, o 6. Si hay un elemento de orden 6, entonces  $G$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ .

1. Primero, recordemos el siguiente resultado general: todo grupo de orden par tiene por lo menos un elemento de orden 2\*. En nuestro caso, ya que  $|G| = 6$  es par, sabemos que  $G$  tiene un elemento de orden 2. Sea  $a$  este elemento.
2. Se puede ver que  $G$  también contiene un elemento de orden 3. En el caso contrario, si todos los elementos no triviales son de orden 2, para dos elementos  $a, b$  su producto  $ab$  es otro elemento de orden 2 (en efecto, un grupo donde  $g^2 = 1$  para todo  $g$  es necesariamente abeliano y luego  $(ab)^2 = a^2 b^2 = 1$ ). Esto significa que

$$\langle a, b \rangle = \{1, a, b, ab\}$$

es un subgrupo de orden 4, pero esto contradice el teorema de Lagrange.

Podemos concluir que hay algún elemento  $b$  de orden 3.

3. Tenemos la siguiente tabla de multiplicación:

---

\*En efecto,  $g^2 = 1$  si y solamente si  $g = g^{-1}$ . Luego, si todos los elementos no triviales tienen orden  $> 2$ , podemos escribir

$$(*) \quad G = \{1\} \sqcup \{g_1, g_1^{-1}\} \sqcup \{g_2, g_2^{-1}\} \sqcup \dots$$

donde  $g_i \neq g_i^{-1}$ , dado que  $\text{ord } g_i > 2$ . Es nada más la partición de  $G$  respecto a la relación de equivalencia

$$g \sim g' \iff g' = g^{-1}.$$

Luego, (\*) implica que el orden del grupo es impar.



·	1	a	b	b <sup>2</sup>	ab	ab <sup>2</sup>
1	1	a	b	b <sup>2</sup>	ab	ab <sup>2</sup>
a	a	1	ab	ab <sup>2</sup>	b	b <sup>2</sup>
b	b		b <sup>2</sup>	1		
b <sup>2</sup>	b <sup>2</sup>		1	b		
ab	ab		ab <sup>2</sup>	a		
ab <sup>2</sup>	ab <sup>2</sup>		a	ab		

Fijémonos ahora en la tercera fila. Para el producto  $b \cdot a$  hay dos opciones diferentes:  $ba = ab$  o  $ba = ab^2$ .

I. Si  $ba = ab$ , entonces el grupo es abeliano y es cíclico, generado por  $ab$ : tenemos

$$(ab)^2 = b^2, \quad (ab)^3 = a, \quad (ab)^4 = b, \quad (ab)^5 = ab^2.$$

II. Si  $ba = ab^2$ , entonces el resto de la tabla se completa automáticamente.

$$b \cdot ab = a, \quad b \cdot ab^2 = ab, \\ b^2 \cdot a = b \cdot ab^2 = ab^2 \cdot b^4 = ab, \quad b^2 \cdot ab = ab^2, \quad b^2 \cdot ab^2 = a, \\ ab \cdot a = a \cdot ab^2 = b^2, \quad ab \cdot ab = a \cdot ab^2 \cdot b = 1, \quad \text{etc.}$$

·	1	a	b	b <sup>2</sup>	ab	ab <sup>2</sup>
1	1	a	b	b <sup>2</sup>	ab	ab <sup>2</sup>
a	a	1	ab	ab <sup>2</sup>	b	b <sup>2</sup>
b	b	ab <sup>2</sup>	b <sup>2</sup>	1	a	ab
b <sup>2</sup>	b <sup>2</sup>	ab	1	b	ab <sup>2</sup>	a
ab	ab	b <sup>2</sup>	ab <sup>2</sup>	a	1	b
ab <sup>2</sup>	ab <sup>2</sup>	b	a	ab	b <sup>2</sup>	1

Podemos concluir que salvo isomorfismo, hay dos grupos de orden 6: uno abeliano que es  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  y el otro es no abeliano  $S_3$ .

.	1	(1 2)	(1 2 3)	(1 3 2)	(2 3)	(1 3)
id	id	(1 2)	(1 2 3)	(1 3 2)	(2 3)	(1 3)
(1 2)	(1 2)	id	(2 3)	(1 3)	(1 2 3)	(1 3 2)
(1 2 3)	(1 2 3)	(1 3)	(1 3 2)	id	(1 2)	(2 3)
(1 3 2)	(1 3 2)	(2 3)	id	(1 2 3)	(1 3)	(1 2)
(2 3)	(2 3)	(1 3 2)	(1 3)	(1 2)	id	(1 2 3)
(1 3)	(1 3)	(1 2 3)	(1 2)	(2 3)	(1 3 2)	id



El último ejemplo es divertido, pero usando solamente las ideas elementales no se puede decir mucho sobre los grupos finitos de orden mayor. Sin embargo, como vimos, el teorema de Lagrange ya impone muchas restricciones sobre la estructura de grupos finitos.

### Una aplicación seria

Terminemos esta sección por el siguiente resultado importante.

**7.2.16. Proposición.** *Sea  $k$  un cuerpo. Entonces, todo subgrupo finito de su grupo de unidades  $k^\times$  es cíclico.*

Para demostrarlo, necesitamos el siguiente resultado auxiliar.

**7.2.17. Lema.** *Sea  $G$  un grupo de orden finito  $n$ . Supongamos que para todo  $d \mid n$  se cumple*

$$(7.1) \quad \#\{x \in G \mid x^d = 1\} \leq d.$$

*Entonces  $G$  es cíclico.*

*Demostración.* Si  $G$  tiene un elemento  $g$  de orden  $d$ , entonces este genera el subgrupo  $\langle g \rangle$  que es cíclico de orden  $d$ . Todo elemento  $h \in G$  tal que  $h^d = 1$  pertenece a este subgrupo gracias a la hipótesis (7.1), y si  $h$  tiene orden  $d$ , entonces es otro generador de  $\langle g \rangle$ . En total este subgrupo tiene  $\phi(d)$  generadores. Entonces, el número de elementos de orden  $d$  es igual a 0 o  $\phi(d)$ . De hecho, el primer caso no es posible: la fórmula

$$\sum_{d \mid n} \phi(d) = n$$

demuestra que si para algún  $d \mid n$  el grupo  $G$  no tiene elementos de orden  $d$ , entonces  $|G| < n$ . En particular,  $G$  debe tener un elemento de orden  $n$  y por lo tanto es cíclico. ■

*Demostración de 7.2.16 [Ser1973].* Para un cuerpo, la ecuación polinomial  $x^d - 1 = 0$  tiene como máximo  $d$  soluciones. Entonces, se cumple la hipótesis (7.1) y podemos aplicar 7.2.17. ■

**7.2.18. Ejemplo.** Para  $k = \mathbb{R}$  los únicos elementos de orden finito en  $\mathbb{R}^\times$  son  $\pm 1$ . ▲

**7.2.19. Ejemplo.** Para  $k = \mathbb{C}$  los elementos de orden finito en  $\mathbb{C}^\times$  forman el subgrupo de las raíces de la unidad  $\mu_\infty(\mathbb{C})$ . El resultado de 7.2.16 nos dice que todos los subgrupos finitos de  $\mathbb{C}^\times$  son cíclicos. ▲

**7.2.20. Ejemplo.** Si  $k = \mathbb{F}_q$  es un cuerpo finito (donde  $q = p^k$  para algún primo  $p$ ), 7.2.16 implica que el grupo  $\mathbb{F}_q^\times = \mathbb{F}_q \setminus \{0\}$  es cíclico de orden  $q - 1$ . Note que la demostración de 7.2.16 no es constructiva: un conteo implica que  $\mathbb{F}_{p^k}^\times$  posee un generador, pero no dice cuál elemento particular\* es. En este sentido, aunque se puede escribir

$$\mathbb{F}_q^\times \cong \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z},$$

el grupo aditivo  $\mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$  tiene un generador distinguido [1], mientras que para  $\mathbb{F}_q^\times$  no está claro cuál generador hay que escoger (hay  $\phi(q-1)$  posibilidades). El isomorfismo de arriba depende de esta elección.

Para dar un ejemplo particular, el grupo  $\mathbb{F}_4^\times$  es cíclico de orden 3 y puede ser escrito como

$$\mathbb{F}_4^\times = \{1, a, a^2\}$$

donde  $a$  es un generador (tenemos  $\phi(4-1) = 2$  opciones para escogerlo:  $a^2$  sería el otro generador). Luego la tabla de adición en  $\mathbb{F}_4$  viene dada por

+	0	1	$a$	$a^2$
0	0	1	$a$	$a^2$
1	1	0	$a^2$	$a$
$a$	$a$	$a^2$	0	1
$a^2$	$a^2$	$a$	1	0

Note que este grupo es isomorfo al grupo  $V$ .

Para el cuerpo  $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ , el grupo

$$\mathbb{F}_5^\times = \{[1], [2], [3], [4]\}$$

es cíclico. Sus generadores son [2] y [3]: tenemos

$$2^2 \equiv 4 \pmod{5}, \quad 2^3 \equiv 3 \pmod{5}, \quad 2^4 \equiv 1 \pmod{5}$$

y

$$3^2 \equiv 4 \pmod{5}, \quad 3^3 \equiv 2 \pmod{5}, \quad 3^4 \equiv 1 \pmod{5}.$$

▲

---

\*Recuerdo al lector que no hemos construido los cuerpos  $\mathbb{F}_{p^k}$  para  $k > 1$ ; solo mencioné que estos existen.

Usando la estructura cíclica de  $\mathbb{F}_p^\times$ , podemos demostrar algunos resultados clásicos sobre los cuadrados módulo  $p$ . Recordemos que cuando para  $x \in \mathbb{F}_p$  se tiene  $x = y^2$  para algún  $y \in \mathbb{F}_p$ , se dice que  $x$  es un **residuo cuadrático módulo  $p$** .

**7.2.21. Proposición.** *El producto de dos no-cuadrados es un cuadrado.*

*Para  $p > 2$  hay precisamente  $(p + 1)/2$  residuos cuadráticos módulo  $p$ .*

*Demostración.* Primero,  $0 \in \mathbb{F}_p$  es un residuo cuadrático. Para contar los residuos no nulos, notamos que

$$\mathbb{F}_p^\times = \{1, x, x^2, \dots, x^{p-2}\}$$

para algún generador  $x \in \mathbb{F}_p^\times$ . Luego  $x^k$  es un cuadrado si y solamente si  $k$  es par. Esto demuestra que el producto de dos no-cuadrados es un cuadrado. Luego, entre los números  $k = 0, 1, 2, \dots, p - 2$  precisamente  $(p - 1)/2$  son pares. ■

**7.2.22. Proposición.**  *$-1$  es un residuo cuadrático módulo  $p$  si y solamente si  $p \not\equiv 3 \pmod{4}$ .*

*Demostración.* Necesitamos ver que en el cuerpo finito  $\mathbb{F}_p$  se cumple  $-1 = x^2$  para algún  $x \in \mathbb{F}_p$  si y solamente si  $p \not\equiv 3 \pmod{4}$ .

Si  $p = 2$ , entonces  $-1 = 1 = 1^2$ . Podemos suponer que  $p > 2$ .

Para  $p > 2$  la identidad  $-1 = x^2$  en  $\mathbb{F}_p$  implica que  $x$  es una raíz cuarta primitiva de la unidad:

$$x \neq 1, \quad x^2 = -1 \neq 1, \quad x^3 = -x \neq 1, \quad x^4 = 1.$$

Viceversa, supongamos que existe  $x \in \mathbb{F}_p$  tal que

$$x \neq 1, \quad x^2 \neq 1, \quad x^3 \neq 1, \quad x^4 = 1.$$

En particular,  $x^2 \neq 1$  implica que también  $x \neq -1$ . Luego, de la ecuación

$$0 = x^4 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1),$$

podemos deducir que  $x^2 = -1$ .

Esto demuestra que  $-1$  es un residuo cuadrático en  $\mathbb{F}_p$  si y solamente si  $\mathbb{F}_p$  contiene una raíz cuarta primitiva de la unidad. Esto se reduce a la existencia de un elemento de orden 4 en el grupo  $\mathbb{F}_p^\times$ . El último es cíclico de orden  $p - 1$  y por lo tanto contiene un elemento de orden 4 si y solamente si

$$4 \mid (p - 1) \iff p - 1 = 4k \text{ para algún } k \iff p \equiv 1 \pmod{4}.$$

■

## 7.3 Subgrupos normales

Si  $G$  no es abeliano y  $H \subset G$  es un subgrupo, en general tenemos  $gH \neq Hg$ . Cuando esto se cumple, se dice que  $H$  es un subgrupo normal. Esto también puede ser formulado en términos de **conjugación**. Cuando para dos elementos  $h$  y  $h'$  se cumple  $h' = ghg^{-1}$  para algún  $g \in G$ , se dice que  $h$  y  $h'$  son **conjugados**, o que  $h'$  es el resultado de la **conjugación de  $h$  por  $g$** .

**7.3.1. Definición (Galois, 1832).** Sea  $G$  un grupo y  $H \subset G$  un subgrupo. Se dice que  $H$  es **normal** si se cumple una de las propiedades equivalentes:

1) toda clase lateral izquierda coincide con la clase lateral derecha correspondiente:

$$gH = Hg \quad \text{para todo } g \in G;$$

2) la conjugación de  $H$  por los elementos de  $G$  coincide con  $H$ :

$$gHg^{-1} := \{ghg^{-1} \mid h \in H\} = H \quad \text{para todo } g \in G;$$

3) una variación de 2):

$$ghg^{-1} \in H \quad \text{para todo } g \in G \text{ y } h \in H.$$

La equivalencia de 1) y 2) está clara. La condición 3) significa que  $gHg^{-1} \subseteq H$  para todo  $g \in G$  y por lo tanto 2) implica 3). Por fin, si se cumple 3), entonces para cualesquiera  $g$  y  $h$  tenemos  $g^{-1}hg \in H$ , y luego  $g(g^{-1}hg)g^{-1} = h$ , lo que implica  $H \subseteq gHg^{-1}$ . Entonces, 3) implica 2).

Cuidado: si tenemos una cadena de subgrupos

$$K \subset H \subset G$$

y  $K$  es normal en  $H$ , esto no quiere decir que  $K$  es normal en  $G$ .

**7.3.2. Ejemplo.** Si  $G$  es un grupo abeliano, todo subgrupo es normal. ▲

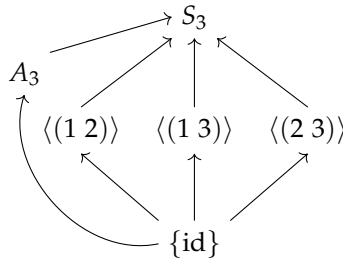
**7.3.3. Ejemplo.** Los subgrupos  $\{1\}$  y  $G$  son normales. ▲

**7.3.4. Ejemplo.** En el grupo simétrico  $S_3$  hay 3 subgrupos de orden 2 que corresponden a las transposiciones:

$$\langle(1\ 2)\rangle, \langle(1\ 3)\rangle, \langle(2\ 3)\rangle.$$

Luego, tenemos el grupo alternante, que es el único subgrupo de orden 3:

$$A_3 = \{\text{id}, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}.$$



El subgrupo  $A_3$  es normal, ya que para todo  $\tau \in S_3$ , si  $\sigma$  es un 3-ciclo, entonces  $\tau\sigma\tau^{-1}$  es también un 3-ciclo. Las relaciones

$$\begin{aligned}(1\ 3)(1\ 2)(1\ 3)^{-1} &= (2\ 3), \\ (1\ 2)(1\ 3)(1\ 2)^{-1} &= (2\ 3), \\ (1\ 2)(2\ 3)(1\ 2)^{-1} &= (1\ 3)\end{aligned}$$

demuestran que los subgrupos de orden 2 no son normales. ▲

**7.3.5. Ejemplo.** De nuestra descripción de los subgrupos del grupo alternante  $A_4$  en 7.2.12 se ve que el único subgrupo normal propio no trivial es

$$V = \{\text{id}, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}.$$

En efecto, los subgrupos  $\langle (a\ b)(c\ d) \rangle$  no pueden ser normales: conjugando  $(a\ b)(c\ d)$  por un 3-ciclo se obtiene  $(a'\ b')(c'\ d') \neq (a\ b)(c\ d)$ . Por la misma razón, los subgrupos  $\langle (a\ b\ c) \rangle$  tampoco son normales. Nos queda  $V$ , y sus elementos no triviales son precisamente todos los elementos de tipo de ciclo  $(\bullet\ \bullet)(\bullet\ \bullet)$ . Conjugando tales elementos, siempre se obtienen permutaciones del mismo tipo de ciclo. ▲

**7.3.6. Ejemplo.** El subgrupo de  $S_n$

$$H := \{\sigma \in S_n \mid \sigma(n) = n\} \cong S_{n-1}$$

considerado en 7.1.7 no es normal para  $n \geq 3$ , puesto que  $\sigma H = H\sigma$  solo para  $\sigma = \text{id}$ . ▲

**7.3.7. Observación.** Para todo grupo  $G$  su centro  $Z(G)$  es un subgrupo normal.

*Demostración.* Tenemos

$$Z(G) := \{x \in G \mid xg = gx \text{ para todo } g \in G\} = \{x \in G \mid x = gxg^{-1} \text{ para todo } g \in G\},$$

y en particular, para todo  $g \in G$  tenemos

$$gZ(G)g^{-1} = Z(G).$$

■

**7.3.8. Observación.** Para todo homomorfismo  $f: G \rightarrow H$  el núcleo  $\ker f$  es un subgrupo normal de  $G$ .

*Demostración.* Para todo  $g \in G$  y  $k \in \ker f$  tenemos

$$f(gkg^{-1}) = f(g) \cdot f(k) \cdot f(g)^{-1} = f(g) \cdot f(g)^{-1} = 1,$$

así que  $g \cdot (\ker f) \cdot g^{-1} \subseteq \ker f$ . ■

**7.3.9. Ejemplo.**  $A_n$  es un subgrupo normal de  $S_n$ , siendo el núcleo del homomorfismo  $\text{sgn}: S_n \rightarrow \{\pm 1\}$ . ▲

**7.3.10. Ejemplo.**  $SL_n(\mathbb{R})$  es un subgrupo normal de  $GL_n(\mathbb{R})$ , siendo el núcleo de  $\det: GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^\times$ . ▲

**7.3.11. Ejemplo.** El signo de un número real es un homomorfismo  $\text{sgn}: \mathbb{R}^\times \rightarrow \{\pm 1\}$ . Consideremos el homomorfismo

$$GL_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{\det} \mathbb{R}^\times \xrightarrow{\text{sgn}} \{\pm 1\}.$$

Su núcleo es el subgrupo normal

$$GL_n(\mathbb{R})^+ := \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det A > 0\}.$$

▲

A diferencia del núcleo  $\ker f \subset G$ , la imagen  $\text{im } f \subset H$  de un homomorfismo  $f: G \rightarrow H$  en general no es un subgrupo normal. De hecho, si  $K \subset H$  no es un subgrupo normal, entonces la inclusión  $i: K \hookrightarrow H$  tiene  $K$  como su imagen. En los grupos abelianos, todos los subgrupos son normales, así que si  $f: A \rightarrow B$  es un homomorfismo de grupos abelianos, entonces  $\text{im } f \subset B$  es un subgrupo normal. Es una diferencia fundamental entre los grupos abelianos y no abelianos.

## 7.4 Grupos cociente

El siguiente resultado explica el significado de la noción de subgrupo normal. La normalidad de  $H \subset G$  significa precisamente que la multiplicación en  $G$  es compatible con la relación de equivalencia módulo  $H$ .

**7.4.1. Proposición.** Sea  $H \subset G$  un subgrupo. Para cualesquiera  $g_1, g'_1, g_2, g'_2 \in G$  se tiene

$$(7.2) \quad g_1 \equiv g'_1 \pmod{H}, \quad g_2 \equiv g'_2 \pmod{H} \implies g_1 g_2 \equiv g'_1 g'_2 \pmod{H}$$

si y solamente si  $H$  es normal.

*Demostración.* Recordemos que por la definición de la relación de equivalencia módulo  $H$ , la condición (7.2) nos dice que para cualesquiera  $g_1, g'_1, g_2, g'_2 \in G$

$$g'_1 \in g_1 H, \quad g'_2 \in g_2 H \implies g_1 g_2 \equiv g'_1 g'_2 \pmod{H}.$$

Es decir, para cualesquiera  $g_1, g_2 \in G, h_1, h_2 \in H$

$$g_1 g_2 \equiv (g_1 h_1)(g_2 h_2) \pmod{H},$$

los que es equivalente a

$$(g_1 g_2)^{-1} (g_1 h_1)(g_2 h_2) \in H$$

Luego,

$$(g_1 g_2)^{-1} (g_1 h_1)(g_2 h_2) = g_2^{-1} h_1 g_2 h_2,$$

entonces la condición es

$$g_2^{-1} h_1 g_2 \in H.$$

Esto es equivalente a la normalidad de  $H$ . ■

**7.4.2. Definición.** Si  $H \subset G$  es un subgrupo normal, entonces el **grupo cociente** correspondiente es el conjunto de las clases laterales  $G/H$  junto con la operación

$$g_1H \cdot g_2H = (g_1g_2)H.$$

En otras palabras, el producto de las clases de equivalencia de  $g_1$  y  $g_2$  módulo  $H$  es la clase de equivalencia de  $g_1g_2$ .

Como acabamos de ver, la fórmula de arriba tiene sentido: si  $H$  es normal, entonces la clase lateral  $(g_1g_2)H$  no depende de  $g_1$  y  $g_2$ , sino de las clases laterales  $g_1H$  y  $g_2H$ . Esta operación es asociativa, puesto que la operación en  $G$  lo es; la identidad en  $G/H$  es la clase lateral  $1H = H$ ; los inversos vienen dados por  $(gH)^{-1} = g^{-1}H$ .

**7.4.3. Comentario.** El lector debe de conocer esta definición del curso de álgebra lineal. Si  $U$  es un espacio vectorial y  $V \subset U$  es un subespacio, entonces sobre el espacio cociente

$$U/V = \{u + V \mid u \in U\}$$

la adición se define por

$$(u_1 + V) + (u_2 + V) := (u_1 + u_2) + V.$$

De la misma manera, para un grupo abeliano  $A$  y su subgrupo  $B \subset A$  se define el grupo cociente  $A/B$ . Para los grupos no abelianos, todo se complica: como acabamos de ver, para que la multiplicación sobre  $G/H$  tenga sentido, necesitamos que  $H$  sea normal en  $G$ .

La fórmula  $|G/H| = |G|/|H|$  para grupos finitos (el teorema de Lagrange) es un análogo de la fórmula  $\dim_k U/V = \dim_k U - \dim_k V$  en álgebra lineal para espacios vectoriales de dimensión finita.

**7.4.4. Ejemplo.** Todos los subgrupos de  $\mathbb{Z}$  son de la forma  $n\mathbb{Z} = \{0, \pm n, \pm 2n, \pm 3n, \dots\}$ . Son automáticamente normales, ya que nuestro grupo es abeliano. La relación  $a \equiv b \pmod{n\mathbb{Z}}$  significa que  $a \equiv b \pmod{n}$ . El grupo cociente  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  no es otra cosa que el grupo de los restos módulo  $n$  que hemos denotado por  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  desde el principio. ▲

**7.4.5. Ejemplo.** El grupo alternante  $A_n$  es un subgrupo normal del grupo simétrico  $S_n$ . Para el grupo cociente  $S_n/A_n$  tenemos

$$|S_n/A_n| = |S_n|/|A_n| = \frac{n!}{n!/2} = 2,$$

entonces  $S_n/A_n \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . De hecho, es más lógico escribir “ $\{\pm 1\}$ ”, ya que todo esto viene del signo de permutaciones. ▲

**7.4.6. Ejemplo.** En el grupo alternante  $A_4$  el único subgrupo normal propio es  $V$ . Tenemos

$$|A_4/V| = |A_4|/|V| = \frac{4!/2}{4} = 3,$$

así que  $A_4/V \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ . ▲



**7.4.7. Proposición (Propiedad universal del cociente).** Sea  $H \subseteq G$  un subgrupo normal. Sea

$$p: G \twoheadrightarrow G/H,$$

$$g \mapsto gH$$

el epimorfismo sobre el grupo cociente. Si  $f: G \rightarrow G'$  es un homomorfismo de grupos tal que  $H \subseteq \ker f$ , entonces  $f$  se factoriza de modo único por  $G/H$ : existe un homomorfismo único  $\bar{f}: G/H \rightarrow G'$  tal que  $f = \bar{f} \circ p$ .

$$\begin{array}{ccc}
 H & & \\
 \downarrow & \searrow =e & \\
 G & \xrightarrow{f} & G' \\
 p \downarrow & \exists! \nearrow \bar{f} & \\
 G/H & & 
 \end{array}$$

*Demostración.* La flecha punteada  $\bar{f}$  es necesariamente

$$gH \mapsto f(g).$$

Es una aplicación bien definida: si  $gH = g'H$  para algunos  $g, g' \in G$ , entonces  $g^{-1}g' \in H$ , luego  $g^{-1}g' \in \ker f$  y

$$f(g^{-1}g') = 1 \iff f(g) = f(g').$$

La aplicación  $\bar{f}$  es un homomorfismo de grupos, puesto que  $f$  lo es. ■

**7.4.8. Corolario (Funtorialidad del cociente).**

- 1) Sea  $f: G \rightarrow G'$  un homomorfismo de grupos. Sean  $H \subseteq G$  y  $H' \subseteq G'$  subgrupos normales. Supongamos que  $f(H) \subseteq H'$ . Entonces  $f$  induce un homomorfismo canónico  $\bar{f}: G/H \rightarrow G'/H'$  que conmuta con las proyecciones canónicas:

$$\begin{array}{ccc}
 H & \dashrightarrow & H' \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 G & \xrightarrow{f} & G' \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 G/H & \dashrightarrow \exists! \bar{f} & G'/H'
 \end{array}$$

- 2) La aplicación identidad  $\text{id}: G \rightarrow G$  induce la aplicación identidad  $\text{id}: G/H \rightarrow G/H$ :

$$\begin{array}{ccc}
 H & \xrightarrow{\text{id}} & H \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 G & \xrightarrow{\text{id}} & G \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 G/H & \xrightarrow{\overline{\text{id}}=\text{id}} & G/H
 \end{array}$$

3) Sean  $f: G \rightarrow G'$  y  $g: G' \rightarrow G''$  dos homomorfismos y sean  $H \subseteq G$ ,  $H' \subseteq G'$ ,  $H'' \subseteq G''$  subgrupos normales tales que  $f(H) \subseteq H'$  y  $g(H') \subseteq H''$ . Luego,  $\overline{g \circ f} = \overline{g} \circ \overline{f}$ :

$$\begin{array}{ccccc}
 H & \dashrightarrow & H' & \dashrightarrow & H'' \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 G & \xrightarrow{f} & G' & \xrightarrow{g} & G'' \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 G/H & \dashrightarrow \overline{f} & G'/H' & \dashrightarrow \overline{g} & G''/H'' \\
 & \searrow \overline{g \circ f} & & \nearrow \overline{g} \circ \overline{f} & \\
 & & & & 
 \end{array}$$

*Demostración.* En 1) la flecha  $\overline{f}$  existe y es única gracias a la propiedad universal de  $G/H$  aplicada a la composición  $G \xrightarrow{f} G' \rightarrow G'/H'$ . Los resultados de 2) y 3) siguen de la unicidad del homomorfismo inducido sobre los grupos cociente. ■

## 7.5 Grupos simples

Los grupos simples tienen importancia inestimable en la teoría de grupos, pero por falta de tiempo, voy a mencionar solamente algunos ejemplos de ellos.

**7.5.1. Definición.** Se dice que un grupo  $G$  es **simple** si los únicos subgrupos normales de  $G$  son  $\{1\}$  y el mismo  $G$ .

**7.5.2. Ejemplo.** Un grupo abeliano es simple si y solamente si es isomorfo al grupo cíclico  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  de orden primo  $p$ . ▲

**7.5.3. Ejemplo.** Los grupos  $SL_n(k)$  no son simples, puesto que estos tienen centro que consiste en las matrices escalares

$$\begin{pmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{pmatrix}, \quad a^n = 1.$$

Se puede pasar al grupo cociente

$$\mathrm{PSL}_n(k) := \mathrm{SL}_n(k) / Z(\mathrm{SL}_n(k))$$

llamado el **grupo lineal especial proyectivo**. Resulta que el grupo  $\mathrm{PSL}_n(k)$  es simple con dos excepciones:

1)  $n = 2$  y  $k = \mathbb{F}_2$ , donde

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_2) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2) \cong S_3$$

y  $S_3$  tiene un subgrupo normal  $A_3$ ,

2)  $n = 2$  y  $k = \mathbb{F}_3$ , donde

$$(7.3) \quad \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3) \cong A_4$$

y  $A_4$  tiene un subgrupo normal  $V$ .

Para las demostraciones, refiero a [Lan2002, §§XIII.8–9]. ▲

### Simplicidad de $A_n$

Junto con (7.3), se tiene otro “isomorfismo excepcional”

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5) \cong A_5,$$

y este grupo es simple. Esto también se puede ver directamente para  $A_5$ , pero por el momento voy a omitir la prueba, que no me parece muy instructiva.

**7.5.4. Lema.** *Para  $n \geq 5$  todos los 3-ciclos son conjugados en  $A_n$ . A saber, si  $(a b c)$  y  $(a' b' c')$  son dos 3-ciclos en  $A_n$ , entonces existe  $\sigma \in A_n$  tal que*

$$(a' b' c') = \sigma (a b c) \sigma^{-1}.$$

*Demostración.* A priori sabemos que  $(a b c)$  y  $(a' b' c')$  son conjugados en  $S_n$ : existe  $\sigma \in S_n$  tal que

$$(a' b' c') = \sigma (a b c) \sigma^{-1}.$$

Ahora si  $\mathrm{sgn} \sigma = +1$ , entonces  $\sigma \in A_n$  y no hay nada que probar. Si  $\mathrm{sgn} \sigma = -1$ , entonces gracias a nuestra hipótesis que  $n \geq 5$ , existen índices  $1 \leq i < j \leq n$  tales que  $i, j \notin \{a, b, c\}$ . Tenemos  $\sigma(i j) \in A_n$ , y luego

$$\begin{aligned} (\sigma(i j)) (a b c) (\sigma(i j))^{-1} &= \sigma(i j) (a b c) (i j) \sigma^{-1} = \sigma(i j) (i j) (a b c) \sigma^{-1} \\ &= \sigma(a b c) \sigma^{-1} = (a' b' c'), \end{aligned}$$

usando que  $(a b c)$  e  $(i j)$  conmutan, siendo ciclos disjuntos. ■

**7.5.5. Comentario.** En general, dos permutaciones con el mismo tipo de ciclo no son necesariamente conjugadas en  $A_n$ . Por ejemplo, los 5-ciclos  $(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$  y  $(1\ 2\ 3\ 5\ 4)$  no son conjugados en  $A_5$ .

**7.5.6. Corolario.** Sea  $H \subseteq A_n$  un subgrupo normal tal que  $H$  contiene un 3-ciclo. Entonces,  $H = A_n$ .

*Demostración.* Si  $H$  es normal, junto con todo elemento  $\sigma \in H$ , este debe contener todos sus conjugados  $\tau \sigma \tau^{-1}$  para  $\tau \in A_n$ . Entonces, la hipótesis implica que  $H$  contiene todos los 3-ciclos. Estos generan  $A_n$ . ■

**7.5.7. Teorema.** El grupo alternante  $A_n$  es simple para  $n \geq 5$ .

*Demostración ([Per1996]).* Ya aceptamos este resultado para  $n = 5$ . Sea  $n \geq 6$  y sea  $H$  un subgrupo normal en  $A_n$  tal que  $H \neq \{\text{id}\}$ . Vamos a ver que usando cierto truco, la simplicidad de  $A_n$  sigue de la simplicidad de  $A_5$ .

Sea  $\sigma \in H$  una permutación no trivial. Esto significa que  $b = \sigma(a) \neq a$  para algunos  $a, b \in \{1, \dots, n\}$ . Escojamos un elemento  $c \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $c \neq a, b, \sigma(b)$ . Consideremos la permutación

$$\tau = (a\ c\ b)\sigma(a\ c\ b)^{-1}\sigma^{-1} = (a\ c\ b)\sigma(a\ b\ c)\sigma^{-1}.$$

Por nuestra hipótesis que  $H$  es un subgrupo normal, se tiene  $(a\ c\ b)\sigma(a\ c\ b)^{-1} \in H$ , y por lo tanto  $\tau \in H$ . Ahora notamos que para

$$i \notin \{a, b, c, \sigma(b), \sigma(c)\}$$

se cumple  $\sigma^{-1}(i) \notin \{a, b, c\}$  y luego  $\tau(i) = i$ . Esto significa que  $\tau$  pertenece al subgrupo

$$H_0 := \{\sigma \in A_n \mid \sigma(i) = i \text{ para } i \notin \{a, b, c, \sigma(b), \sigma(c)\}\}.$$

Ya que  $\tau(b) = (a\ c\ b)\sigma(b) \neq b$ , la permutación  $\tau$  no es trivial.

Ya que  $H$  es normal en  $A_n$ , entonces  $H \cap H_0$  es un subgrupo normal no trivial en  $H_0$ . Pero  $H_0 \cong A_5$ , y este grupo es simple, así que se puede concluir que  $H \cap H_0 = H_0$ . En particular,  $(a\ b\ c) \in H$ , pero esto implica que  $H = A_n$ . ■

**7.5.8. Corolario.**  $Z(A_n) = \{\text{id}\}$  para  $n \geq 4$ .

*Demostración.* Para  $n = 4$  esto se puede verificar directamente. Para  $n \geq 5$ , es suficiente notar que  $Z(A_n)$  es un subgrupo normal y  $Z(A_n) \neq A_n$ , ya que  $A_n$  no es conmutativo. Luego,  $Z(A_n)$  es trivial. ■

**7.5.9. Corolario.** Para  $n \geq 5$  los únicos subgrupos normales de  $S_n$  son  $\{\text{id}\}$ ,  $A_n$  y  $S_n$ .

*Demostración.* Sea  $H \subseteq S_n$  un subgrupo normal. El grupo  $H \cap A_n$  es un subgrupo normal de  $A_n$  y por lo tanto es igual a  $A_n$  o  $\{\text{id}\}$ .

Si  $H \cap A_n = A_n$ , entonces  $H = A_n$ , o  $H$  contiene una permutación impar junto con todos los elementos de  $A_n$  y luego  $H = S_n$ .

Si  $H \cap A_n = \{\text{id}\}$ , entonces  $H$  no contiene permutaciones pares no triviales. Pero si  $\sigma$  y  $\tau$  son dos permutaciones impares, entonces  $\sigma\tau$  es par, así que la única posibilidad es

$H = \{\text{id}, \sigma\}$  para una permutación impar. Pero este subgrupo está muy lejos de ser normal: conjugando  $\sigma$  por los elementos de  $S_n$ , se puede obtener cualquier permutación del mismo tipo de ciclo y así salir de  $H$ . ■

**7.5.10. Comentario.** Para  $n = 4$  el subgrupo

$$V = \{\text{id}, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$$

es normal en  $S_4$ , dado que sus elementos no triviales son todas las permutaciones del tipo de ciclo  $(\bullet\ \bullet)(\bullet\ \bullet)$ .

## 7.6 Primer teorema de isomorfía

El lector debe de conocer el siguiente resultado de álgebra lineal: si  $f: U \rightarrow V$  es una aplicación lineal, entonces  $U/\ker f \cong \text{im } f$ . El mismo resultado se cumple para grupos cociente.

**7.6.1. Proposición (Primer teorema de isomorfía).** *Sea  $f: G \rightarrow H$  un homomorfismo de grupos. Entonces, existe un isomorfismo canónico*

$$\bar{f}: G/\ker f \xrightarrow{\cong} \text{im } f$$

que hace parte del diagrama conmutativo

$$(7.4) \quad \begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & H \\ \downarrow & & \uparrow \\ G/\ker f & \xrightarrow[\cong]{\exists! \bar{f}} & \text{im } f \end{array}$$

Descifremos el diagrama conmutativo: la flecha  $G \twoheadrightarrow G/\ker f$  es la proyección canónica  $g \mapsto g \cdot \ker f$ , y la flecha  $\text{im } f \hookrightarrow H$  es la inclusión de subgrupo, así que el isomorfismo  $\bar{f}$  necesariamente viene dado por

$$\bar{f}: g \cdot \ker f \mapsto f(g).$$

*Demostración.* La flecha  $\bar{f}$  es dada por la propiedad universal de  $G/\ker f$ :

$$\begin{array}{ccc} \ker f & & \\ \downarrow & \searrow =e & \\ G & \xrightarrow{f} & \text{im } f \\ \downarrow & \nearrow \exists! \bar{f} & \\ G/\ker f & & \end{array}$$

7.6. PRIMER TEOREMA DE ISOMORFÍA

Luego, el homomorfismo  $\bar{f}$  es evidentemente sobreyectivo. Para ver que es inyectivo, recordamos que

$$f(g_1) = f(g_2) \iff g_1^{-1}g_2 \in \ker f \iff g_1 \cdot \ker f = g_2 \cdot \ker f.$$

■

El diagrama (7.4) demuestra que todo homomorfismo de grupos puede ser escrito como una composición de un epimorfismo y un monomorfismo. Esto se conoce como la **factorización epi-mono** de  $f$ .

También hay segundo y tercer teorema de isomorfía, pero los vamos a ver en los ejercicios.

**7.6.2. Corolario.** Si  $G$  es un grupo finito, entonces para todo homomorfismo  $f: G \rightarrow H$  tenemos

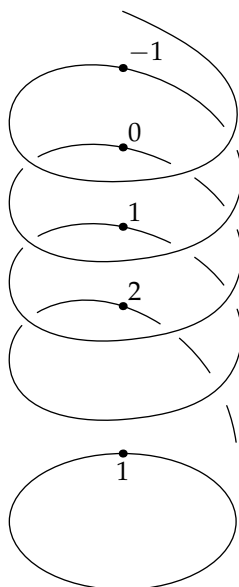
$$|G| = |\operatorname{im} f| \cdot |\ker f|.$$

El último resultado es un análogo de la fórmula  $\dim_k U = \dim_k \operatorname{im} f + \dim_k \ker f$  que tenemos para una aplicación lineal  $f: U \rightarrow V$ , donde  $U$  es un espacio de dimensión finita.

**7.6.3. Ejemplo.** Compilemos una tabla con ejemplos familiares de homomorfismos.

epimorfismo	núcleo	conclusión
1) $\mathbb{R}^\times \xrightarrow{x \mapsto  x } \mathbb{R}_{>0}$	$\{\pm 1\}$	$\mathbb{R}^\times / \{\pm 1\} \cong \mathbb{R}_{>0}$
2) $\mathbb{C}^\times \xrightarrow{z \mapsto z^n} \mathbb{C}^\times$	$\mu_n(\mathbb{C})$	$\mathbb{C}^\times / \mu_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^\times$
3) $\mathbb{R} \xrightarrow{x \mapsto e^{2\pi i x}} \mathbb{T}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{R} / \mathbb{Z} \cong \mathbb{T}$
4) $GL_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{\det} \mathbb{R}^\times$	$SL_n(\mathbb{R})$	$GL_n(\mathbb{R}) / SL_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^\times$
5) $S_n \xrightarrow{\operatorname{sgn}} \{\pm 1\}$	$A_n$	$S_n / A_n \cong \{\pm 1\}$
6) $GL_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{\det} \mathbb{R}^\times \xrightarrow{\operatorname{sgn}} \{\pm 1\}$	$GL_n(\mathbb{R})^+$	$GL_n(\mathbb{R}) / GL_n(\mathbb{R})^+ \cong \{\pm 1\}$
7) $\mathbb{C}^\times \xrightarrow{z \mapsto  z } \mathbb{R}_{>0}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{C}^\times / \mathbb{T} \cong \mathbb{R}_{>0}$
8) $\mathbb{C}^\times \xrightarrow{z \mapsto z/ z } \mathbb{T}$	$\mathbb{R}_{>0}$	$\mathbb{C}^\times / \mathbb{R}_{>0} \cong \mathbb{T}$

El ejemplo bastante curioso es 2): el cociente de  $\mathbb{C}^\times$  por un subgrupo propio  $\mu_n(\mathbb{C})$  es isomorfo al mismo grupo  $\mathbb{C}^\times$ . En 3) la aplicación  $x \mapsto e^{2\pi i x}$  puede ser visualizada como una hélice que se proyecta al círculo:



Los isomorfismos en 7) y 8) vienen de la representación canónica de un número complejo  $z = r e^{i\phi}$  donde  $r \in \mathbb{R}_{>0}$  y  $0 \leq \phi < 2\pi$ . ▲

**7.6.4. Ejemplo.** Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} \mathbb{Q} &\rightarrow \mathbb{C}^\times, \\ m/n &\mapsto e^{2\pi i m/n}. \end{aligned}$$

Es un homomorfismo de grupos. Su imagen coincide con el subgrupo  $\mu_\infty(\mathbb{C})$  formado por todas las raíces de la unidad. El núcleo de este homomorfismo es  $\mathbb{Z}$ . Entonces, tenemos

$$\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \cong \mu_\infty(\mathbb{C});$$

el grupo multiplicativo de las raíces de la unidad corresponde nada más al grupo aditivo de los "números racionales módulo  $\mathbb{Z}$ ". Los elementos de  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  pueden ser representados por las fracciones de la forma  $a/b$  donde  $a < b$ . Por ejemplo,

$$[1/2] + [3/4] = [5/4] = [1/4]$$

y

$$-[3/4] = [1/4].$$

En particular, bajo el isomorfismo de arriba, el grupo  $\mu_n(\mathbb{C})$  de las raíces  $n$ -ésimas de la unidad corresponde al grupo cíclico

$$\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle = \left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n} \right\} \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

▲

## 7.7 Ejercicios

**Ejercicio 7.1.** Sea  $G$  un grupo y  $N$  su subgrupo normal. Sea  $K \subset G/N$  un subgrupo del grupo cociente. Demuestre que  $K = H/N$  donde  $H$  es un subgrupo de  $G$  que contiene a  $N$ .

Sugerencia: considere el homomorfismo canónico  $p: G \rightarrow G/N$  y  $p^{-1}(K) \subset G$ .

**Ejercicio 7.2.** Demuestre que si  $H \subset G$  es un subgrupo de índice  $|G : H| = 2$ , entonces  $H$  es normal.

**Ejercicio 7.3.** Demuestre que todo cociente de un grupo cíclico es cíclico.

**Ejercicio 7.4 (Segundo teorema de isomorfía).** Sea  $G$  un grupo, sea  $H \subset G$  un subgrupo y  $K \subset G$  un subgrupo normal.

1) Demuestre que  $HK := \{hk \mid h \in H, k \in K\}$  es un subgrupo de  $G$ .

2) Demuestre que  $K$  es un subgrupo normal de  $HK$ .

3) Demuestre que la aplicación

$$H \rightarrow HK/K, \quad h \mapsto hK$$

es un homomorfismo sobreyectivo de grupos y su núcleo es  $H \cap K$ .

4) Deduzca que  $H/(H \cap K) \cong HK/K$ .

**Ejercicio 7.5.** Para un cuerpo  $k$  sea  $G = GL_2(k)$ ,  $H = SL_2(k)$ ,  $K = k^\times \cdot I \subset GL_2(k)$ . Deduzca que

$$SL_2(k)/\{\pm I\} \cong GL_2(k)/k^\times.$$

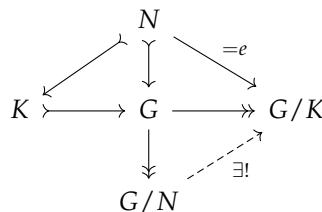
**Ejercicio 7.6 (Tercer teorema de isomorfía).** Sea  $G$  un grupo. Sea  $K$  un subgrupo normal de  $G$  y sea  $N$  un subgrupo de  $K$  tal que  $N$  es normal en  $G$ .

1) Demuestre que la aplicación

$$G/N \rightarrow G/K, \quad gN \mapsto gK$$

está bien definida y es un homomorfismo sobreyectivo y su núcleo es  $K/N \subset G/N$ .

Indicación: se puede usar la propiedad universal de  $G/N$ :



2) Deduzca que  $(G/N)/(K/N) \cong G/K$ .



**Ejercicio 7.7.** Sean  $m$  y  $n$  dos enteros positivos tales que  $n \mid m$ , así que  $m\mathbb{Z} \subset n\mathbb{Z}$ . Demuestre que

$$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) / (n\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

Se dice que un grupo abeliano  $A$  un elemento  $x \in A$  es **divisible** si para todo  $a \in A$  y todo entero positivo  $n = 1, 2, 3, \dots$  existe  $y \in A$  (no necesariamente único) tal que  $ny = x$ . Si todos los elementos de  $A$  son divisibles, se dice que  $A$  es un **grupo divisible**.

**Ejercicio 7.8.**

- 1) Demuestre que los grupos aditivos  $\mathbb{Q}$  y  $\mathbb{R}$  son divisibles.
- 2) Demuestre que un grupo abeliano finito no nulo nunca es divisible.

**Ejercicio 7.9.** Sea  $p$  un número primo. El  **$p$ -grupo de Prüfer** es el grupo de las raíces de la unidad de orden  $p^n$  para  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\mu_{p^\infty}(\mathbb{C}) := \bigcup_{n \geq 0} \mu_{p^n}(\mathbb{C}) = \{z \in \mathbb{C}^\times \mid z^{p^n} = 1 \text{ para algún } n = 0, 1, 2, \dots\}$$

Demuestre que existe un isomorfismo  $\mu_{p^\infty}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}[1/p]/\mathbb{Z}$  donde

$$\mathbb{Z}[1/p] := \{a/p^n \mid a \in \mathbb{Z}, n = 0, 1, 2, \dots\}.$$

**Ejercicio 7.10.** Sea  $A$  un grupo abeliano. Demuestre que  $x \in A$  es divisible si y solamente es divisible por cualquier número primo  $p = 2, 3, 5, 7, 11, \dots$

**Ejercicio 7.11.** Usando el ejercicio anterior, demuestre que el grupo de Prüfer  $\mu_{p^\infty}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}[1/p]/\mathbb{Z}$  es divisible.

**Ejercicio 7.12.**

- 1) Demuestre que todos los elementos divisibles forman un subgrupo

$$A_{div} := \{a \in A \mid a \text{ es divisible}\}.$$

Este se llama el **subgrupo máximo divisible** de  $A$ .

- 2) Sea  $f: A \rightarrow B$  un homomorfismo de grupos. Demuestre que si  $a \in A$  es divisible, entonces  $f(a) \in B$  es también divisible. En particular,  $f$  se restringe a un homomorfismo  $A_{div} \rightarrow B_{div}$ .

$$\begin{array}{ccc} A_{div} & \xrightarrow{\quad} & B_{div} \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{\quad f \quad} & B \end{array}$$

- 3) Demuestre que todo grupo cociente de un grupo divisible es también divisible. En particular,  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  y  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  son divisibles.

**Ejercicio 7.13.** Demuestre que no hay homomorfismos no triviales  $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}$  y  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ .



# Capítulo 8

## Conmutadores y abelianización

En este breve capítulo vamos a estudiar la relación entre los grupos abelianos y no abelianos. A cada grupo  $G$  se puede asociar de modo canónico un grupo abeliano  $G^{ab}$ , llamado la **abelianización** de  $G$ , que es el máximo cociente abeliano de  $G$ .

### 8.1 El subgrupo conmutador $[G, G]$

**8.1.1. Definición.** Sea  $G$  un grupo. Para dos elementos  $g, h \in G$  el **conmutador** es el elemento

$$[g, h] := ghg^{-1}h^{-1}.$$

Note que  $g$  y  $h$  conmutan ( $gh = hg$ ) si y solamente si  $[g, h] = 1$ .

Los conmutadores no siempre forman un subgrupo de  $G$ . A saber, para un conmutador tenemos obviamente

$$[g, h]^{-1} = (ghg^{-1}h^{-1})^{-1} = hgh^{-1}g^{-1} = [h, g],$$

pero el producto de dos conmutadores no tiene por qué ser un conmutador. Sin embargo, se puede considerar el subgrupo *generado* por los conmutadores.

**8.1.2. Definición.** Para un grupo  $G$  el **subgrupo conmutador**  $[G, G]$  (también conocido como el **subgrupo derivado**) es el subgrupo generado por todos los conmutadores:

$$[G, G] := \langle [g, h] \mid g, h \in G \rangle.$$

Obviamente, un grupo  $G$  es abeliano si y solamente si todos los conmutadores son iguales a 1, si y solamente si  $[G, G] = 1$ . Así que todo esto es de interés para grupos no abelianos.

**8.1.3. Proposición.**  $[G, G]$  es un subgrupo normal en  $G$ .

*Demostración.*  $h \in [G, G]$  y  $g \in G$  tenemos

$$ghg^{-1} = ghg^{-1}h^{-1}h = [g, h]h \in [G, G].$$

■

## 8.2. ALGUNOS CÁLCULOS DE $[G, G]$

La demostración de arriba es bastante lista: por la definición, los elementos de  $[G, G]$  son productos de conmutadores, pero no son necesariamente conmutadores. Sin embargo, en el argumento de arriba no necesitamos considerar un elemento genérico de  $[G, G]$ , que sería  $[g_1, h_1] \cdots [g_n, h_n]$ .

**8.1.4. Observación.** *Homomorfismos preservan conmutadores: si  $f: G \rightarrow H$  es un homomorfismo de grupos, entonces*

$$f([g_1, g_2]) = [f(g_1), f(g_2)].$$

**8.1.5. Corolario.** *Para todo homomorfismo  $f: G \rightarrow H$  tenemos  $f([G, G]) \subseteq [H, H]$ .*

$$\begin{array}{ccc} [G, G] & \xrightarrow{\quad} & G \\ \downarrow & & \downarrow f \\ [H, H] & \xrightarrow{\quad} & H \end{array}$$

**8.1.6. Comentario.** El centro  $Z(G)$  tiene una propiedad parecida a la propiedad del subgrupo conmutador:

- 1)  $Z(G) = G$  si y solamente si  $G$  es abeliano,
- 2)  $[G, G] = 1$  si y solamente si  $G$  es abeliano.

Sin embargo, el centro no se comporta bien respecto a homomorfismos: una aplicación  $f: G \rightarrow H$  no tiene por qué restringirse a  $Z(G) \rightarrow Z(H)$ . Por ejemplo, para el grupo simétrico  $S_n$  se tiene  $Z(S_n) = \{\text{id}\}$  para  $n \geq 3$ , pero  $S_n$  puede contener subgrupos abelianos  $G \subset S_n$  donde  $Z(G) = G \neq \{\text{id}\}$ . Un ejemplo específico nos da  $A_3 \subset S_3$ .

**8.1.7. Observación.** *Sea  $H \subseteq G$  un subgrupo normal tal que  $G/H$  es abeliano. Entonces,  $[G, G] \subseteq H$ .*

*Demostración.* Para todo conmutador  $[g_1, g_2] \in G$  se tiene necesariamente  $[g_1, g_2] \equiv 1 \pmod{H}$ , ya que  $G/H$  es abeliano. En otras palabras,  $[g_1, g_2] \in H$ . ■

Ya se puede notar que  $[G, G]$  es el *mínimo* subgrupo normal en  $G$  tal que  $G/[G, G]$  es un grupo abeliano. Volveremos a esto un poco más adelante, pero primero calculemos  $[G, G]$  para algunos grupos específicos.

## 8.2 Algunos cálculos de $[G, G]$

**8.2.1. Ejemplo.** Para el grupo diédrico

$$D_n = \{\text{id}, r, r^2, \dots, r^{n-1}, f, fr, fr^2, \dots, fr^{n-1}\}$$

Tenemos

$$[D_n, D_n] = \langle r^2 \rangle.$$

Dejo este cálculo al lector (véase el ejercicio 8.9 abajo). Note que si  $n$  es impar, este grupo consiste en todas las rotaciones; si  $n$  es par, este grupo contiene solo la mitad de las rotaciones. ▲

## Conmutadores en $S_n$ y $A_n$

**8.2.2. Teorema.** Para el grupo simétrico tenemos

$$[S_n, S_n] = A_n \quad \text{para } n \geq 3.$$

*Demostración.* Para cualesquiera  $\sigma, \tau \in S_n$  se cumple

$$\text{sgn}[\sigma, \tau] = \text{sgn}(\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}) = \text{sgn}(\sigma) \cdot \text{sgn}(\tau) \cdot \text{sgn}(\sigma) \cdot \text{sgn}(\tau) = +1,$$

entonces  $[S_n, S_n] \subseteq A_n$ . Ya que  $S_n$  no es un grupo abeliano para  $n \geq 3$ , sabemos que  $[S_n, S_n] \neq \{\text{id}\}$ . Sin embargo,  $A_n$  es el único subgrupo normal propio no trivial de  $S_n$ , así que  $[S_n, S_n] = A_n$ . ■

**8.2.3. Comentario.** Otro modo de ver que  $[S_n, S_n] = A_n$ , sin recurrir al resultado sobre los subgrupos normales de  $S_n$ , es de expresar cada 3-ciclo como un conmutador

$$[(i j), (i k)] = (i j) (i k) (i j) (i k) = (i j k)$$

para diferentes  $i, j, k$ . Los 3-ciclos generan todo  $A_n$ , así que  $[S_n, S_n] = A_n$ .

**8.2.4. Teorema.** Para  $n \geq 5$  tenemos

$$[A_n, A_n] = A_n,$$

mientras que para  $n = 4$

$$[A_4, A_4] = V.$$

*Demostración.* Hay varios modos de verlo. En general, hemos visto que  $A_n$  es simple para  $n \geq 5$ ; es decir, no tiene subgrupos normales propios. El conmutador  $[A_n, A_n]$  es un subgrupo normal y no es trivial, puesto que el grupo no es abeliano, así que  $[A_n, A_n] = A_n$ .

En el caso de  $A_4$  notamos que no es abeliano, y por lo tanto su conmutador no es trivial. Un buen candidato sería el único subgrupo normal propio

$$V := \{\text{id}, (1 2) (3 4)\}, \quad \{\text{id}, (1 3) (2 4)\}, \quad \{\text{id}, (1 4) (2 3)\}.$$

El cociente  $A_4/V \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  es abeliano, lo que implica que  $[A_4, A_4] \subseteq V$ . Ya que  $A_4$  no es abeliano, tenemos  $[A_4, A_4] \neq \{\text{id}\}$ . Los únicos subgrupos normales en  $A_4$  son  $\{\text{id}\}$ ,  $V$  y todo  $A_4$ . ■

**8.2.5. Comentario.** Otro modo de ver que  $[A_n, A_n] = A_n$  para  $n \geq 5$ , sin usar la simplicidad de  $A_n$ , es de calcular que

$$[(i j a), (i k b)] = (i j a) (i k b) (i a j) (i b k) = (i j k)$$

para diferentes  $i, j, k, a, b$ , y luego recordar que los 3-ciclos generan  $A_n$ .

En el caso de  $[A_4, A_4] = V$ , podemos calcular que

$$[(i j k), (i j \ell)] = (i j k) (i j \ell) (i k j) (i \ell j) = (i j) (k \ell)$$

para diferentes  $i, j, k, \ell$ .

**8.2.6. Comentario.** Para un grupo  $G$ , su **serie derivada** es la sucesión de subgrupos

$$G \supseteq G' \supseteq G'' \supseteq G''' \supseteq \dots$$

donde

$$G' := [G, G], G'' := [G', G'], G''' := [G'', G''], \dots$$

Si esta serie termina en algún punto por el grupo trivial, entonces se dice que  $G$  es un grupo **resoluble**. El grupo simétrico  $S_n$  es resoluble para  $n \leq 4$ . De hecho, tenemos

$$[S_3, S_3] = A_3, [A_3, A_3] = 1$$

y

$$[S_4, S_4] = A_4, [A_4, A_4] = V, [V, V] = 1.$$

El resultado de 8.2.4 dice que  $S_n$  no es resoluble para  $n \geq 5$ : en este caso

$$[S_n, S_n] = A_n, [A_n, A_n] = A_n.$$

De la irresolubilidad de  $S_n$  para  $n \geq 5$  Galois demostró la imposibilidad de expresar las soluciones de la ecuación general de grado  $n \geq 5$

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

aplicando únicamente las operaciones básicas y extracción de raíces a los coeficientes  $a_i$ . Este célebre resultado es conocido como el **teorema de Abel–Ruffini** ya que el matemático italiano PAOLO RUFFINI (1765–1822) obtuvo una demostración incompleta en 1799 y Abel proporcionó una prueba en 1823. Galois encontró su demostración de manera independiente, pero esta fue publicada póstumamente en 1846. La teoría desarrollada por Galois motivó muchos conceptos de la teoría de grupos, y por sí mismo, es una piedra angular de la teoría de números.

En este curso no vamos a hablar más de grupos resolubles, ni, lamentablemente, de la teoría de Galois.

### Conmutadores en $GL_n(k)$ y $SL_n(k)$

Ahora nos gustaría calcular el subgrupo conmutador para el grupo lineal general  $GL_n(k)$  y el grupo lineal especial  $SL_n(k)$  donde  $k$  es un cuerpo. Primero, necesitamos algunos resultados auxiliares sobre las matrices elementales. Para  $1 \leq i \neq j \leq n$  y  $\lambda \in k$  una **matriz elemental** viene dada por

$$E_{ij}(\lambda) := I + \lambda e_{ij}.$$

En otras palabras, es la matriz que tiene 1 en la diagonal,  $\lambda$  en la posición  $(i, j)$  afuera de la diagonal, y ceros en las demás entradas.

Dejo el siguiente cálculo al lector.

**8.2.7. Lema.** *Las matrices elementales satisfacen las siguientes propiedades.*

- 1) La multiplicación de una matriz  $A \in M_n(k)$  por la matriz elemental  $E_{ij}(\lambda)$  por la izquierda (donde  $i \neq j$ ) tiene el siguiente efecto: a la fila  $i$  se le suma la fila  $j$  multiplicada por  $\lambda$ :

$$\begin{aligned}
 E_{ij}(\lambda) \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1,n-1} & x_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{i,n-1} & x_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{j1} & x_{j2} & \cdots & x_{j,n-1} & x_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{n,n-1} & x_{nn} \end{pmatrix} \\
 = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1,n-1} & x_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{i1} + \lambda x_{j1} & x_{i2} + \lambda x_{j2} & \cdots & x_{i,n-1} + \lambda x_{j,n-1} & x_{in} + \lambda x_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{j1} & x_{j2} & \cdots & x_{j,n-1} & x_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{n,n-1} & x_{nn} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

- 2) Toda matriz elemental es invertible, y su inversa viene dada por  $E_{ij}(\lambda)^{-1} = E_{ij}(-\lambda)$ .  
 3) Si  $i, j, k$  son índices diferentes, entonces

$$[E_{ij}(\lambda), E_{jk}(\mu)] = E_{ik}(\lambda\mu).$$

**8.2.8. Lema.** El grupo  $SL_n(k)$  puede ser generado por las matrices elementales  $E_{ij}(\lambda)$  donde  $1 \leq i \neq j \leq n, \lambda \in k$ .

*Demostración.* Esto es esencialmente el método de eliminación gaussiana. Sea  $A = (x_{ij}) \in SL_n(k)$ . Primero, multiplicando  $A$  por matrices elementales, podemos lograr que  $x_{11} = 1$ . En efecto, si  $x_{i1} \neq 0$  para algún  $i = 2, 3, \dots, n$ , entonces podemos sumar a la primera fila la  $i$ -ésima fila multiplicada por el coeficiente  $\lambda$  apropiado. Si  $x_{i1} = 0$  para todo  $i = 2, 3, \dots, n$ , entonces tenemos  $x_{11} \neq 0$  y podemos sumar a la  $i$ -ésima fila para algún  $i = 2, 3, \dots, n$  la primera fila, lo que nos deja en la situación considerada.

Ahora cuando  $x_{11} = 1$ , podemos restar de las otras filas la primera fila multiplicada por los coeficientes  $\lambda$  apropiados y obtener  $x_{i1} = 0$  para todo  $i = 2, 3, \dots, n$ . Repitiendo este proceso para las filas  $i = 2, 3, \dots, n$ , podemos reducir  $A$  a una matriz de la forma

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & x'_{12} & x'_{13} & \cdots & x'_{1,n-1} & x'_{1n} \\ 0 & 1 & x'_{23} & \cdots & x'_{2,n-1} & x'_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & x'_{2,n-1} & x'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x'_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x'_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ya que  $\det E_{ij}(\lambda) = 1$ , nuestras operaciones no afectan el determinante de la matriz, así que  $\det A' = \det A = 1$  y necesariamente  $x'_{nn} = 1$ . Entonces  $A'$  es una matriz triangular superior con 1 en la diagonal.

Ahora, podemos restar de las primeras  $n - 1$  filas la última fila multiplicada por los coeficientes apropiados y obtener  $x'_{1n} = x'_{2n} = \dots = x'_{n-1,n} = 0$ . De la misma manera, restando la fila  $n - 1$ , podemos obtener  $x'_{1,n-1} = x'_{2,n-1} = \dots = x'_{n-2,n-1} = 0$ , etcétera. Esto nos dejará con la matriz identidad.

Podemos concluir que  $E \cdot A = I$ , donde  $E$  es un producto de matrices elementales que corresponden a las operaciones con las filas. Luego,  $A = E^{-1}$ . ■

**8.2.9. Teorema.** Si  $k$  es un cuerpo, entonces tenemos para  $n \geq 2$

$$[\mathrm{GL}_n(k), \mathrm{GL}_n(k)] = \mathrm{SL}_n(k), \quad [\mathrm{SL}_n(k), \mathrm{SL}_n(k)] = \mathrm{SL}_n(k)$$

con las siguientes excepciones:

1) si  $n = 2$  y  $k = \mathbb{F}_2$ , entonces

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2) \cong S_3$$

$$\text{y } [S_3, S_3] = A_3;$$

2) si  $n = 2$ ,  $k = \mathbb{F}_3$ , entonces

$$[\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3), \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)] \cong Q_8.$$

*Demostración.* Primero notamos que para cualesquiera  $A, B \in \mathrm{GL}_n(k)$  se tiene

$$\det[A, B] = \det(A B A^{-1} B^{-1}) = \det(A) \det(B) \det(A)^{-1} \det(B)^{-1} = 1,$$

así que  $[A, B] \in \mathrm{SL}_n(k)$ . Esto significa que  $[\mathrm{GL}_n(k), \mathrm{GL}_n(k)] \subseteq \mathrm{SL}_n(k)$ . Ya que el grupo  $\mathrm{SL}_n(k)$  está generado por las matrices elementales, para concluir que  $[\mathrm{GL}_n(k), \mathrm{GL}_n(k)] = [\mathrm{SL}_n(k), \mathrm{SL}_n(k)] = \mathrm{SL}_n(k)$ , sería suficiente expresar toda matriz elemental como un conmutador. Si  $n \geq 3$ , entonces para todo  $1 \leq i \neq k \leq n$  podemos escoger otro índice diferente  $j$  y luego

$$[E_{ij}(\lambda), E_{jk}(1)] = E_{ik}(\lambda).$$

Esto establece el teorema para cualquier  $n \geq 3$  y cualquier  $k$ .

Ahora si  $n = 2$  y si  $|k| > 3$ , entonces existe un elemento  $\mu \in k^\times$  tal que  $\mu^2 \neq 1^*$ . Luego, un cálculo directo nos dice que toda matriz elemental  $E_{12}(\lambda)$  es un conmutador de matrices en  $\mathrm{SL}_n(k)$ :

$$E_{12}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = [A, B], \quad \text{donde } A = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1/\mu \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & \lambda/(\mu^2 - 1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y de la misma manera,

$$E_{21}(\lambda) = E_{12}(\lambda)^t = [A, B]^t = [B^{-t}, A^{-t}].$$

\*En efecto, en un cuerpo la ecuación  $x^2 = 1$  tiene a lo sumo dos soluciones y son  $\pm 1$ . En el cuerpo  $\mathbb{F}_2$  es una sola solución  $1 = -1$ ; en el cuerpo  $\mathbb{F}_3$  tenemos  $\mathbb{F}_3^\times = \{1, 2\} = \{1, -1\}$ , y cuando  $|k| > 3$ , habrá algún  $x \neq \pm 1$  tal que  $x^2 = 1$ .



Si  $|k| = 3$ ; es decir, si  $k = \mathbb{F}_3$ , toda matriz elemental todavía puede ser expresada como un conmutador de matrices en  $GL_n(k)$ :

$$E_{12}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = [A, B], \quad \text{donde } A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(en  $\mathbb{F}_3$  tenemos  $2 \neq 0$ , así que el término  $\lambda/2$  tiene sentido). Notemos que  $B \notin SL_2(\mathbb{F}_3)$ , y de hecho para  $SL_2(\mathbb{F}_3)$  las matrices elementales salvo  $E_{12}(0) = E_{21}(0) = I$  no son conmutadores. Nos quedan entonces dos casos excepcionales.

1) Si  $n = 2$  y  $k = \mathbb{F}_2$ , entonces

$$GL_2(\mathbb{F}_2) = SL_2(\mathbb{F}_2) \cong S_3$$

y  $[S_3, S_3] = A_3$ . En términos de matrices,

$$[GL_2(\mathbb{F}_2), GL_2(\mathbb{F}_2)] = [SL_2(\mathbb{F}_2), SL_2(\mathbb{F}_2)] = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

2) Si  $n = 2$  y  $k = \mathbb{F}_3$ , entonces para calcular  $[SL_2(\mathbb{F}_3), SL_2(\mathbb{F}_3)]$ , notamos que

$$|SL_2(\mathbb{F}_3)| = \frac{1}{2} \cdot |GL_2(\mathbb{F}_3)| = \frac{1}{2} \cdot (3^2 - 1)(3^2 - 3) = 24.$$

En  $SL_2(\mathbb{F}_3)$  hay un subgrupo normal  $H$  generado por las matrices

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

que es isomorfo al grupo de cuaterniones  $Q_8$ .

$$IJ = K, \quad JK = I, \quad KI = J, \quad I^2 = J^2 = K^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$|SL_2(\mathbb{F}_3)/H| = |SL_2(\mathbb{F}_3)|/|H| = 24/8 = 3, \quad \text{así que } SL_2(\mathbb{F}_3)/H \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z},$$

el cual es un grupo abeliano; esto demuestra que

$$[SL_2(\mathbb{F}_3), SL_2(\mathbb{F}_3)] \subseteq H.$$

Además, los generadores de  $H$  pueden ser expresados como conmutadores:

$$I = \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right], \quad J = \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right], \quad K = \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right],$$

y por lo tanto

$$[SL_2(\mathbb{F}_3), SL_2(\mathbb{F}_3)] \cong Q_8.$$



**8.2.10. Comentario.** Hemos encontrado un isomorfismo excepcional  $GL_2(\mathbb{F}_2) = SL_2(\mathbb{F}_2) \cong S_3$ . Podemos preguntarnos si otros grupos  $GL_m(\mathbb{F}_q)$  pueden ser isomorfos a  $S_n$  para algunos  $m, q, n$ . La respuesta es negativa.

- 1) Primero, para  $q \neq 2$  el centro  $Z(GL_m(\mathbb{F}_q))$  consiste en las matrices escalares y no es trivial, mientras que  $Z(S_n) = \{\text{id}\}$ . Esto implica que  $GL_m(\mathbb{F}_q) \not\cong S_n$  para  $q \neq 2$ .
- 2) Si  $q = 2$ , podemos calcular los subgrupos conmutadores: si  $m \neq 2$ , entonces

$$[GL_m(\mathbb{F}_2), GL_m(\mathbb{F}_2)] = SL_m(\mathbb{F}_2) = GL_m(\mathbb{F}_2),$$

mientras que

$$[S_n, S_n] = A_n \neq S_n.$$

De hecho, en la parte 2) también se puede acudir a un argumento elemental aritmético y probar que  $|GL_m(\mathbb{F}_2)|$  no es un factorial para  $m \geq 3$  (por ejemplo, bastaría considerar la valuación 2-ádica y 3-ádica de  $|GL_m(\mathbb{F}_2)|$  y compararlas con las correspondientes valuaciones de  $n!$ ).

**8.2.11. Ejemplo.** He aquí un ejemplo curioso\* de cuándo un elemento del subgrupo conmutador no se expresa como un conmutador. Tenemos  $-I \in [SL_2(\mathbb{R}), SL_2(\mathbb{R})] = SL_2(\mathbb{R})$ . Supongamos que

$$-I = [A, B] = ABA^{-1}B^{-1}.$$

Para algunos  $A, B \in SL_2(\mathbb{R})$ . Entonces,

$$-B = ABA^{-1},$$

y luego

$$-\text{tr}(B) = \text{tr}(-B) = \text{tr}(ABA^{-1}) = \text{tr}(B),$$

así que  $\text{tr} B = 0$ . Puesto que  $\det B = 1$  y  $\text{tr} B = 0$ , tenemos

$$CBC^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =: B'$$

para alguna matriz  $C$ . Podemos reemplazar  $A$  por la matriz

$$A' := CAC^{-1}.$$

Ya que  $AB = -BA$ , tenemos también  $A'B' = -B'A'$ ; es decir,  $[A', B'] = -I$ . Escribamos

$$A' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$A'^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

---

\*<https://mathoverflow.net/questions/44269>

y se calcula que

$$[A', B'] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix}.$$

Pero esta matriz no puede ser igual a  $-I$ . ▲

**8.2.12. Comentario.** Si en lugar de un cuerpo  $k$  se considera un anillo conmutativo  $R$ , el cálculo de  $[GL_n(R), GL_n(R)]$  y  $[SL_n(R), SL_n(R)]$  pertenece al terreno de la **teoría K algebraica**, una rama de las matemáticas que nació en los años 50 del siglo pasado.

## 8.3 Abelianización

Ya que el subgrupo conmutador  $[G, G]$  es normal, podemos considerar el cociente correspondiente  $G/[G, G]$ .

**8.3.1. Definición.** El grupo  $G/[G, G]$  se llama la **abelianización** de  $G$  y se denota por  $G^{ab}$ .

Note que si  $G$  ya es abeliano, entonces  $[G, G] = 1$  y  $G^{ab} \cong G$ .

**8.3.2. Observación.** Para todo grupo  $G$ , su abelianización  $G^{ab} := G/[G, G]$  es un grupo abeliano.

*Demostración.* Los elementos  $G^{ab}$  son de la forma

$$\bar{g} := g \text{ mód } [G, G] \text{ para algún } g \in G.$$

Luego,  $\bar{g}, \bar{h}$  conmutan si y solamente si  $[\bar{g}, \bar{h}] = \bar{1}$ , pero tenemos siempre  $[\bar{g}, \bar{h}] = \overline{[g, h]}$  donde  $[g, h] \in [G, G]$ , así que  $[\bar{g}, \bar{h}] = \bar{1}$  para cualesquiera  $\bar{g}, \bar{h} \in G^{ab}$ . ■

**8.3.3. Proposición (Propiedad universal de la abelianización).** Sea  $f: G \rightarrow A$  un homomorfismo entre un grupo  $G$  y un grupo abeliano  $A$ . Entonces,  $f$  se factoriza de modo único por el epimorfismo canónico  $G \twoheadrightarrow G^{ab} := G/[G, G]$ :

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & A \\ p \downarrow & \exists! \nearrow \bar{f} & \\ G^{ab} & & \end{array}$$

$$f = \bar{f} \circ p.$$

*Demostración.* Como notamos en 8.1.5, tenemos  $f([G, G]) \subseteq [A, A]$ . Ya que  $A$  es abeliano, el grupo  $[A, A]$  es trivial y luego  $[G, G] \subset \ker f$ . La factorización canónica por  $G^{ab} := G/[G, G]$  existe gracias a la propiedad universal del cociente. ■

**8.3.4. Corolario (Funtorialidad de la abelianización).** Todo homomorfismo de grupos  $f: G \rightarrow H$  desciende de modo único a un homomorfismo de grupos  $f^{ab}: G^{ab} \rightarrow H^{ab}$ .

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & H \\ \downarrow & & \downarrow \\ G^{ab} & \xrightarrow[\exists! f^{ab}]{} & H^{ab} \end{array}$$

Además,

$$\text{id}_G^{ab} = \text{id}_{G^{ab}},$$

y para homomorfismos  $f: G \rightarrow H$  y  $g: H \rightarrow K$  tenemos

$$(g \circ f)^{ab} = g^{ab} \circ f^{ab}.$$

*Demostración.* La flecha punteada existe y es única gracias a la propiedad universal de  $G^{ab}$  aplicada a la composición  $G \xrightarrow{f} H \rightarrow H^{ab}$ .

Para el homomorfismo identidad  $\text{id}: G \rightarrow G$  en el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\text{id}} & G \\ \downarrow & & \downarrow \\ G^{ab} & \xrightarrow[\exists!]{} & G^{ab} \end{array}$$

la flecha punteada tiene que ser el homomorfismo identidad  $\text{id}: G^{ab} \rightarrow G^{ab}$  por la unicidad. De la misma manera, en el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} G & \xrightarrow{f} & H & \xrightarrow{g} & K \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ G^{ab} & \xrightarrow[\exists! f^{ab}]{} & H^{ab} & \xrightarrow[\exists! g^{ab}]{} & K^{ab} \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \exists!(g \circ f)^{ab} & & \end{array}$$

gracias a la unicidad, necesariamente  $(g \circ f)^{ab} = g^{ab} \circ f^{ab}$ . ■

### 8.3.5. Ejemplo.

1) Para el grupo diédrico tenemos

$$(D_n)^{ab} \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & \text{si } n \text{ es impar,} \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong V, & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

—haga el ejercicio 8.9.

2) Puesto que  $[S_n, S_n] = A_n$  para  $n \geq 3$  (véase 8.2.2), la abelianización del grupo simétrico  $S_n$  viene dada por

$$(S_n)^{ab} = \begin{cases} \{\text{id}\}, & \text{si } n = 0, 1, \\ S_n/A_n \cong \{\pm 1\}, & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

3) Puesto que  $[A_n, A_n] = A_n$  para  $n \geq 5$  y  $[A_4, A_4] = V$ , la abelianización del grupo alternante  $A_n$  es

$$(A_n)^{ab} \cong \begin{cases} \{\text{id}\}, & \text{si } n = 0, 1, 2, \\ A_3 \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, & \text{si } n = 3, \\ \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, & \text{si } n = 4, \\ \{\text{id}\}, & \text{si } n \geq 5. \end{cases}$$

4) Para el grupo lineal general  $GL_n(k)$  el resultado de 8.2.9 nos da

$$GL_n(k)^{ab} \cong k^\times,$$

salvo el caso especial de

$$GL_2(\mathbb{F}_2)^{ab} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

5) De la misma manera, para  $SL_n(k)$  tenemos

$$SL_n(k)^{ab} = \{I\},$$

salvo los casos excepcionales

$$SL_2(\mathbb{F}_2)^{ab} = GL_2(\mathbb{F}_2)^{ab} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad SL_2(\mathbb{F}_3)^{ab} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

▲

## 8.4 Ejercicios

**Ejercicio 8.1.** Para un grupo  $G$  y su subgrupo  $H$  denotemos por  $[G, H]$  el subgrupo generado por los conmutadores  $[g, h]$  donde  $g \in G$  y  $h \in H$ . Demuestre que  $[G, H] \subseteq H$  si y solamente si  $H$  es un subgrupo normal.

**Ejercicio 8.2.** En  $A_5$  tenemos  $[(1\ 2\ 4), (1\ 3\ 5)] = (1\ 2\ 3)$ . De modo similar, exprese las permutaciones  $(1\ 2)(3\ 4)$  y  $(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$  como conmutadores.

**Ejercicio 8.3.** Para las matrices elementales  $E_{ij}(\lambda) := I + \lambda e_{ij}$  demuestre que

$$[E_{ij}(\lambda), E_{jk}(\mu)] = E_{ik}(\lambda\mu)$$

donde  $i, j, k$  son índices diferentes.

**Ejercicio 8.4.** Encuentre todos los homomorfismos  $S_n \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ .

**Ejercicio 8.5.** Sea  $f: G \rightarrow H$  un epimorfismo de grupos. Demuestre que  $f^{ab}: G^{ab} \rightarrow H^{ab}$  es también un epimorfismo. Demuestre que si  $f: G \rightarrow H$  es un monomorfismo, entonces  $f^{ab}: G^{ab} \rightarrow H^{ab}$  no es necesariamente un monomorfismo (encuentre un contraejemplo específico).

**Ejercicio 8.6.** Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} \text{Hom}(G, H) &\rightarrow \text{Hom}(G^{ab}, H^{ab}), \\ f &\mapsto f^{ab}. \end{aligned}$$

Demuestre que no es ni inyectiva, ni sobreyectiva en general (encuentre contraejemplos).

Indicación: para ver que no es sobreyectiva, considere  $G = \{\pm 1\}$  y  $H = \mathbb{Q}_8$ .

**Ejercicio 8.7.** Sea  $k$  un cuerpo. Consideremos el grupo

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in k \right\}.$$

- 1) Calcule el subgrupo conmutador  $[G, G]$ .
- 2) Demuestre que la abelianización  $G^{ab}$  es isomorfa al grupo aditivo

$$k^2 = \{(a, c) \mid a, c \in k\}.$$

**Ejercicio 8.8.** Calcule la abelianización del grupo de cuaterniones  $\mathbb{Q}_8$ .

**Ejercicio 8.9.** Para el grupo diédrico

$$D_n = \{\text{id}, r, r^2, \dots, r^{n-1}, f, fr, fr^2, \dots, fr^{n-1}\}$$

- 1) calcule que  $[D_n, D_n] = \langle r^2 \rangle$ ;
- 2) calcule  $(D_n)^{ab}$ .

**Ejercicio 8.10.** El grupo diédrico  $D_n$  permuta los vértices del  $n$ -ágono regular y esto nos da un monomorfismo natural  $f: D_n \rightarrow S_n$ . Calcule el homomorfismo correspondiente  $f^{ab}: (D_n)^{ab} \rightarrow (S_n)^{ab}$ .

# Capítulo 9

## Acciones de grupos

Por sus obras los conoceréis.

---

Normalmente los grupos surgen junto con su acción sobre algún conjunto. En general, el concepto de acción es fundamental en las matemáticas.

### 9.1 Definiciones y primeros ejemplos

**9.1.1. Definición.** Sea  $G$  un grupo y  $X$  un conjunto. Se dice que  $G$  **actúa sobre  $X$  (por la izquierda)** si está definida una aplicación

$$\begin{aligned}\alpha: G \times X &\rightarrow X, \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x\end{aligned}$$

que satisface las siguientes propiedades.

A1) La identidad del grupo actúa como la identidad: para cualesquiera  $x \in X$  se cumple

$$1 \cdot x = x.$$

A2) La acción es compatible con la multiplicación en  $G$ : para cualesquiera  $h, g \in G$  y  $x \in X$  se cumple

$$(hg) \cdot x = h \cdot (g \cdot x).$$

También se dice que  $X$  es un  **$G$ -conjunto (izquierdo)**.

**9.1.2. Comentario.** También hay una noción de acción por la derecha: es una aplicación

$$\begin{aligned}X \times G &\rightarrow X, \\ (x, g) &\mapsto x \cdot g\end{aligned}$$

que satisface

9.1. DEFINICIONES Y PRIMEROS EJEMPLOS

---

A1)  $x \cdot 1 = x$  para todo  $x \in X$ ,

A2)  $x \cdot (gh) = (x \cdot g) \cdot h$  para cualesquiera  $x \in X, g, h \in G$ .

A toda acción por la derecha se puede asociar *de manera canónica* una acción por la izquierda definida por

$$g \cdot x := x \cdot g^{-1}.$$

Necesitamos tomar el inverso de  $g$  para que se cumpla el axioma A2): si la acción por la derecha cumple  $x \cdot (gh) = (x \cdot g) \cdot h$ , entonces

$$(gh) \cdot x := x \cdot (gh)^{-1} = x \cdot (h^{-1} g^{-1}) = (x \cdot h^{-1}) \cdot g^{-1} =: g \cdot (h \cdot x).$$

Vamos a trabajar exclusivamente con las acciones por la izquierda.

Dado una acción  $\alpha: G \times X \rightarrow X$ , fijando  $g \in G$  se obtiene la aplicación de la acción por  $g$

$$\begin{aligned} \alpha_g: X &\rightarrow X, \\ x &\mapsto g \cdot x. \end{aligned}$$

La condición A1) de arriba significa que  $\alpha_1 = \text{id}_X$  y la condición A2) nos dice que  $\alpha_{hg} = \alpha_h \circ \alpha_g$ :

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \alpha_g \nearrow & & \searrow \alpha_h \\ X & \xrightarrow{\alpha_{hg}} & X \end{array}$$

Notamos que de A1) y A2) se sigue que  $\alpha_g: X \rightarrow X$  es una biyección y su aplicación inversa es  $\alpha_{g^{-1}}: X \rightarrow X$ :

$$\alpha_{g^{-1}} \circ \alpha_g = \alpha_{g^{-1}g} = \text{id}_X, \quad \alpha_g \circ \alpha_{g^{-1}} = \alpha_{gg^{-1}} = \text{id}_X.$$

La identidad  $\alpha_{hg} = \alpha_h \circ \alpha_g$  significa que tenemos un homomorfismo de grupos

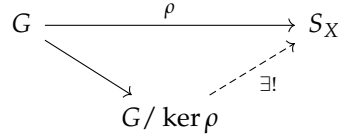
$$(9.1) \quad \begin{aligned} \rho: G &\rightarrow S_X, \\ g &\mapsto \alpha_g, \end{aligned}$$

donde  $S_X$  es el grupo simétrico que consiste en las biyecciones  $f: X \rightarrow X$  respecto a la composición  $\circ$ . Viceversa, cualquier homomorfismo de grupos (9.1) define una acción de  $G$  sobre  $X$  mediante  $g \cdot x := (\rho(g))(x)$ .

**9.1.3. Definición.** Se dice que la acción de  $G$  sobre  $X$  es **fiel** si diferentes elementos de  $G$  actúan de manera diferente; es decir, si el homomorfismo correspondiente  $G \rightarrow S_X$  es mono. En general,  $\ker(G \rightarrow S_X)$  se llama el **núcleo** de la acción.



**9.1.4. Observación.** Toda acción  $\rho: G \rightarrow S_X$  da lugar a una acción fiel  $G/\ker \rho \rightarrow S_X$ :



*Demostración.* Esto es el teorema de isomorfía. ■

**9.1.5. Ejemplo.** El ejemplo primordial: el grupo simétrico  $S_X$  actúa sobre  $X$  de manera evidente ( $f \cdot x = f(x)$ ). Esta acción es fiel. En particular, el grupo  $S_n$  actúa sobre el conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

De la misma manera,

- el grupo de isometrías del plano  $\mathbb{R}^2$  actúa sobre  $\mathbb{R}^2$ ,
- el grupo diédrico actúa sobre un  $n$ -ágono regular,
- etcétera.



**9.1.6. Ejemplo.** El grupo  $GL(V)$  actúa sobre un espacio vectorial  $V$ . Si  $G$  es cualquier grupo, entonces un homomorfismo

$$\rho: G \rightarrow GL(V)$$

da lugar a una acción de  $G$  sobre  $V$  **por aplicaciones lineales**. En este caso se dice que  $\rho$  es una **representación lineal** de  $G$  sobre  $V$ . El estudio de representaciones lineales ayuda descubrir muchas propiedades de  $G$ . Es una herramienta muy poderosa de la teoría de grupos.

De la misma manera, se dice que un homomorfismo

$$\rho: G \rightarrow S_X$$

(que corresponde a un  $G$ -conjunto  $X$ ) es una **representación por permutaciones** de  $G$  sobre  $X$ . ▲

**9.1.7. Ejemplo.** He aquí una variante sobre el tema de la acción de  $GL(V)$  sobre  $V$ . Sea  $R$  un anillo conmutativo y  $GL_n(R)$  el grupo de las matrices invertibles de  $n \times n$ . Consideremos los elementos de

$$R^n := \underbrace{R \times \cdots \times R}_n$$

como vectores columna; es decir, matrices de  $n \times 1$

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

## 9.1. DEFINICIONES Y PRIMEROS EJEMPLOS

Para  $A \in GL_n(\mathbb{R})$  el producto de matrices  $A \cdot v$  es también un vector columna. Esto define una acción de  $GL_n(\mathbb{R})$  sobre el espacio de vectores columna  $\mathbb{R}^n$  por la izquierda.

Ahora si trabajamos con vectores fila

$$v = (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n),$$

el producto  $v \cdot A$  es también un vector fila. El grupo  $GL_n(\mathbb{R})$  actúa sobre el espacio de vectores fila  $\mathbb{R}^n$  por la derecha. ▲

**9.1.8. Ejemplo.** Consideremos el **semiplano superior** que es el subconjunto de  $\mathbb{C}$  dado por

$$\mathcal{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}.$$

El grupo

$$SL_2(\mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\}$$

actúa sobre  $\mathcal{H}$  mediante las **transformaciones de Möbius**:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z := \frac{az + b}{cz + d}.$$

Esta fórmula tiene sentido, ya que  $z \in \mathcal{H}$  es un número complejo con la parte imaginaria estrictamente positiva, así que  $cz + d \neq 0$  si  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$ . Además, verificamos que  $\frac{az+b}{cz+d} \in \mathcal{H}$ :

$$\text{Im} \frac{az + b}{cz + d} = \text{Im} \frac{(az + b)(c\bar{z} + d)}{|cz + d|^2} = \text{Im} \frac{ac|z|^2 + adz + bc\bar{z} + bd}{|cz + d|^2} > 0,$$

puesto que  $ad > bc$ .

Comprobemos que se cumplen los axiomas A1) y A2). La matriz identidad nos da

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot z := \frac{1 \cdot z + 0}{0 \cdot z + 1} = z.$$

Para el producto de matrices se tiene

$$\left( \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) \cdot z = \begin{pmatrix} a'a + b'c & a'b + b'd \\ c'a + d'c & c'b + d'd \end{pmatrix} \cdot z = \frac{(a'a + b'c)z + a'b + b'd}{(c'a + d'c)z + c'b + d'd}$$

y

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z \right) = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \cdot \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a' \frac{az + b}{cz + d} + b'}{c' \frac{az + b}{cz + d} + d'} = \frac{a'(az + b) + b'(cz + d)}{c'(az + b) + d'(cz + d)},$$

y las últimas dos expresiones coinciden.

La acción de  $SL_2(\mathbb{R})$  no es fiel: las matrices

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$$

actúan de la misma manera. Dejo al lector como un pequeño ejercicio calcular que el núcleo de la acción es precisamente

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R}) \mid \frac{az+b}{cz+d} = z \text{ para todo } z \in \mathcal{H} \right\} = Z(SL_2(\mathbb{R})) = \{\pm I\}$$

y por ende hay una acción fiel del grupo cociente

$$PSL_2(\mathbb{R}) := SL_2(\mathbb{R}) / Z(SL_2(\mathbb{R})) = SL_2(\mathbb{R}) / \{\pm I\}$$

sobre el semiplano superior.

La acción de  $SL_2(\mathbb{R})$  sobre  $\mathcal{H}$  se restringe a una acción de

$$SL_2(\mathbb{Z}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}.$$

Hemos visto que el grupo  $SL_2(\mathbb{Z})$  puede ser generado por dos matrices

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces, todas las acciones de  $SL_2(\mathbb{Z})$  sobre  $\mathcal{H}$  pueden ser escritas como composiciones de las aplicaciones

$$z \mapsto -1/z, \quad z \mapsto z + 1$$

y sus inversas.

Para obtener una acción fiel normalmente se considera la acción correspondiente del grupo

$$PSL_2(\mathbb{Z}) := SL_2(\mathbb{Z}) / \{\pm I\} = SL_2(\mathbb{Z}) / Z(SL_2(\mathbb{Z})).$$

▲

**9.1.9. Definición.** Para dos  $G$ -conjuntos  $X$  e  $Y$  se dice que una aplicación  $f: X \rightarrow Y$  es  **$G$ -equivariante** si esta conmuta con las acciones de  $G$ :

$$f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$$

para cualesquiera  $g \in G, x \in X$ .

En otras palabras, si las acciones de  $G$  vienen dadas por aplicaciones  $\alpha: G \times X \rightarrow X$  y  $\beta: G \times Y \rightarrow Y$ , entonces  $f: X \rightarrow Y$  es equivariante precisamente cuando el diagrama de abajo conmuta:

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \xrightarrow{\text{id} \times f} & G \times Y \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

**9.1.10. Definición.** Si  $X$  es un  $G$ -conjunto y  $X_0 \subseteq X$  es un subconjunto tal que para cualesquiera  $g \in G$  y  $x \in X_0$  se cumple  $g \cdot x \in X_0$ , se dice que  $X_0$  es un subconjunto  **$G$ -invariante**.

En este caso la acción de  $G$  sobre  $X$  se restringe a  $X_0$  y el último también puede ser visto como un  $G$ -conjunto. En la siguiente sección vamos a estudiar cómo un  $G$ -conjunto puede ser descompuesto en subconjuntos  $G$ -invariantes.

**9.1.11. Ejemplo.** Sea  $k$  un cuerpo. El **espacio afín**  $n$ -dimensional sobre  $k$  es nada más el conjunto

$$\mathbb{A}^n(k) := k^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in k\}.$$

El grupo  $k^\times$  actúa sobre  $\mathbb{A}^n(k)$  mediante la multiplicación: para  $\lambda \in k^\times$

$$\lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$

El subconjunto  $\mathbb{A}^n(k) \setminus \{(0, \dots, 0)\}$  es  $k^\times$ -equivariante: multiplicando un punto no nulo por un escalar no nulo, se obtiene un punto no nulo. ▲

## 9.2 Órbitas y estabilizadores

**9.2.1. Definición.** Sea  $X$  un  $G$ -conjunto. Para un punto  $x \in X$  su **órbita**  $O_x \subseteq X$  es el conjunto de sus imágenes respecto a las acciones de  $G$ :

$$O_x := \{g \cdot x \mid g \in G\}$$

(este es visiblemente un subconjunto  $G$ -equivariante).

Se dice que  $x$  es un **punto fijo** si  $g \cdot x = x$  para todo  $g \in G$ ; es decir, si

$$O_x = \{x\}.$$

El conjunto de los puntos fijos se denota por  $X^G$ .

El **estabilizador** de  $x$  viene dado por todos los elementos de  $G$  que dejan  $x$  fijo:

$$G_x := \{g \in G \mid g \cdot x = x\} \subseteq G.$$

**9.2.2. Observación.**  $G_x$  es un subgrupo de  $G$ .

*Demostración.* Primero,  $1 \cdot x = x$ . Luego, si  $g \cdot x = x$ , entonces actuando por  $g^{-1}$  se obtiene  $g^{-1} \cdot (g \cdot x) = g^{-1} \cdot x$ , donde en la parte izquierda está  $g^{-1} \cdot (g \cdot x) = 1 \cdot x = x$ . Por fin, si  $g \cdot x = x$  y  $h \cdot x = x$ , entonces  $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) = g \cdot x = x$ . ■

A veces se dice que  $G_x$  es el **grupo de isotropía** de  $x$ .

**9.2.3. Definición.** Se dice que una acción de  $G$  sobre  $X$  es **transitiva** si todos los puntos de  $X$  están en la misma órbita; es decir, si para cualesquiera  $x, y \in X$  existe  $g \in G$  tal que  $x = g \cdot y$ .

En este caso también se dice que  $X$  es un  $G$ -conjunto **homogéneo**.

**9.2.4. Ejemplo.** La acción del grupo simétrico  $S_X$  sobre  $X$  es transitiva. En particular, la acción de  $S_n$  sobre  $\{1, 2, \dots, n\}$  es transitiva. El estabilizador de  $1 \leq i \leq n$  es el subgrupo

$$\{\sigma \in S_n \mid \sigma(i) = i\} \cong S_{n-1}.$$

▲

**9.2.5. Ejemplo.** La acción de  $SL_2(\mathbb{R})$  sobre  $\mathcal{H}$  es transitiva. Para verlo, sería suficiente probar que para todo  $z \in \mathcal{H}$  existe  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$  tal que

$$z = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \sqrt{-1}.$$

Luego, la matriz  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  aplica  $z$  en  $\sqrt{-1}$ . Dados dos puntos  $z_1, z_2 \in \mathcal{H}$ , para enviar  $z_1$  en  $z_2$ , sería suficiente aplicar  $z_1$  a  $\sqrt{-1}$  y luego  $\sqrt{-1}$  en  $z_2$ .

Ahora para cualesquiera  $z = x + y\sqrt{-1}$  con  $y > 0$  tenemos

$$\begin{pmatrix} \sqrt{y} & x/\sqrt{y} \\ 0 & 1/\sqrt{y} \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R}), \quad \begin{pmatrix} \sqrt{y} & x/\sqrt{y} \\ 0 & 1/\sqrt{y} \end{pmatrix} \cdot \sqrt{-1} = \frac{\sqrt{y}\sqrt{-1} + x/\sqrt{y}}{1/\sqrt{y}} = x + y\sqrt{-1}.$$

▲

**9.2.6. Ejemplo.** Para la acción de  $k^\times$  sobre  $\mathbb{A}^n(k)$  el punto  $(0, \dots, 0)$  es fijo. Para un punto  $(x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$  su órbita consiste en todos los puntos no nulos que están en la recta que pasa por  $(0, \dots, 0)$  y  $(x_1, \dots, x_n)$ :

$$\{(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \mid \lambda \in k^\times\}.$$

▲

El siguiente resultado nos dice que todo  $G$ -conjunto se descompone en una unión disjunta de  $G$ -conjuntos homogéneos.

**9.2.7. Observación.** Sea  $X$  un  $G$ -conjunto. La relación

$$x \sim_G y \iff x = g \cdot y \text{ para algún } g \in G$$

es una relación de equivalencia sobre  $X$ . Las clases de equivalencia son las órbitas. En particular,  $X$  se descompone en la unión disjunta de las órbitas:

$$X = \bigsqcup_{[x] \in X/G} O_x,$$

donde  $X/G$  denota el conjunto de las órbitas.

*Demostración.*  $x \sim_G x$ , puesto que  $1 \cdot x$ . Ahora, si  $x \sim_G y$ , entonces  $x = g \cdot y$  y luego  $g^{-1} \cdot x = g^{-1} \cdot (g \cdot y) = y$ . Por fin, si  $x \sim_G y$  e  $y \sim_G z$ , tenemos  $x = g \cdot y$  e  $y = h \cdot z$ , así que  $x = g \cdot (h \cdot z) = (gh) \cdot z$ . ■

**9.2.8. Ejemplo.** El grupo multiplicativo  $k^\times$  actúa sobre  $\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}$ . El conjunto de las órbitas correspondiente

$$\mathbb{P}^n(k) := (\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\})/k^\times = \{[x_0 : x_1 : \dots : x_n] \mid x_i \in k, (x_0, x_1, \dots, x_n) \neq (0, 0, \dots, 0)\}$$

se llama el **espacio proyectivo** de dimensión  $n$  sobre  $k$ . Sus elementos son las rectas en el espacio  $\mathbb{A}^{n+1}$  que pasan por el origen. Para más información sobre el espacio proyectivo, el lector puede consultar Wikipedia y libros de texto de geometría.

Consideremos el caso  $n = 1$ . La definición nos dice que hay que considerar los elementos  $(x, y) \in \mathbb{A}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  módulo la relación de equivalencia

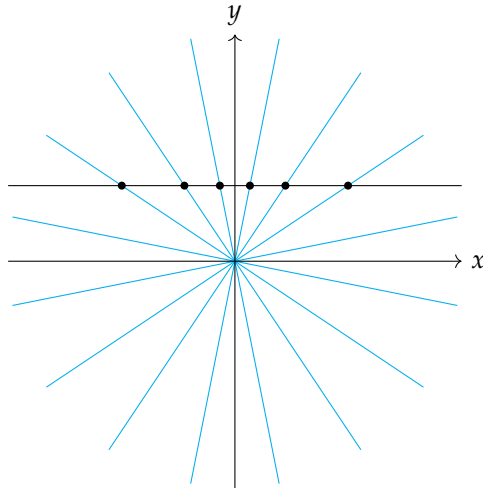
$$(x, y) \sim (\lambda x, \lambda y) \quad \text{para } \lambda \in k^\times.$$

Ahora si  $y \neq 0$ , tenemos  $(x, y) \sim (x/y, 1)$ . Si  $y = 0$ , entonces  $x \neq 0$  y  $(x, 0) \sim (1, 0)$ . Esto nos dice que

$$\mathbb{P}^1(k) = \{[x : 1] \mid x \in k\} \sqcup \{[1 : 0]\}.$$

El conjunto  $\{[x : 1] \mid x \in k\}$  está en una biyección natural con la recta afín  $\mathbb{A}^1(k)$ , y además hay un punto extra  $[1 : 0]$  que se llama el **punto al infinito** y normalmente se denota por  $\infty$ .

Geoméricamente, lo que está pasando es lo siguiente. La recta proyectiva es el conjunto de las rectas en el plano que pasan por el origen. Para parametrizar estas rectas, podemos tomar la proyección sobre una recta paralela a  $x$ , por ejemplo  $y = 1$ :



La recta que corresponde a  $[x : y]$  con  $y \neq 0$  interseca a la recta  $y = 1$  en el punto  $(x/y, 1)$ . Nos queda la recta  $y = 0$  que no tiene intersecciones con  $y = 1$ . Esta recta corresponde al punto al infinito. ▲

**9.2.9. Proposición.** Hay una biyección natural entre la órbita  $O_x$  y el conjunto de las clases laterales  $G/G_x$ .

*Demostración.* Definamos

$$\begin{aligned} O_x &\rightarrow G/G_x, \\ g \cdot x &\mapsto g G_x. \end{aligned}$$

Esta aplicación está bien definida y es biyectiva:

$$g \cdot x = h \cdot x \iff h^{-1}g \cdot x = x \iff h^{-1}g \in G_x \iff g G_x = h G_x.$$

■

Los estabilizadores de los elementos de la misma órbita están relacionados de la siguiente manera.

**9.2.10. Observación.** Sea  $X$  un  $G$ -conjunto. Para los estabilizadores se cumple

$$G_{g \cdot x} = g G_x g^{-1}.$$

*Demostración.* Tenemos

$$G_{g \cdot x} = \{h \in G \mid h \cdot g \cdot x = g \cdot x\} = \{h \in G \mid g^{-1} \cdot h \cdot g \cdot x = x\} = g G_x g^{-1}.$$

■

En general,  $G_x$  no es un subgrupo normal de  $G$ . Por ejemplo, para el grupo simétrico  $S_3$  que actúa sobre  $\{1, 2, 3\}$  el estabilizador de 3 es el subgrupo  $\{\text{id}, (1\ 2)\} \cong S_2$  que no es normal en  $S_3$ . Sin embargo, se puede hablar de las clases laterales  $G/G_x$ .

**9.2.11. Teorema (Ecuación de clase).** Sea  $X$  un  $G$ -conjunto finito. Sea  $X^G$  el subconjunto de puntos fijos y  $O_{x_1}, \dots, O_{x_n}$  las órbitas de la acción que contienen más de un elemento. Entonces,

$$|X| = |X^G| + \sum_{1 \leq i \leq n} |G : G_{x_i}|.$$

*Demostración.* Sigue del resultado anterior y la descomposición en la unión disjunta de clases de equivalencia

$$X = \bigsqcup_{x \in X^G} \{x\} \sqcup \bigsqcup_{1 \leq i \leq n} O_{x_i}.$$

■

### 9.3 Acción de $G$ sobre sí mismo por multiplicación

Algunos conceptos y resultados de la teoría de grupos pueden ser investigados en términos de acciones específicas de  $G$  sobre  $X = G$ .

Para  $g, x \in G$  la fórmula

$$g \cdot x := gx$$

define una acción de  $G$ : los axiomas A1) y A2) son evidentes. Se dice que  $G$  actúa sobre sí mismo por multiplicación (por la izquierda).

**9.3.1. Proposición.** *La acción de  $G$  sobre sí mismo por multiplicación es fiel.*

*Demostración.* Esta acción corresponde a un homomorfismo

$$\begin{aligned} L: G &\rightarrow S_G, \\ g &\mapsto (L_g: x \rightarrow gx). \end{aligned}$$

Tenemos  $L_g(1) = g \cdot 1 = g$ , así que  $L_g = \text{id}_G$  si y solamente si  $g = 1$ . ■

**9.3.2. Corolario (Teorema de Cayley).** *Para todo grupo  $G$  existe un monomorfismo  $G \hookrightarrow S_G$ .*

*Entonces, todo grupo  $G$  es isomorfo a un subgrupo de  $S_G$ . En particular, todo grupo finito es isomorfo a un subgrupo de  $S_n$  para algún  $n$ .*

**9.3.3. Comentario.** La teoría de grupos surgió del estudio de permutaciones de raíces de polinomios en los trabajos de Lagrange (1770) y Galois (1831). De hecho, la palabra “grupo” viene de la expresión “grupo de permutaciones”. La primera definición axiomática de grupo dio Cayley\*. El último resultado nos dice que todos los grupos pueden ser realizados como subgrupos de grupos de permutaciones.

**9.3.4. Ejemplo.** La construcción de arriba no es muy efectiva: el grupo simétrico  $S_G$  es mucho más grande que  $G$ . El ejemplo mínimo no trivial sería de

$$G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{[0], [1], [2]\}.$$

La aplicación  $x \mapsto [0] + x$  es la permutación identidad de los elementos de  $G$ . Luego,  $x \mapsto [1] + x$  es la permutación

$$\begin{pmatrix} [0] & [1] & [2] \\ [1] & [2] & [0] \end{pmatrix}$$

e  $x \mapsto [2] + x$  es la permutación

$$\begin{pmatrix} [0] & [1] & [2] \\ [2] & [0] & [1] \end{pmatrix}$$

La biyección  $\{[0], [1], [2]\} \leftrightarrow \{1, 2, 3\}$  nos da un isomorfismo entre  $S_{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}}$  y  $S_3$  respecto al cual la imagen de  $G$  en  $S_3$  puede ser identificada con

$$\left\{ \text{id}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3), \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 2) \right\}.$$

De hecho, es  $A_3$ , el único subgrupo de orden 3 en  $S_3$ . ▲

**9.3.5. Comentario.** En general, si  $H \subseteq G$  es un subgrupo, entonces  $G$  actúa sobre el conjunto de las clases laterales izquierdas  $G/H$  mediante multiplicación:

$$g_1 \cdot g_2H := g_1g_2H.$$

Esta acción es transitiva.

---

\*ARTHUR CAYLEY (1821–1895), uno de los fundadores de la escuela británica moderna de matemáticas puras.



## 9.4 Acción de $G$ sobre sí mismo por conjugación

**9.4.1. Definición.** Para  $g, x \in G$  la **conjugación** de  $x$  por  $g$  viene dada por

$${}^g x := g x g^{-1}.$$

Notamos que para la identidad se tiene  ${}^1 x = x$  y para cualesquiera  $g, h, x \in G$

$$(9.2) \quad h({}^g x) = h(g x g^{-1}) h^{-1} = (hg) x (hg)^{-1} = {}^{hg} x.$$

Entonces, lo que tenemos es una acción de  $G$  sobre sí mismo. La notación “ ${}^g x$ ” es una especie de “potencia”, pero con el exponente escrito a la izquierda, puesto que la acción es por la izquierda.

**9.4.2. Definición.** Para la acción de  $G$  sobre sí mismo por conjugación la órbita

$${}^G x := \{{}^g x = g x g^{-1} \mid g \in G\}$$

se llaman la **clase de conjugación** de  $x$ . El estabilizador

$$C_G(x) := \{g \in G \mid {}^g x := g x g^{-1} = x\} \subseteq G$$

se llama el **centralizador** de  $x$ .

**9.4.3. Ejemplo.** Como todo estabilizador,  $C_G(x)$  no es necesariamente un subgrupo normal. Por ejemplo, en  $G = S_3$  tenemos

$$C_{S_3}((1\ 2)) = \{\text{id}, (1\ 2)\}.$$

De todos modos, podemos considerar las clases laterales  $S_3/C_{S_3}((1\ 2))$ . Estas están representadas por  $(1\ 2), (1\ 3), (2\ 3)$  que son los elementos de la clase de conjugación de  $(1\ 2)$ . ▲

Notamos que  $x \in G$  es un punto fijo si y solamente si  $x$  pertenece al centro de  $G$ :

$${}^g x := g x g^{-1} = x \text{ para todo } g \in G \iff x \in Z(G).$$

**9.4.4. Observación.** Un subgrupo  $H \subseteq G$  es normal si y solamente si  $H$  es una unión de clases de conjugación en  $G$ .

*Demostración.*  $H \subseteq G$  es normal si y solamente si para todo elemento  $h \in H$  se tiene  ${}^G h \subseteq H$ . ■

**9.4.5. Ejemplo.** Prometí que íbamos a demostrar directamente que el grupo alternante  $A_5$  es simple. En efecto, las clases de conjugación son las siguientes.

clase:	${}^G \text{id}$	${}^G (1\ 2)(3\ 4)$	$(1\ 2\ 3)$	${}^G (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$	${}^G (1\ 2\ 3\ 5\ 4)$
tamaño:	1	15	20	12	12

#### 9.4. ACCIÓN DE $G$ SOBRE SÍ MISMO POR CONJUGACIÓN

---

Ya que todo subgrupo normal es una unión de clases de conjugación y contiene  $\text{id}$ , un cálculo tedioso nos dice que los posibles órdenes de subgrupos normales son

$$1, 13, 16, 21, 25, 28, 33, 36, 40, 45, 48, 60.$$

Ningún número de estos, salvo 1 y 60, divide a  $|A_5| = 60$ , y gracias al teorema de Lagrange podemos concluir que  $A_5$  es un grupo simple. ▲

**9.4.6. Teorema (Ecuación de clase).** Para un grupo finito  $G$  sean  $x_1, \dots, x_n$  los representantes de las clases de conjugación no triviales. Entonces

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{1 \leq i \leq n} |G : C_G(x_i)|.$$

*Demostración.* Es un caso particular de 9.2.11. ■

Notamos que para cualesquiera  $g, x, y \in G$  se tiene

$${}^g(xy) = g(xy)g^{-1} = (gxg^{-1})(gyg^{-1}) = {}^gx {}^gy,$$

así que las aplicaciones

$$I_g: x \mapsto {}^gx$$

no son simplemente biyecciones  $G \rightarrow G$  sino automorfismos. Tenemos entonces un homomorfismo de grupos

$$\begin{aligned} I: G &\rightarrow \text{Aut}(G) \subset S_G, \\ g &\mapsto (I_g: x \mapsto {}^gx). \end{aligned}$$

El núcleo de  $I$  coincide con el centro de  $G$ :

$$\ker I = \{g \in G \mid I_g = \text{id}_G\} = \{g \in G \mid {}^gx := gxg^{-1} = x \text{ para todo } x \in G\} = Z(G).$$

Entonces, la acción de  $G$  sobre sí mismo por conjugación es fiel si y solamente si  $Z(G) = \{1\}$ .

De la misma manera, se ve que  $x \in G$  es un punto fijo de la acción por conjugación si y solamente si  $x \in Z(G)$ .

**9.4.7. Digresión.** Los automorfismos de la forma

$$\begin{aligned} I_g: G &\rightarrow G, \\ x &\mapsto {}^gx \end{aligned}$$

se llaman los **automorfismos internos** de  $G$ . Estos forman un grupo (es la imagen del homomorfismo  $I$ ) que se denota por  $\text{Inn}(G)$ . El teorema de isomorfía nos dice que

$$G/Z(G) \cong \text{Inn}(G).$$

Por ejemplo,  $Z(S_n) = \{\text{id}\}$  para  $n \geq 3$ , entonces todos los automorfismos de  $S_n$  son internos.

Notamos que  $\text{Inn}(G)$  es un subgrupo normal en  $\text{Aut}(G)$ . De hecho, tenemos para cualquier automorfismo  $f: G \rightarrow G$

$$f \circ I_g \circ f^{-1}(x) = f(g f^{-1}(x) g^{-1}) = f(g) x f(g)^{-1} = I_{f(g)}(x).$$

Así que  $f \circ I_g \circ f^{-1} = I_{f(g)} \in \text{Inn}(G)$ . El grupo cociente

$$\text{Out}(G) := \text{Aut}(G) / \text{Inn}(G)$$

se llama el **grupo de automorfismos externos**.

Para terminar esta sección, notamos que la conjugación es una acción sobre el conjunto de subgrupos.

**9.4.8. Observación.** Sea  $G$  un grupo y  $H$  su subgrupo. Entonces para todo  $g \in H$  el conjunto

$$gHg^{-1} := \{ghg^{-1} \mid h \in H\}$$

es también un subgrupo de  $G$ .

*Demostración.* Por supuesto, tenemos  $1 = g \cdot 1 \cdot g^{-1}$ . Ahora para  $g h_1 g^{-1}, g h_2 g^{-1} \in gHg^{-1}$  se tiene

$$(g h_1 g^{-1})(g h_2 g^{-1}) = g(h_1 h_2)g^{-1} \in gHg^{-1}.$$

Por fin, para  $ghg^{-1} \in gHg^{-1}$  se tiene

$$(ghg^{-1})^{-1} = g h^{-1} g^{-1} \in gHg^{-1}.$$

■

Esto quiere decir que la acción de  $G$  sobre sí mismo por conjugación induce una acción sobre el conjunto de los subgrupos de  $G$ . Los puntos fijos de esta acción son precisamente los subgrupos normales.

## 9.5 Isomorfismos excepcionales: $\text{PGL}_2(\mathbb{F}_3)$ y $\text{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$

En el capítulo 7 durante la discusión de grupos simples mencioné los isomorfismos excepcionales  $\text{PSL}_2(\mathbb{F}_3) \cong A_4$  y  $\text{PSL}_2(\mathbb{F}_5) \cong A_5$ . Ahora tenemos las herramientas adecuadas para deducirlos. Esta sección es opcional.

**9.5.1. Ejemplo.** El grupo  $\text{GL}_2(k)$  actúa sobre el plano afín  $\mathbb{A}^2(k)$  mediante aplicaciones lineales. Toda aplicación lineal preserva cada recta que pasa por el origen, así que esta acción da lugar a una acción de  $\text{GL}_2(k)$  sobre la recta proyectiva  $\mathbb{P}^1(k)$ . Esta acción no es fiel: dos matrices actúan de la misma manera si y solamente si una es un múltiplo escalar de la otra. Esto quiere decir que el núcleo de la acción es el subgrupo de las matrices escalares  $Z(\text{GL}_2(k)) \cong k^\times$ . Luego, el cociente de  $\text{GL}_2(k)$  por este subgrupo:

$$\text{PGL}_2(k) := \text{GL}_2(k) / Z(\text{GL}_2(k))$$

actúa sobre  $\mathbb{P}^1(k)$  de manera fiel. Esto significa que existe un monomorfismo

$$\mathrm{PGL}_2(k) \hookrightarrow S_{\mathbb{P}^1(k)}.$$

Nos interesa el caso cuando  $k = \mathbb{F}_p$  es un cuerpo finito. El orden de  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_p)$  viene dado por

$$|\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_p)| = |\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)/\mathbb{F}_p^\times| = |\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)|/|\mathbb{F}_p^\times| = \frac{(p^2-1)(p^2-p)}{p-1} = p^3 - p.$$

Luego,

$$|S_{\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)}| = (|\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)|)! = (p+1)!$$

—la descomposición de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)$  en  $\mathbb{A}^1(\mathbb{F}_p)$  y  $\infty$  nos dice que

$$|\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)| = p + 1.$$

Ya que hay un monomorfismo  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_p) \hookrightarrow S_{\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)}$ , podemos comparar los órdenes de estos grupos para diferentes  $p$ . El factorial crece mucho más rápido que  $p^3 - p$ , así que solamente para valores pequeños de  $p$  se puede esperar algo interesante. Y en efecto, tenemos lo siguiente:

$p$	$ \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_p) $	$ S_{\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)} $
2	6	$3! = 6$
3	24	$4! = 24$
5	120	$6! = 720$
7	336	$8! = 40320$

Las primeras dos filas nos dicen que hay isomorfismos

$$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_2) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2) \cong S_3, \quad \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_3) \cong S_4.$$

Notamos que para  $p \neq 2$  se tiene

$$\begin{aligned} |\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_p)| &= |\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)/Z(\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p))| = |\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)/\{\pm I\}| = \frac{1}{2} |\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p-1} |\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)| = \frac{1}{2} |\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_p)|, \end{aligned}$$

así que  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_p)$  es un subgrupo de índice 2 en  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_p)$ . Siendo un subgrupo de índice 2, es normal. En  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_3) \cong S_4$  hay un subgrupo único de índice 2: es isomorfo al grupo alternante. Podemos concluir que

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3) \cong A_4.$$

▲

Ya que  $|\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)| = 120 = 5!$ , esto nos da esperanzas de encontrar un isomorfismo  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5) \cong S_5$ . Sin embargo, las consideraciones de arriba nos dicen nada más que  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$  puede ser realizado como un subgrupo de índice 6 en  $S_6$ , y hay que usar otro argumento.

**9.5.2. Ejemplo.** Los puntos de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_5)$  son

$$0 = [0 : 1], \quad 1 = [1 : 1], \quad 2 = [2 : 1], \quad 3 = [3 : 1], \quad 4 = [4 : 1], \quad \infty = [1 : 0].$$

En  $S_{\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_5)}$  hay 15 permutaciones de orden 2 sin puntos fijos (en otras palabras, permutaciones de tipo  $(\bullet \bullet)(\bullet \bullet)(\bullet \bullet)$ ):

$$\begin{aligned} (0 \ 1)(2 \ 3)(4 \ \infty), & \quad (0 \ 1)(2 \ 4)(3 \ \infty), & \quad (0 \ 1)(2 \ \infty)(3 \ 4), \\ (0 \ 2)(1 \ 3)(4 \ \infty), & \quad (0 \ 2)(1 \ 4)(3 \ \infty), & \quad (0 \ 2)(1 \ \infty)(3 \ 4), \\ (0 \ 3)(1 \ 2)(4 \ \infty), & \quad (0 \ 3)(1 \ 4)(2 \ \infty), & \quad (0 \ 3)(1 \ \infty)(2 \ 4), \\ (0 \ 4)(1 \ 2)(3 \ \infty), & \quad (0 \ 4)(1 \ 3)(2 \ \infty), & \quad (0 \ 4)(1 \ \infty)(2 \ 3), \\ (0 \ \infty)(1 \ 2)(3 \ 4), & \quad (0 \ \infty)(1 \ 3)(2 \ 4), & \quad (0 \ \infty)(1 \ 4)(2 \ 3). \end{aligned}$$

Solamente 10 de estas permutaciones vienen de la acción de  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} &\mapsto (0 \ 1)(2 \ 3)(4 \ \infty), & \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} &\mapsto (0 \ 1)(2 \ \infty)(3 \ 4), \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} &\mapsto (0 \ 2)(1 \ 3)(4 \ \infty), & \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} &\mapsto (0 \ 2)(1 \ 4)(3 \ \infty), \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} &\mapsto (0 \ 3)(1 \ 4)(2 \ \infty), & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} &\mapsto (0 \ 3)(1 \ \infty)(2 \ 4), \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} &\mapsto (0 \ 4)(1 \ 2)(3 \ \infty), & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} &\mapsto (0 \ 4)(1 \ \infty)(2 \ 3), \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} &\mapsto (0 \ \infty)(1 \ 2)(3 \ 4), & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} &\mapsto (0 \ \infty)(1 \ 3)(2 \ 4). \end{aligned}$$

Y otras 5 permutaciones no vienen de la acción de  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ :

$$(0 \ 1)(2 \ 4)(3 \ \infty), \quad (0 \ 2)(1 \ \infty)(3 \ 4), \quad (0 \ 3)(1 \ 2)(4 \ \infty), \quad (0 \ 4)(1 \ 3)(2 \ \infty), \quad (0 \ \infty)(1 \ 4)(2 \ 3).$$

El grupo  $S_{\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_5)}$ , y en particular su subgrupo  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ , actúa por conjugación sobre las 15 permutaciones de tipo  $(\bullet \bullet)(\bullet \bullet)(\bullet \bullet)$ . La acción de  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$  se restringe a una acción fiel sobre las 5 permutaciones de arriba. Esto nos da un monomorfismo  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5) \hookrightarrow S_5$ . Ya que  $|\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)| = |S_5|$ , podemos concluir que

$$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5) \cong S_5.$$

Además,  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5)$  es un subgrupo de índice 2 en  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ , así que

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5) \cong A_5.$$

▲

## 9.6 Ejercicios

**Ejercicio 9.1.** Consideremos la acción del grupo  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  sobre el semiplano superior  $\mathcal{H}$ . Demuestre que el estabilizador para el punto  $\sqrt{-1} \in \mathcal{H}$  es el grupo

$$\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \phi & -\operatorname{sen} \phi \\ \operatorname{sen} \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \mid 0 \leq \phi < 2\pi \right\} = \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}).$$

**Ejercicio 9.2.** Consideremos la acción del grupo  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  sobre el semiplano superior  $\mathcal{H}$ . Calcule el estabilizador para los puntos  $\sqrt{-1}$  y  $\omega := -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1}$ .

**Ejercicio 9.3.** Demuestre que el núcleo de la acción de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  sobre  $\mathcal{H}$  es el subgrupo  $Z(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})) = \{\pm I\}$ .

**Ejercicio 9.4.** Sea  $p$  un número primo y sea  $X$  un  $G$ -conjunto finito. Supongamos que para todo subgrupo  $H \subsetneq G$  su índice es divisible por  $p$ :

$$p \mid |G : H|.$$

Deduzca que el número de los puntos fijos es congruente módulo  $p$  al número de los elementos de  $X$ :

$$|X| \equiv |X^G| \pmod{p}.$$

*Indicación: considere la ecuación de clase.*

**Ejercicio 9.5.** Supongamos que  $G$  es un grupo finito de orden  $p^k$  donde  $p$  es primo. Demuestre que  $p \mid |Z(G)|$ , y en particular  $Z(G) \neq \{1\}$ .

**Ejercicio 9.6.** Demuestre que si  $G$  es un grupo finito de orden  $p^2$ , entonces  $G$  es abeliano.

**Ejercicio 9.7 (Teorema de Cayley).** Sea  $G$  un grupo finito y sea  $p$  un número primo tal que  $p \mid |G|$ . En este ejercicio vamos a probar que en  $G$  hay un elemento de orden  $p$ . Para esto consideremos el conjunto

$$X := \{(g_0, g_1, \dots, g_{p-1}) \mid g_i \in G, g_0 g_1 \cdots g_{p-1} = 1\}.$$

- 1) Demuestre que  $|X| = |G|^{p-1}$ .
- 2) Para  $[n]_p \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  sea  $[n]_p \cdot (g_0, g_1, \dots, g_{p-1}) := (g_{[0+n]}, g_{[1+n]}, \dots, g_{[p-1+n]})$ . Demuestre que esto define una acción de  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  sobre  $X$  y sus puntos fijos son  $(g, g, \dots, g)$  donde  $g^p = 1$ .
- 3) Demuestre que el número de elementos  $g \in G$  tales que  $g^p = 1$  es divisible por  $p$ . Concluya que existe  $g \neq 1$  tal que  $g^p = 1$ .

**Ejercicio 9.8.** Supongamos que un grupo finito  $G$  actúa sobre un conjunto finito  $X$ . Para un elemento  $g \in G$  denotemos por  $X^g$  el conjunto de todos los puntos fijos por  $g$ :

$$X^g := \{x \in X \mid g \cdot x = x\}.$$

Demuestre que

$$\sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{g \in G} |X^g|.$$

Deduzca la siguiente identidad combinatoria\*:

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$$

(en palabras: el número de órbitas es igual al número promedio de puntos fijos).

Indicación: use las biyecciones  $O_x \cong G/G_x$ .

**Ejercicio 9.9.** Verifique la descripción de las clases de conjugación en  $A_5$ .

**Ejercicio 9.10.** Hemos probado que en  $A_n$  para  $n \geq 5$  todos los 3-ciclos forman una clase de conjugación. Demuestre que en  $A_4$  no todos los 3-ciclos son conjugados entre sí.

**Ejercicio 9.11.** Encuentre las clases de conjugación en el grupo de cuaterniones  $Q_8$ .

**Ejercicio 9.12.** En este ejercicio encontraremos las clases de conjugación del grupo diédrico  $D_n$ .

- 1) Demuestre que cada rotación  $r^i$  está conjugada con  $r^{-i}$  y consigo misma.
- 2) Demuestre que la clase de conjugación de la reflexión  $fr^i$  viene dada por las reflexiones  $fr^{i-2j}$  para  $j \in \mathbb{Z}$ .
- 3) Termine la descripción de las clases de conjugación. (La respuesta depende de la paridad de  $n$ .)

**Ejercicio 9.13.** Hemos visto que  $\mathbb{P}^1(k) = \mathbb{A}^1(k) \sqcup \{\infty\}$ .

- 1) Demuestre que en general  $\mathbb{P}^n(k) = \mathbb{A}^n(k) \sqcup \mathbb{P}^{n-1}(k)$ .
- 2) Deduzca que  $\mathbb{P}^n(k) = \mathbb{A}^n(k) \sqcup \mathbb{A}^{n-1}(k) \sqcup \dots \sqcup \mathbb{A}^0(k)$ .
- 3) Calcule el número de puntos en el espacio proyectivo  $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_p)$  usando 2).
- 4) Calcule el mismo número a partir de la definición  $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_p) := (\mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{F}_p) \setminus \{0\})/\mathbb{F}_p^\times$ .

**Ejercicio 9.14.** Describa la permutación de  $\{0, 1, 2, 3, 4, \infty\}$  que corresponde a la acción de  $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$  sobre  $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_5)$ .

---

\*Este identidad se conoce como el **lema de Burnside** y es muy común en combinatoria y matemáticas recreativas.





# Capítulo 10

## Productos de grupos

En este capítulo vamos a investigar la construcción del producto directo y semidirecto de grupos. Este es un modo de construir un grupo  $G$  a partir de dos grupos  $H$  y  $K$ . Luego, en §10.3 vamos a definir la noción de extensión de un grupo por otro. Resulta que los productos directos y semidirectos son casos muy especiales de extensiones. En §10.4 vamos a probar que todo grupo abeliano finitamente generado es isomorfo a un producto de grupos cíclicos. Finalmente, la sección §10.5 presenta un ejemplo muy importante de grupos abelianos finitamente generados: el grupo de puntos racionales de una curva elíptica.

### 10.1 Productos directos

**10.1.1. Definición.** Para dos grupos  $H$  y  $K$  su **producto directo** (o simplemente **producto**) es el conjunto

$$H \times K := \{(h, k) \mid h \in H, k \in K\}$$

dotado de la operación

$$(h_1, k_1) \cdot (h_2, k_2) := (h_1 h_2, k_1 k_2).$$

Ya que  $H$  y  $K$  son grupos,  $H \times K$  es también un grupo. La identidad es  $(1_H, 1_K)$  y los elementos inversos son  $(h, k)^{-1} = (h^{-1}, k^{-1})$ .

De la misma manera, para una familia de grupos  $(H_i)_{i \in I}$ , se define el producto

$$\prod_{i \in I} H_i := \{(h_i)_{i \in I} \mid h_i \in H_i\}$$

respecto a la operación

$$(h_i)_{i \in I} \cdot (h'_i)_{i \in I} := (h_i \cdot h'_i)_{i \in I}.$$

Si  $A$  y  $B$  son grupos abelianos, está claro que el producto  $A \times B$  es también un grupo abeliano. En general, si  $(A_i)_{i \in I}$  es una familia de grupos abelianos, entonces su producto  $\prod_{i \in I} A_i$  es abeliano.

**10.1.2. Ejemplo.** Para el producto

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$$

la tabla de adición viene dada por

+	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
(0,0)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
(0,1)	(0,1)	(0,0)	(1,1)	(1,0)
(1,0)	(1,0)	(1,1)	(0,0)	(0,1)
(1,1)	(1,1)	(1,0)	(0,1)	(0,0)

Recordemos la tabla de multiplicación del grupo

$$V := \{\text{id}, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}.$$

o	id	(1 2)(3 4)	(1 3)(2 4)	(1 4)(2 3)
id	id	(1 2)(3 4)	(1 3)(2 4)	(1 4)(2 3)
(1 2)(3 4)	(1 2)(3 4)	id	(1 4)(2 3)	(1 3)(2 4)
(1 3)(2 4)	(1 3)(2 4)	(1 4)(2 3)	id	(1 2)(3 4)
(1 4)(2 3)	(1 4)(2 3)	(1 3)(2 4)	(1 2)(3 4)	id

Podemos convencernos a simple vista de que

$$V \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$



**10.1.3. Ejemplo.** ¿Cuándo el producto de dos grupos cíclicos finitos es también cíclico? Para un elemento  $(a, b) \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  tenemos

$$\begin{aligned} \text{ord}(a, b) &= \text{mín}\{k \mid k \cdot (a, b) = (k \cdot a, k \cdot b) = (0, 0)\} = \text{mín}\{k \mid k \mid \text{ord } a, k \mid \text{ord } b\} \\ &= \text{mcm}(\text{ord } a, \text{ord } b) = \frac{\text{ord } a \cdot \text{ord } b}{\text{mcd}(\text{ord } a, \text{ord } b)}. \end{aligned}$$

Luego, el grupo  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  es cíclico si y solamente si este posee un elemento de orden

$$|\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}| = mn.$$

Este elemento tiene que ser de la forma  $(a, b)$  donde  $a$  es un generador de  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  (es decir,  $\text{ord } a = m$ ) y  $b$  es un generador de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  (es decir,  $\text{ord } b = n$ ) y además necesitamos tener  $\text{mcd}(m, n) = 1$ . Entonces, el producto de dos grupos cíclicos es también cíclico si y solamente si los ordenes de grupos son coprimos:

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \iff \text{mcd}(m, n) = 1.$$

Por ejemplo,

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \not\cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}.$$



De hecho, las consideraciones de arriba pueden ser resumidas de manera más precisa.

**10.1.4. Proposición (Teorema chino del resto).** Sean  $m$  y  $n$  dos números naturales coprimos. Entonces existe un isomorfismo canónico

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} &\xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \\ [a]_{mn} &\mapsto ([a]_m, [a]_n).\end{aligned}$$

*Demostración.* Consideremos el homomorfismo canónico

$$\begin{aligned}f: \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \\ a &\mapsto ([a]_m, [a]_n)\end{aligned}$$

inducido por las proyecciones canónicas  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  y  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Tenemos

$$\ker f = m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} = \text{mcm}(m, n)\mathbb{Z}.$$

Ya que  $m$  y  $n$  son coprimos,  $\text{mcm}(m, n) = mn$ . Luego,  $f$  induce un monomorfismo

$$\bar{f}: \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \text{im } f \hookrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

Pero

$$|\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}| = |\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}| = mn,$$

así que  $\bar{f}$  tiene que ser un isomorfismo. ■

**10.1.5. Corolario.** La función  $\phi$  de Euler es multiplicativa en el sentido de que

$$\phi(mn) = \phi(m) \cdot \phi(n), \quad \text{si } \text{mcd}(m, n) = 1.$$

*Demostración.*  $\phi(mn)$ ,  $\phi(m)$ ,  $\phi(n)$  representan el número de generadores de  $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  respectivamente. Bajo el isomorfismo

$$\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

se ve que  $[a]_{mn}$  es un generador de  $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$  si y solamente si  $[a]_m$  es un generador de  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  y  $[a]_n$  es un generador de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . ■

**10.1.6. Proposición.** Si  $n$  es un número natural cuya factorización en primos es

$$n = p_1^{k_1} \cdots p_\ell^{k_\ell},$$

entonces

$$\phi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_\ell}\right).$$

*Demostración.* Gracias a la multiplicatividad, tenemos

$$\phi(n) = \phi(p_1^{k_1}) \cdots \phi(p_\ell^{k_\ell}).$$

Luego de esto, se puede calcular directamente

$$\phi(p_i^{k_i}) = p_i^{k_i} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

(véase el capítulo 4). ■

**10.1.7. Ejemplo.** Tenemos

$$\phi(198) = \phi(2 \cdot 3^2 \cdot 11) = \phi(2) \cdot \phi(3^2) \cdot \phi(11) = 1 \cdot 6 \cdot 10 = 60.$$

Otro ejemplo:  $2018 = 2 \cdot 1009$  donde 1009 es primo, y por lo tanto  $\phi(2018) = 1008$ . ▲

El producto directo está dotado de dos homomorfismos canónicos (proyecciones)

$$\begin{array}{ccc} H & \xleftarrow{p_H} & H \times K & \xrightarrow{p_K} & K \\ h & \longleftarrow & (h, k) & \longrightarrow & k \end{array}$$

**10.1.8. Observación (Propiedad universal del producto).** Sea  $G$  un grupo junto con dos homomorfismos  $\phi: G \rightarrow H$  y  $\psi: G \rightarrow K$ . Entonces, existe una única aplicación  $\begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix}: G \rightarrow H \times K$  tal que

$$p_H \circ \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} = \phi, \quad p_K \circ \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} = \psi.$$

(10.1)

$$\begin{array}{ccccc} & & G & & \\ & \swarrow \phi & & \searrow \psi & \\ H & & \exists! \downarrow \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} & & K \\ & \xleftarrow{p_K} & H \times K & \xrightarrow{p_H} & \end{array}$$

*Demostración.* A nivel de conjuntos, la única opción posible es

$$\begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix}: G \rightarrow H \times K, \\ g \mapsto (\phi(g), \psi(g)),$$

y es un homomorfismo de grupos, puesto que  $\phi$  y  $\psi$  lo son. ■

La propiedad universal del producto nos dice que los homomorfismos  $G \rightarrow H \times K$  corresponden a pares de homomorfismos  $G \rightarrow H$  y  $G \rightarrow K$ : existe una biyección *natural*

$$\begin{aligned} \text{Hom}(G, H \times K) &\xrightarrow{\cong} \text{Hom}(G, H) \times \text{Hom}(G, K), \\ \phi &\mapsto (p_H \circ \phi, p_K \circ \phi). \end{aligned}$$

La misma propiedad universal se cumple para productos infinitos. A saber, tenemos homomorfismos canónicos de proyección

$$\begin{aligned} p_i: \prod_{i \in I} H_i &\rightarrow H_i, \\ (h_i)_{i \in I} &\mapsto h_i \end{aligned}$$

Si  $G$  es un grupo dotado de homomorfismos  $\phi_i: G \rightarrow H_i$ , entonces existe un homomorfismo único  $\phi: G \rightarrow \prod_{i \in I} H_i$  tal que  $p_i \circ \phi = \phi_i$ :

$$\begin{array}{ccc}
 G & & \\
 \exists! \downarrow \phi & \searrow \phi_i & \\
 \prod_{i \in I} H_i & \xrightarrow{p_i} & H_i
 \end{array}$$

En otras palabras, hay una biyección natural

$$\text{Hom}(G, \prod_{i \in I} H_i) \cong \prod_{i \in I} \text{Hom}(G, H_i).$$

**10.1.9. Observación.** El producto de grupos es asociativo en el sentido de que para tres grupos  $H_1, H_2, H_3$  hay isomorfismos naturales

$$(H_1 \times H_2) \times H_3 \cong H_1 \times (H_2 \times H_3) \cong H_1 \times H_2 \times H_3.$$

*Demostración.* Sería instructivo probarlo usando únicamente las propiedades universales. Por ejemplo, el grupo

$$(H_1 \times H_2) \times H_3$$

está dotado de dos homomorfismos

$$H_1 \times H_2 \xleftarrow{p_{12}} (H_1 \times H_2) \times H_3 \xrightarrow{p_3} H_3$$

que satisfacen la propiedad universal correspondiente. Por otro lado, el grupo  $H_1 \times H_2$  está dotado de dos homomorfismos

$$H_1 \xleftarrow{p_1} H_1 \times H_2 \xrightarrow{p_2} H_2$$

que satisfacen la propiedad universal correspondiente. Ahora dado un grupo  $G$  y tres homomorfismos  $\phi_1: G \rightarrow H_1, \phi_2: G \rightarrow H_2, \phi_3: G \rightarrow H_3$ , existe un homomorfismo único  $\phi_{12} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}: G \rightarrow H_1 \times H_2$  que satisface

$$p_1 \circ \phi_{12} = \phi_1, \quad p_2 \circ \phi_{12} = \phi_2$$

y luego un homomorfismo único  $\phi = \begin{pmatrix} \phi_{12} \\ \phi_3 \end{pmatrix}: G \rightarrow (H_1 \times H_2) \times H_3$  que satisface

$$p_{12} \circ \phi = \phi_{12}, \quad p_3 \circ \phi = \phi_3.$$

En este caso

$$p_1 \circ p_{12} \circ \phi = \phi_1, \quad p_2 \circ p_{12} \circ \phi = \phi_2, \quad p_3 \circ \phi = \phi_3.$$

Entonces,  $(H_1 \times H_2) \times H_3$  junto con los homomorfismos

$$p_1 \circ p_{12}: (H_1 \times H_2) \times H_3 \rightarrow H_1, \quad p_2 \circ p_{12}: (H_1 \times H_2) \times H_3 \rightarrow H_2, \quad p_3: (H_1 \times H_2) \times H_3 \rightarrow H_3$$

satisface la propiedad universal de  $H_1 \times H_2 \times H_3$ . Por ende hay un isomorfismo

$$(H_1 \times H_2) \times H_3 \cong H_1 \times H_2 \times H_3.$$

■

**10.1.10. Observación.** Existe un isomorfismo canónico  $H \times K \cong K \times H$ .

*Demostración.* Este isomorfismo viene dado por  $(h, k) \mapsto (k, h)$ . También se puede notar que  $H \times K$  y  $K \times H$  satisfacen la misma propiedad universal (es simétrica en  $H$  y  $K$ ). ■

**10.1.11. Comentario.** Cuando se trata de grupos *abelianos*, normalmente se habla de la **suma directa** que se denota por

$$A \oplus B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Esta viene con las inclusiones

$$\begin{aligned} i_A: A &\rightarrow A \oplus B, \\ a &\mapsto (a, 0) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} i_B: B &\rightarrow A \oplus B, \\ b &\mapsto (0, b) \end{aligned}$$

que satisfacen la propiedad universal

$$\begin{array}{ccccc} & & C & & \\ & f \nearrow & \uparrow \exists! & \nwarrow g & \\ A & \xrightarrow{i_A} & A \oplus B & \xleftarrow{i_B} & B \end{array}$$

(donde  $C$  es también un grupo abeliano). Lo vamos a estudiar en el contexto más general para **módulos sobre anillos**.

**10.1.12. Observación.**  $H$  y  $K$  se identifican con los subgrupos normales

$$H \times \{1_K\} := \{(h, 1_K) \mid h \in H\} \quad \text{y} \quad \{1_H\} \times K := \{(1_H, k) \mid k \in K\}$$

de  $H \times K$ .

*Demostración.* Evidente de la definición del producto sobre  $H \times K$ . ■

**10.1.13. Proposición.** Supongamos que  $G$  es un grupo y  $H, K \subset G$  son dos subgrupos normales tales que  $H \cap K = \{1\}$  y todo elemento de  $G$  puede ser escrito como  $hk$  donde  $h \in H$  y  $k \in K$ . Entonces,

$$G \cong H \times K.$$

*Demostración.* Primero, notamos que  $hk = kh$ . En efecto, usando que  $H$  y  $K$  son normales,

$$hkh^{-1}k^{-1} = h \underbrace{(kh^{-1}k^{-1})}_{\in H} = \underbrace{(hkh^{-1})}_{\in K} k^{-1} \in H \cap K = \{1\}.$$

Esto significa que

$$(h_1k_1) \cdot (h_2k_2) = (h_1h_2) \cdot (k_1k_2)$$

para cualesquiera  $h_1, h_2 \in H, k_1, k_2 \in K$ . También podemos comprobar que todo elemento de  $G$  se expresa *de modo único* como  $hk$ . Si tenemos  $hk = h'k'$ , entonces

$$h'^{-1}h = k'k^{-1} \in H \cap K = \{1\},$$

y luego  $h = h'$  y  $k = k'$ . Todo esto significa que

$$\begin{aligned} H \times K &\rightarrow G, \\ (h, k) &\mapsto hk \end{aligned}$$

es un isomorfismo de grupos. ■

**10.1.14. Comentario.** Cuando  $G$  tiene dos subgrupos  $H$  y  $K$  que satisfacen las condiciones de 10.1.13, a veces se dice que  $G$  es el producto directo **interno**, mientras que la construcción de  $H \times K$  de 10.1.1 se llama el producto directo **externo** de  $H$  y  $K$ .

**10.1.15. Ejemplo.** Todo número complejo no nulo puede ser escrito de modo único como  $r e^{i\phi}$  donde  $r > 0$  es un número real y  $0 \leq \phi < 2\pi$ . De aquí sigue que

$$\mathbb{C}^\times \cong \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{T},$$

donde  $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  es el grupo del círculo. ▲

**10.1.16. Ejemplo.** Consideremos el grupo  $\text{GL}_n^+(\mathbb{R})$  de matrices reales invertibles de determinante positivo. Este contiene como sus subgrupos normales el grupo  $\text{SL}_n(\mathbb{R})$  y el grupo de matrices escalares

$$\mathbb{R}_{>0} = \{\lambda I \mid \lambda > 0\}.$$

Toda matriz  $A \in \text{GL}_n^+(\mathbb{R})$  puede ser escrita como  $\lambda A'$  donde  $A' \in \text{SL}_n(\mathbb{R})$  y  $\lambda > 0$  (tomemos  $\lambda = \sqrt[n]{\det A}$  y  $A' = \lambda^{-1} A$ ). Notamos que  $\mathbb{R}_{>0} \cap \text{SL}_n(\mathbb{R}) = \{I\}$ . Entonces,

$$\text{GL}_n^+(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}_{>0} \times \text{SL}_n(\mathbb{R}).$$
▲

## 10.2 Productos semidirectos

Hemos visto que un grupo  $G$  es un producto directo si y solamente si en  $G$  hay subgrupos normales  $H$  y  $K$  tales que  $H \cap K = \{1\}$  y  $G = HK$ . Podemos considerar una colección más débil de condiciones:

- 1) sean  $N$  y  $H$  dos subgrupos de  $G$  donde  $N$  es normal,
- 2) supongamos que  $N \cap H = \{1\}$ ,
- 3) supongamos que  $G = NH$ .

Entonces, usando el mismo argumento de 10.1.13, se deduce que todo elemento de  $G$  puede ser escrito de modo único como  $nh$  donde  $n \in N$  y  $h \in H$ . Véamos cómo se multiplican estos elementos. Tenemos

$$(n_1 h_1) \cdot (n_2 h_2) = n_1 (h_1 n_2 h_1^{-1}) \cdot (h_1 h_2),$$

donde  $h_1 n_2 h_1^{-1} \in N$ , puesto que  $N$  es normal. Esta fórmula puede ser escrita como

$$(10.2) \quad (n_1 h_1) \cdot (n_2 h_2) = (n_1 \cdot I_{h_1}(n_2)) \cdot (h_1 h_2),$$

donde  $I_{h_1}$  es el automorfismo de conjugación  $x \mapsto h x h^{-1}$  que se restringe a  $N$  gracias a su normalidad. La fórmula (10.2) se generaliza a la siguiente construcción.

**10.2.1. Definición.** Sean  $N$  y  $H$  dos grupos y sea

$$\begin{aligned} \phi: H &\rightarrow \text{Aut}(N), \\ \phi &\mapsto \phi_h \end{aligned}$$

un homomorfismo. Entonces, el **producto semidirecto**  $N \rtimes_{\phi} H$  es el conjunto

$$N \times H = \{(n, h) \mid n \in N, h \in H\}$$

dotado de la operación

$$(10.3) \quad (n_1, h_1) \cdot (n_2, h_2) := (n_1 \phi_{h_1}(n_2), h_1 h_2).$$

**10.2.2. Observación.** Respecto a la operación de arriba,  $N \rtimes_{\phi} H$  es un grupo.

*Demostración.* Primero, hay que ver que la operación es asociativa. Tenemos

$$\begin{aligned} \left( (n_1, h_1) \cdot (n_2, h_2) \right) \cdot (n_3, h_3) &= (n_1 \phi_{h_1}(n_2), h_1 h_2) \cdot (n_3, h_3) = (n_1 \phi_{h_1}(n_2) \phi_{h_1 h_2}(n_3), h_1 h_2 h_3) \\ &= (n_1 \phi_{h_1}(n_2) \phi_{h_1} \circ \phi_{h_2}(n_3), h_1 h_2 h_3) = (n_1 \phi_{h_1}(n_2 \phi_{h_2}(n_3)), h_1 h_2 h_3) \\ &= (n_1, h_1) \cdot (n_2 \phi_{h_2}(n_3), h_2 h_3) = (n_1, h_1) \cdot \left( (n_2, h_2) \cdot (n_3, h_3) \right). \end{aligned}$$

Aquí hemos usado las identidades

$$\phi_{hk} = \phi_h \circ \phi_k \quad \text{y} \quad \phi_h(mn) = \phi_h(m) \phi_h(n)$$

para cualesquiera  $h, k \in H$  y  $m, n \in N$ , que provienen del hecho de que  $h \mapsto \phi_h$  es un homomorfismo y cada  $\phi_h: N \rightarrow N$  es también un homomorfismo.

La identidad en  $N \rtimes_{\phi} H$  es  $(1_N, 1_H)$ :

$$(n, h) \cdot (1_N, 1_H) = (n \phi_h(1_N), h \cdot 1_H) = (n, h),$$

y de la misma manera

$$(1_N, 1_H) \cdot (n, h) = (1_N \cdot \phi_{1_H}(n), 1_H \cdot h) = (1_N \cdot \text{id}(n), h) = (n, h).$$



Los elementos inversos vienen dados por

$$(n, h)^{-1} = (\phi_{h^{-1}}(n^{-1}), h^{-1}).$$

En efecto,

$$\begin{aligned} (n, h) \cdot (\phi_{h^{-1}}(n^{-1}), h^{-1}) &= (n \phi_h(\phi_{h^{-1}}(n^{-1})), h h^{-1}) = (n \phi_{hh^{-1}}(n^{-1}), h h^{-1}) \\ &= (n n^{-1}, h h^{-1}) = (1_N, 1_H) \end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned} (\phi_{h^{-1}}(n^{-1}), h^{-1}) \cdot (n, h) &= (\phi_{h^{-1}}(n^{-1}) \phi_{h^{-1}}(n), h h^{-1}) = (\phi_{h^{-1}}(n^{-1} n), 1_H) \\ &= (\phi_{h^{-1}}(1_N), 1_H) = (1_N, 1_H). \end{aligned}$$

■

**10.2.3. Comentario.** Cuando el homomorfismo  $\phi: H \rightarrow \text{Aut}(N)$  es trivial (es decir,  $\phi_h = \text{id}_N$  para todo  $h \in H$ ), entonces  $N \rtimes_{\phi} H$  es el producto directo  $N \times H$ .

**10.2.4. Observación.**  $N$  y  $H$  se identifican con subgrupos  $N \times \{1_H\}$  y  $\{1_N\} \times H$  de  $N \rtimes_{\phi} H$ . El subgrupo  $N \times \{1_H\}$  es normal, y se tiene

$$N \rtimes_{\phi} H / N \times \{1_H\} \cong H.$$

*Demostración.* Todo está claro de la fórmula del producto (10.3). Para calcular el grupo cociente  $N \rtimes_{\phi} H / N \times \{1_H\}$ , podemos considerar el homomorfismo

$$\begin{aligned} N \rtimes_{\phi} H &\rightarrow H, \\ (n, h) &\mapsto h \end{aligned}$$

que es sobreyectivo y tiene  $N \times \{1_H\}$  como su núcleo. ■

**10.2.5. Proposición.** Sea  $G$  un grupo y sean  $N, H$  sus subgrupos. Supongamos que  $N$  es normal,  $N \cap H = \{1\}$  y  $G = NH$ . Entonces,  $G \cong N \rtimes_I H$ , donde  $I: H \rightarrow \text{Aut}(N)$  asocia a cada  $h \in H$  el automorfismo  $I_h: n \mapsto h n h^{-1}$ .

*Demostración.* De la discusión al inicio de esta sección sigue que

$$\begin{aligned} N \rtimes_I H &\rightarrow G, \\ (n, h) &\mapsto nh \end{aligned}$$

es un isomorfismo de grupos. ■

**10.2.6. Ejemplo.** En el grupo diédrico  $D_n$  todo elemento es de la forma  $r^i$  o bien  $fr^i = r^{-i}f$ . El subgrupo de rotaciones  $\langle r \rangle$  es normal, siendo un subgrupo de índice 2. Además  $\langle r \rangle \cap \langle f \rangle = \{\text{id}\}$ . En vista de lo anterior, se concluye que  $D_n \cong \langle r \rangle \rtimes \langle f \rangle$ , donde  $f$  actúa sobre  $\langle r \rangle$  por la conjugación  $r^i \mapsto frf^{-1} = r^{-i}$ . ▲

**10.2.7. Ejemplo.** Sea  $V$  un espacio vectorial. El **grupo afín**  $\text{Aff}(V)$  es el grupo de aplicaciones

$$\begin{aligned}\phi_{A,u}: V &\rightarrow V, \\ x &\mapsto Ax + u,\end{aligned}$$

donde  $A \in \text{GL}(V)$  y  $u \in V$ . Es un subgrupo del grupo de biyecciones  $V \rightarrow V$ : tenemos

$$\phi_{B,v} \circ \phi_{A,u}(x) = B(Ax + u) + v = BAx + Bu + v = \phi_{BA, Bu+v}(x).$$

Luego, la identidad es la aplicación  $\phi_{I,0}$  y los inversos vienen dados por

$$\phi_{A,u}^{-1} = \phi_{A^{-1}, -A^{-1}u}.$$

Notamos que  $\text{GL}(V)$  se identifica con el subgrupo  $H := \{\phi_{A,0} \mid A \in \text{GL}(V)\}$  y el grupo aditivo  $V$  se identifica con el subgrupo  $N := \{\phi_{I,u} \mid u \in V\}$ . El último es normal. Tenemos  $N \cap H = \{\phi_{I,0}\}$ , y todo elemento de  $\text{Aff}(V)$  puede ser escrito como una composición de  $N$  y  $H$ . Se sigue que

$$\text{Aff}(V) \cong V \rtimes \text{GL}(V).$$

Aquí  $\text{GL}(V)$  actúa sobre  $V$  de la manera habitual:

$$\phi_{A,0} \circ \phi_{I,u} \circ \phi_{A,0}^{-1} = \phi_{A,0} \circ \phi_{I,u} \circ \phi_{A^{-1},0} = \phi_{I,Au}.$$

▲

**10.2.8. Ejemplo.** Toda matriz en el grupo  $\text{GL}_n(k)$  puede ser escrita como

$$A \cdot \begin{pmatrix} x & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} =: A \cdot \text{diag}(x, 1, \dots, 1)$$

donde  $\det A = 1$  y  $x \in k^\times$ . Las matrices de determinante 1 forman un subgrupo normal  $\text{SL}_n(k)$ , mientras que las matrices  $\text{diag}(x, 1, \dots, 1)$  forman un subgrupo isomorfo a  $k^\times$  (que no es normal). La intersección de estos dos subgrupos es trivial. Se sigue que

$$\text{GL}_n(k) \cong \text{SL}_n(k) \rtimes k^\times.$$

Aquí  $x \in k^\times$  actúa sobre  $\text{SL}_n(k)$  mediante la conjugación por  $\text{diag}(x, 1, \dots, 1)$ .

▲

## 10.3 Sucesiones exactas cortas y extensiones

**10.3.1. Definición.** Una **sucesión exacta corta** de grupos es una sucesión de homomorfismos

$$1 \rightarrow H \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} K \rightarrow 1$$

donde

- 1)  $i$  es un monomorfismo,
- 2)  $p$  es un epimorfismo,
- 3)  $\text{im } i = \ker p$ .

En este caso se dice que  $G$  es una **extensión** de  $K$  por  $H$ .

**10.3.2. Comentario.** En una sucesión exacta corta “1” denota el grupo trivial  $\{1\}$ . Los homomorfismos triviales  $1 \rightarrow H$  y  $K \rightarrow 1$  significan que  $\ker(H \rightarrow G) = \text{im}(1 \rightarrow H) = \{1\}$  e  $\text{im}(G \rightarrow K) = \ker(K \rightarrow 1) = K$ . Cuando se trata de grupos abelianos aditivos, en lugar de “1” se escribe “0”.

**10.3.3. Ejemplo.** Cuando hay un monomorfismo  $i: H \hookrightarrow G$ , el grupo  $H$  puede ser identificado con su imagen  $i(H) \subseteq G$ . Además, la condición  $\text{im } i = \ker p$  significa que  $i(H)$  es un subgrupo normal, siendo un núcleo. El primer teorema de isomorfía implica que  $G/\ker p = G/i(H) \cong K$ . Entonces, esencialmente, toda sucesión exacta corta corresponde a la situación cuando  $H$  es un subgrupo normal en  $G$ , el homomorfismo  $i: H \hookrightarrow G$  es la inclusión y el homomorfismo  $p$  es la proyección canónica sobre el grupo cociente:

$$1 \rightarrow H \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} G/H \rightarrow 1$$

(Note que en este caso  $\text{im } i = \ker p$ .) ▲

**10.3.4. Ejemplo.** Para un producto semidirecto  $N \rtimes_{\phi} H$  tenemos una sucesión exacta corta

$$1 \rightarrow N \xrightarrow{n \mapsto (n,h)} N \rtimes_{\phi} H \xrightarrow{(n,h) \mapsto h} H \rightarrow 1$$

Un caso particular es cuando  $\phi$  es trivial y se trata del producto directo  $N \times H$ . ▲

**10.3.5. Ejemplo.** Tenemos la siguiente sucesión exacta corta:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{[1]_2 \mapsto [2]_4} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{[1]_4 \mapsto [1]_2} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

▲

**10.3.6. Ejemplo.** Tenemos una sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \xrightarrow{[1]_3 \mapsto [2]_6} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \xrightarrow{[1]_6 \mapsto [1]_2} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

y la sucesión exacta corta

$$1 \rightarrow A_3 \rightarrow S_3 \rightarrow \{\pm 1\} \rightarrow 1$$

Dado que  $A_3 \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  y  $\{\pm 1\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , ambas sucesiones exactas cortas representan extensiones de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  por  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ , pero son muy diferentes: la primera es abeliana y la segunda no lo es. ▲

**10.3.7. Lema.** Consideremos un diagrama conmutativo de homomorfismos de grupos

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & H & \xrightarrow{i} & G & \xrightarrow{p} & K & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow \text{id} & & \downarrow f & & \downarrow \text{id} & & \\ 1 & \longrightarrow & H & \xrightarrow{i'} & G' & \xrightarrow{p'} & K & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

donde las filas son sucesiones exactas cortas. Luego,  $f: G \rightarrow G'$  es un isomorfismo.

*Demostración* ("caza de diagramas"). Primero comprobemos que  $f$  es inyectivo. Si para algún  $g \in G$  se cumple  $f(g) = 1$ , entonces  $p(g) = p'(f(g)) = 1$ , y por lo tanto  $g \in \ker p = \text{im } i$ . Tenemos entonces  $g = i(h)$  para algún  $h \in H$ . Entonces,  $i'(h) = f(i(h)) = 1$ . La inyectividad de  $i'$  implica que  $h = 1$ . En fin,  $g = i(h) = 1$ .

Para ver que  $f$  es sobreyectiva, tomemos  $g' \in G'$ . Necesitamos encontrar un elemento  $g \in G$  que  $f(g) = g'$ . Consideremos  $p'(g') \in K$ . Ya que  $p$  es sobreyectivo, existe  $g_1 \in G$  tal que  $p(g_1) = p'(g')$ . Luego,

$$p'(g' \cdot f(g_1)^{-1}) = p'(g') \cdot p' \circ f(g_1)^{-1} = p'(g') \cdot p(g_1)^{-1} = p'(g') \cdot p'(g')^{-1} = 1.$$

Podemos concluir que  $g' \cdot f(g_1)^{-1} \in \ker p' = \text{im } i'$  y que existe  $h \in H$  tal que  $i'(h) = g' \cdot f(g_1)^{-1}$ . Tomemos  $g := i(h) \cdot g_1$ . Luego,

$$f(g) = f \circ i(h) \cdot f(g_1) = i'(h) \cdot f(g_1) = g' \cdot f(g_1)^{-1} \cdot f(g_1) = g'.$$

■

**10.3.8. Comentario.** El resultado de arriba tiene la siguiente generalización: en el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & H & \xrightarrow{i} & G & \xrightarrow{p} & K & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \\ 1 & \longrightarrow & H' & \xrightarrow{i'} & G' & \xrightarrow{p'} & K' & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

- 1) si  $f$  y  $h$  son monomorfismos, entonces  $g$  es también un monomorfismo;
- 2) si  $f$  y  $h$  son epimorfismos, entonces  $g$  es también un epimorfismo.

En particular, si  $f$  y  $h$  son isomorfismos,  $g$  es también un isomorfismo. Esto lo he probado solo para el caso de  $H' = H, K' = K, f = \text{id}_H, h = \text{id}_K$  para simplificar la notación. La versión general no nos va a servir.

**10.3.9. Proposición.** Consideremos una sucesión exacta corta de grupos

$$1 \rightarrow H \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} K \rightarrow 1$$

Las siguientes condiciones son equivalentes.

- 1) Existe un homomorfismo de grupos  $r: G \rightarrow H$  tal que  $r \circ i = \text{id}_H$ .

2) Existe un isomorfismo  $f: G \xrightarrow{\cong} H \times K$  que forma parte del diagrama conmutativo

$$(10.4) \quad \begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & H & \xrightarrow{i} & G & \xrightarrow{p} & K & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow \text{id} & & \cong \downarrow f & & \downarrow \text{id} & & \\ 1 & \longrightarrow & H & \xrightarrow{h \mapsto (h,1)} & H \times K & \xrightarrow{(h,k) \mapsto k} & K & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

*Demostración.* En la implicación 1)  $\Rightarrow$  2) el isomorfismo  $f$  viene dado por

$$f: G \rightarrow H \times K, \\ g \mapsto (r(g), p(g)).$$

Es un homomorfismo, puesto que  $r$  y  $p$  son homomorfismos. Es fácil comprobar que  $f: g \mapsto (r(g), p(g))$  hace conmutar el diagrama (10.4). En fin, el lema 10.3.7 implica que  $f$  es un isomorfismo.

Para probar 2)  $\Rightarrow$  1), notamos primero que la conmutatividad del segundo cuadrado significa que  $f(g) = (h, p(g))$  para algún  $h \in H$ . Pongamos  $r(g) = h$ . Dado que  $f$  es un homomorfismo,  $r$  es también un homomorfismo  $G \rightarrow H$ . Luego, la conmutatividad del primer cuadrado significa que  $r(i(h)) = h$  para todo  $h \in H$ . ■

**10.3.10. Ejemplo.** La sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \xrightarrow{i: [1]_3 \mapsto [2]_6} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \xrightarrow{[1]_6 \mapsto [1]_2} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

admite un homomorfismo  $r: \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  tal que  $r \circ i = \text{id}_{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}}$ . Esta viene dada por  $[1]_6 \mapsto [2]_3$ . Esto nos da un isomorfismo  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . ▲

**10.3.11. Ejemplo.** Se ve que la sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i: 1 \mapsto n} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

no admite un homomorfismo  $r: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  tal que  $r \circ i = \text{id}_{\mathbb{Z}}$ . Y de hecho, si tal aplicación existiera, tendríamos  $\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  lo que es falso (a diferencia de  $\mathbb{Z}$ , el grupo  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  tiene elementos no triviales de orden finito). ▲

**10.3.12. Proposición.** Consideremos una sucesión exacta corta de grupos

$$1 \rightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} H \rightarrow 1$$

Las siguientes condiciones son equivalentes.

- 1) Existe un homomorfismo de grupos  $s: H \rightarrow G$  tal que  $p \circ s = \text{id}_H$ .
- 2) Existe un homomorfismo  $\phi: H \rightarrow \text{Aut}(N)$  y un isomorfismo  $f: N \rtimes_{\phi} N \xrightarrow{\cong} G$  que hace parte del diagrama conmutativo

$$(10.5) \quad \begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{n \mapsto (n,1)} & N \rtimes_{\phi} N & \xrightarrow{(n,h) \mapsto h} & H & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow \text{id} & & \cong \downarrow f & & \downarrow \text{id} & & \\ 1 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{i} & G & \xrightarrow{p} & H & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

Cuando se cumplen estas condiciones, se dice que la sucesión exacta corta es *escindida* <sup>\*</sup>.

*Demostración.* Para ver la implicación  $1) \Rightarrow 2)$  notamos que  $H$  actúa sobre  $N$  por la conjugación en el siguiente sentido. Se puede identificar  $N$  con el subgrupo  $i(N) \subseteq G$ , que es normal, siendo el núcleo de  $p$ . Luego, dado que  $p \circ s = \text{id}_H$ , se ve que  $s: H \rightarrow G$  es un monomorfismo, y gracias a esto  $H$  se identifica con el subgrupo  $s(H) \subseteq G$ . Ya que  $i(N)$  es normal, conjugando sus elementos por los elementos de  $s(H)$ , se obtienen elementos de  $i(N)$ .

La acción de  $s(h) \in s(H)$  sobre  $i(N)$  viene dada por

$$(10.6) \quad i(n) \mapsto s(h) \cdot i(n) \cdot s(h)^{-1} =: i(\phi_h(n)),$$

donde  $\phi_h(n) \in N$ . Esto define un homomorfismo

$$\begin{aligned} \phi: H &\rightarrow \text{Aut}(N), \\ h &\mapsto \phi_h \end{aligned}$$

—el lector puede verificar todos los detalles usando la fórmula (10.6), pero salvo la identificación de  $N$  con  $i(N)$  y  $H$  con  $s(H)$ , se trata de la acción habitual por la conjugación, y hemos comprobado en el capítulo anterior que en este caso la acción es por automorfismos. Ahora usando  $\phi$ , podemos construir la suma semidirecta  $N \rtimes_{\phi} H$ , y luego considerar la aplicación

$$\begin{aligned} f: N \rtimes_{\phi} H &\rightarrow G, \\ (n, h) &\mapsto i(n) \cdot s(h). \end{aligned}$$

Esto es un homomorfismo: en  $G$  se cumple

$$\begin{aligned} i(n_1) \cdot s(h_1) \cdot i(n_2) \cdot s(h_2) &= i(n_1) \cdot s(h_1) \cdot i(n_2) \cdot s(h_1)^{-1} \cdot s(h_1) \cdot s(h_2) \\ &= i(n_1) \cdot i(\phi_{h_1}(n_2)) \cdot s(h_1 h_2) = i(n_1 \phi_{h_1}(n_2)) \cdot s(h_1 h_2), \end{aligned}$$

lo que corresponde a la multiplicación en  $N \rtimes_{\phi} H$ . Se ve que el homomorfismo  $f$  que acabamos de definir hace conmutar el diagrama (10.5), y el lema 10.3.7 nos dice que  $f$  es necesariamente un isomorfismo.

Para probar  $2) \Rightarrow 1)$ , definamos  $s(h) := f(1, h)$ . Esto es un homomorfismo  $s: H \rightarrow G$ , dado que  $f$  lo es. Luego, de la conmutatividad del segundo cuadrado se sigue que  $p \circ s(h) = p \circ f(1, h) = h$  para todo  $h \in H$ . ■

**10.3.13. Ejemplo.** Tenemos una sucesión exacta corta

$$1 \rightarrow \langle r \rangle \rightarrow D_n \xrightarrow{p} \langle f \rangle \rightarrow 1$$

Donde el subgrupo  $\langle f \rangle = \{\text{id}, f\}$  se identifica con el grupo cociente  $D_n / \langle r \rangle$ . La inclusión de subgrupo  $s: \langle f \rangle \rightarrow D_n$  satisface  $p \circ s = \text{id}$ . ▲

<sup>\*</sup>“split” en inglés.

**10.3.14. Ejemplo.** Tenemos una sucesión exacta corta

$$1 \rightarrow \mathrm{SL}_n(k) \rightarrow \mathrm{GL}_n(k) \xrightarrow{\det} k^\times \rightarrow 1$$

Luego, hay un homomorfismo

$$k^\times \rightarrow \mathrm{GL}_n(k),$$

$$x \mapsto \begin{pmatrix} x & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

y el determinante de la última matriz es igual a  $x$ . ▲

Notamos que cuando el grupo  $G$  que está en el medio es abeliano (y por ende  $N$  y  $H$ , siendo su subgrupo y grupo cociente), la fórmula (10.6) que define a  $\phi_h$  implica que  $\phi_h(n) = n$  para cualesquiera  $h \in H$  y  $n \in N$ . Esto nos lleva al siguiente resultado.

**10.3.15. Corolario.** Consideremos una sucesión exacta corta de grupos abelianos

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \rightarrow 0$$

Las siguientes condiciones son equivalentes.

- 1) Existe un homomorfismo de grupos  $r: B \rightarrow A$  tal que  $r \circ i = \mathrm{id}_A$ .
- 2) Existe un homomorfismo de grupos  $s: C \rightarrow B$  tal que  $p \circ s = \mathrm{id}_C$ .
- 3) Existe un isomorfismo  $f: B \xrightarrow{\cong} A \times C$  que forma parte del diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{p} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \mathrm{id} & & \cong \downarrow f & & \downarrow \mathrm{id} & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{a \mapsto (a,0)} & A \times C & \xrightarrow{(a,c) \mapsto c} & C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

**10.3.16. Digresión.** Se puede definir una equivalencia de extensiones de grupos

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad 0 \rightarrow A \xrightarrow{i'} B' \xrightarrow{p'} C \rightarrow 0$$

como un homomorfismo  $B \rightarrow B'$  que hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{p} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \mathrm{id} & & \downarrow \cong & & \downarrow \mathrm{id} & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i'} & B' & \xrightarrow{p'} & C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Como sabemos, en este caso  $B \rightarrow B'$  es automáticamente un isomorfismo, y en particular se ve que se trata de una relación de equivalencia sobre las extensiones de  $C$  por  $A$ .

Cuando se trata de grupos abelianos, las extensiones módulo esta equivalencia también forman un grupo abeliano que se denota por  $\text{Ext}(C, A)$  y se denomina el **grupo de extensiones** de  $C$  por  $A$ . El elemento nulo de este grupo corresponde a la clase de equivalencia de la sucesión exacta escindida

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{a \mapsto (a,0)} A \times C \xrightarrow{(a,c) \mapsto c} C \rightarrow 0$$

El cálculo de los grupos  $\text{Ext}(C, A)$  pertenece a la rama de las matemáticas conocida como **álgebra homológica**.

## 10.4 Grupos abelianos finitamente generados

Recordemos que un grupo abeliano (aditivo)  $A$  es **finitamente generado** si existe una colección finita  $x_1, \dots, x_k \in A$  de generadores:

$$A = \langle x_1, \dots, x_k \rangle = \left\{ \sum_{1 \leq i \leq k} n_i x_i \mid n_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

**10.4.1. Definición.** Digamos que  $x_1, \dots, x_k$  es una **base** de  $A$  si  $A = \langle x_1, \dots, x_k \rangle$  y

$$n_1 x_1 + \dots + n_k x_k = 0,$$

para algunos  $n_i \in \mathbb{Z}$ , entonces  $n_i x_i = 0$  para todo  $i$ .

**10.4.2. Comentario.** Esta condición es más débil que tener  $n_i = 0$  para todo  $i$ . La última sería la definición correcta de una base, pero para esta sección vamos a usar la definición provisional de arriba.

**10.4.3. Observación.** Si  $x_1, \dots, x_k$  es una base de  $A$ , entonces

$$A \cong \langle x_1 \rangle \times \dots \times \langle x_k \rangle.$$

*Demostración.* Consideremos el homomorfismo

$$\begin{aligned} \langle x_1 \rangle \times \dots \times \langle x_k \rangle &\rightarrow A, \\ (n_1 x_1, \dots, n_k x_k) &\mapsto \sum_{1 \leq i \leq k} n_i x_i. \end{aligned}$$

Es sobreyectivo, dado que  $x_1, \dots, x_k$  son generadores de  $A$ . Luego, es inyectivo por la definición de la base:

$$\sum_{1 \leq i \leq k} n_i x_i - \sum_{1 \leq i \leq k} n'_i x_i \iff \sum_{1 \leq i \leq k} (n_i - n'_i) x_i = 0 \iff n_i x_i = n'_i x_i \text{ para todo } i.$$

■

**10.4.4. Proposición.** Todo grupo abeliano finitamente generado posee una base y por lo tanto es isomorfo a un producto directo de grupos cíclicos.



Para la prueba, vamos a usar el siguiente resultado auxiliar.

**10.4.5. Lema.** *Supongamos que  $x_1, \dots, x_k$  son generadores de  $A$ . Entonces para cualesquiera  $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{N}$  tales que  $\text{mcd}(c_1, \dots, c_k) = 1$  existen generadores  $y_1, \dots, y_k$  de  $A$  tales que*

$$y_1 = c_1x_1 + \dots + c_kx_k.$$

*Demostración.* Usemos inducción sobre  $c := c_1 + \dots + c_k$ . La base de inducción es  $c = 1$ . En este caso, sin pérdida de generalidad,  $c_1 = 1$  y  $c_2 = \dots = c_k = 0$ , así que podemos tomar  $y_i = x_i$ .

Ahora si  $c > 1$ , entonces existen dos  $c_i$  que no son nulos. Sin pérdida de generalidad,  $c_1 \geq c_2 > 0$ . Notamos que

- 1)  $A = \langle x_1, x_1 + x_2, x_3, \dots, x_k \rangle$ ,
- 2)  $\text{mcd}(c_1 - c_2, c_2, c_3, \dots, c_k) = 1$ ,
- 3)  $(c_1 - c_2) + c_2 + c_3 + \dots + c_k < c$ .

Luego, por la hipótesis de inducción, existen generadores  $y_1, \dots, y_k$  tales que

$$y_1 = (c_1 - c_2)x_1 + c_2(x_1 + x_2) + c_3x_3 + \dots + c_kx_k = c_1x_1 + \dots + c_kx_k.$$

■

*Demostración de 10.4.4.* Usemos inducción sobre el número de generadores de  $A$ . La base es el caso cuando  $A$  puede ser generado por un elemento y es cíclico.

Supongamos que  $A$  puede ser generado por  $k > 1$  elementos. Escojamos generadores  $x_1, \dots, x_k$  donde  $\text{ord } x_1$  es el mínimo posible. Vamos a probar que  $A \cong \langle x_1 \rangle \times \langle x_2, \dots, x_k \rangle$ . Supongamos que

$$A \not\cong \langle x_1 \rangle \times \langle x_2, \dots, x_k \rangle.$$

Esto significa que  $\langle x_1 \rangle \cap \langle x_2, \dots, x_k \rangle \neq \{0\}$  y que existe una relación

$$n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_kx_k = 0$$

donde  $n_1x_1 \neq 0$ . Reemplazando  $x_i$  por  $-x_i$  si necesario, podemos suponer que  $n_i \geq 0$ . Además, sin pérdida de generalidad,  $n_1 < \text{ord } x_1$ . Consideremos

$$d := \text{mcd}(n_1, \dots, n_k) > 0, \quad c_i := n_i/d.$$

Luego,  $\text{mcd}(c_1, \dots, c_k) = 1$  y por el lema de arriba existen generadores  $y_1, \dots, y_k$  tales que  $y_1 = c_1x_1 + \dots + c_kx_k$ ; es decir,

$$dy_1 = n_1x_1 + \dots + n_kx_k = 0.$$

Esto significa que

$$\text{ord } y_1 \leq d \leq n_1 < \text{ord } x_1.$$

Esto contradice nuestra elección de  $x_1, \dots, x_k$ .

Entonces,

$$A \cong \langle x_1 \rangle \times \langle x_2, \dots, x_k \rangle.$$

Procediendo por inducción de esta manera, podemos descomponer  $\langle x_2, \dots, x_k \rangle$  en un producto directo de grupos cíclicos. ■

**10.4.6. Comentario.** Hay muchas pruebas diferentes de 10.4.4. El argumento de arriba tiene ventaja de ser muy breve, pero no es constructivo. La fuente que seguí son los apuntes de J.S. Milne sobre la teoría de grupos: <http://jmilne.org/math/CourseNotes/gt.html>

Podemos formular un resultado más preciso.

**10.4.7. Teorema.** *Todo grupo abeliano finitamente generado no nulo  $A$  es isomorfo a un producto directo de grupos cíclicos*

$$\mathbb{Z}/p_1^{k_1}\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p_s^{k_s}\mathbb{Z} \times \underbrace{\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_r.$$

El número  $r$  está bien definido y se llama el **rango** de  $A$ . Los números  $p_i^{k_i}$  son potencias de números primos (no necesariamente distintos) y también están definidos de modo único para  $A$ .

*Demostración.* Según 10.4.4, todo grupo abeliano finitamente generado es un producto directo de grupos cíclicos. Cada uno de los factores cíclicos finitos es isomorfo a  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Tomando la factorización en números primos  $n = p_1^{k_1} \cdots p_s^{k_s}$  y aplicando el teorema chino del resto, se obtiene

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p_1^{k_1}\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p_s^{k_s}\mathbb{Z}.$$

Esto establece la existencia de isomorfismo

$$(10.7) \quad A \cong \mathbb{Z}/p_1^{k_1}\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p_s^{k_s}\mathbb{Z} \times \underbrace{\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_r$$

para todo grupo abeliano finitamente generado  $A$ . Nos falta ver que los números  $r$  y  $p_i^{k_i}$  están bien definidos.

Sería útil separar la parte finita  $\mathbb{Z}/p_1^{k_1}\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p_s^{k_s}\mathbb{Z}$  de la parte infinita  $\underbrace{\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_r$ .

Para esto podemos considerar el **subgrupo de torsión**

$$A_{tors} := \{a \in A \mid n \cdot a = 0 \text{ para algún } n = 1, 2, 3, \dots\}.$$

Tenemos

$$A_{tors} \cong \mathbb{Z}/p_1^{k_1}\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p_s^{k_s}\mathbb{Z}, \quad A_{tf} := A/A_{tors} \cong \underbrace{\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_r$$

(“tf” significa “torsion free”, “libre de torsión”). Ahora sea  $p$  cualquier número primo. Consideremos el grupo

$$pA_{tf} := \{p \cdot a \mid a \in A_{tf}\} \subset A_{tf}.$$

El grupo cociente

$$A_{tf}/pA_{tf} \cong \underbrace{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}_r = \underbrace{\mathbb{F}_p \times \cdots \times \mathbb{F}_p}_r$$

es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{F}_p$  y

$$\dim_{\mathbb{F}_p}(A_{tf}/pA_{tf}) = r.$$

Entonces,  $r$  no depende de un isomorfismo particular (10.7), sino es un invariante de  $A$ .

Para ver la unicidad de los números  $p_i^{k_i}$ , podemos analizar por separado cada primo. A saber, para cada primo  $p$  consideremos el **subgrupo de  $p$ -torsión**

$$A[p^\infty] := \{a \in A \mid p^n \cdot a = 0 \text{ para algún } n = 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Será suficiente ver que en

$$A[p^\infty] \cong \mathbb{Z}/p^{\ell_1}\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/p^{\ell_t}\mathbb{Z}$$

los números  $p^{\ell_i}$  están bien definidos. Procedamos por inducción sobre  $\ell = \ell_1 + \dots + \ell_t$ . Si  $\ell = 1$ , entonces  $A[p^\infty] \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . Para el paso inductivo, podemos considerar el subgrupo  $pA[p^\infty] \subset A[p^\infty]$ . Luego,

$$A[p^\infty]/pA[p^\infty] \cong \mathbb{Z}/p^{\ell_1-1}\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/p^{\ell_t-1}\mathbb{Z}.$$

Por la hipótesis de inducción, los números  $\ell_i - 1$  están bien definidos. La única excepción son los factores  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  que corresponden a  $\ell_i = 1$  que van a desaparecer. El número de estos factores puede ser recuperado de la relación  $\sum_i \ell_i = \ell$ . ■

**10.4.8. Corolario.** *Todo subgrupo de un grupo abeliano finitamente generado es finitamente generado.*

Para grupos no abelianos, el último resultado no se cumple. Un grupo no abeliano finitamente generado puede tener subgrupos que no son finitamente generados.

**10.4.9. Ejemplo.** Hay tres grupos abelianos no isomorfos de orden 8:

$$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Para encontrar los grupos abelianos de orden 100, podemos factorizar  $100 = 2^2 \cdot 5^2$ . Entonces, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}/100\mathbb{Z} &\cong \mathbb{Z}/25\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, & \mathbb{Z}/25\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \\ \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, & \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

▲

**10.4.10. Comentario.** En la expresión

$$A \cong \mathbb{Z}/p_1^{k_1}\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/p_s^{k_s}\mathbb{Z} \times \underbrace{\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}}_r$$

los números  $p_i^{k_i}$  y  $r$  están bien definidos, pero el mismo isomorfismo depende de una base particular y por lo tanto no es canónico en ningún sentido.

He aquí una aplicación de grupos abelianos finitamente generados.

**10.4.11. Proposición.** *Para un número complejo  $\alpha \in \mathbb{C}$  las siguientes condiciones son equivalentes.*

1)  $\alpha$  es un **entero algebraico**: existe un polinomio mónico

$$f = X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$$

tal que  $f(\alpha) = 0$ .

2) El grupo abeliano

$$\mathbb{Z}[\alpha] := \left\{ \sum_i n_i \alpha^i \mid n_i \in \mathbb{Z} \right\} \subset \mathbb{C}$$

es finitamente generado.

*Demostración.* Si tenemos

$$\alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \cdots + a_1 \alpha + a_0,$$

entonces toda potencia  $\alpha^i$  para  $i \geq n$  puede ser escrita como una combinación  $\mathbb{Z}$ -lineal de  $1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}$ , y por lo tanto

$$\mathbb{Z}[\alpha] = \langle 1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1} \rangle.$$

En la otra dirección, si el grupo  $\mathbb{Z}[\alpha]$  es finitamente generado, sus generadores son de la forma  $f_i(\alpha)$  para algunos polinomios  $f_i \in \mathbb{Z}[X]$  (no necesariamente mónicos). Sea  $n$  un número natural tal que  $n > \deg f_i$  para todo  $i$ . Luego,

$$\alpha^n = \sum_i b_i f_i(\alpha)$$

para algunos  $b_i \in \mathbb{Z}$  y  $\alpha$  es una raíz del polinomio

$$f := X^n - \sum_i b_i f_i(X)$$

que es mónico por nuestra elección de  $n$ . ■

**10.4.12. Corolario.** Sean  $\alpha$  y  $\beta$  enteros algebraicos. Luego,  $\alpha \pm \beta$  y  $\alpha\beta$  son enteros algebraicos.

*Demostración.* Los grupos  $\mathbb{Z}[\alpha]$  y  $\mathbb{Z}[\beta]$  son finitamente generados, y luego

$$\mathbb{Z}[\alpha, \beta] := \left\{ \sum_{i,j} n_{ij} \alpha^i \beta^j \mid n_{ij} \in \mathbb{Z} \right\}$$

es finitamente generado. Este contiene como sus subgrupos a  $\mathbb{Z}[\alpha \pm \beta]$  y  $\mathbb{Z}[\alpha\beta]$ , así que son también finitamente generados. ■

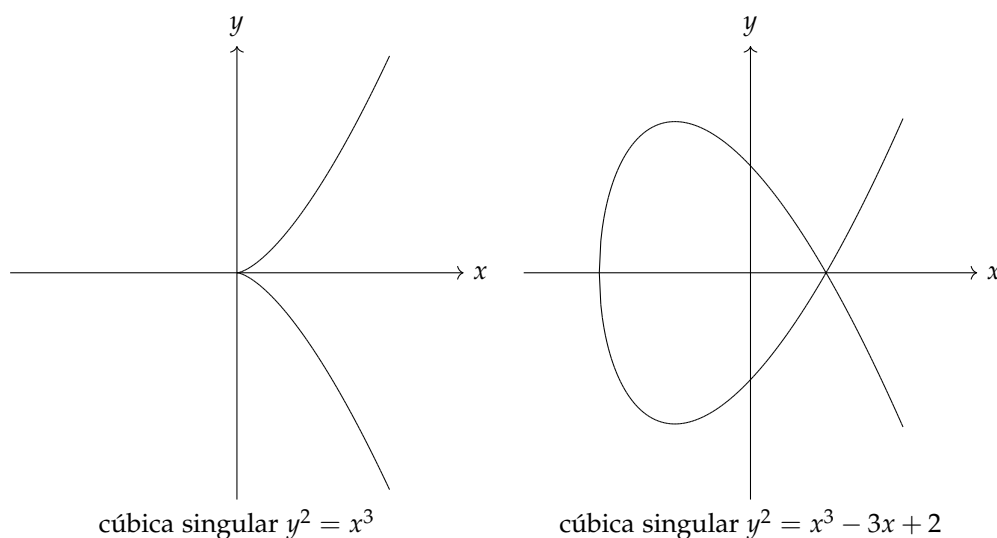
Del último resultado sigue que todos los enteros algebraicos forman un anillo.

## 10.5 Perspectiva: el grupo de Mordell–Weil

Finalizamos nuestra discusión de grupos abelianos finitamente generados con un ejemplo muy importante y no trivial. Sea  $E$  la curva plana definida por una ecuación cúbica

$$y^2 = x^3 + Ax + B,$$

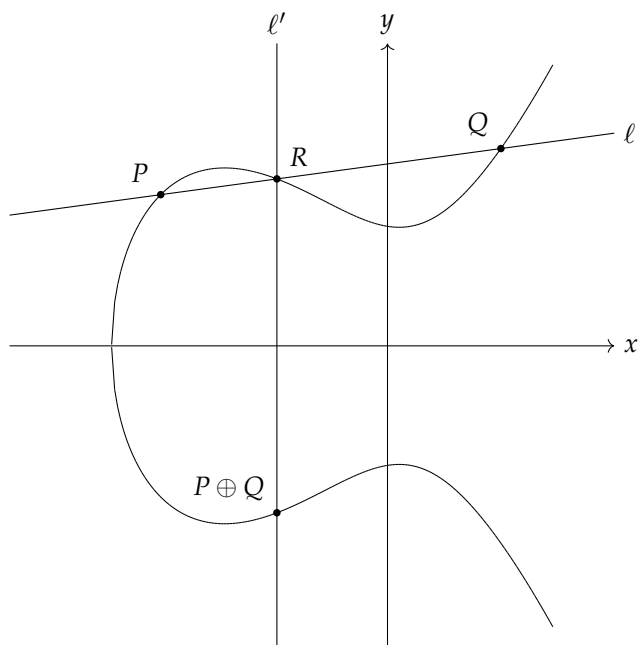
donde  $A$  y  $B$  son algunos coeficientes racionales. Esta curva puede tener una **cúspide** o un **nodo** como las curvas en el dibujo de abajo; en este caso se dice que  $E$  es **singular**.



La curva no será singular precisamente cuando

$$4A^3 + 27B^2 \neq 0.$$

En este caso se dice que  $E$  es una **curva elíptica**. Sobre los puntos de  $E$  se puede definir la siguiente operación. Para dos puntos  $P, Q \in E$ , sea  $\ell$  la recta que pasa por  $P$  y  $Q$  (si  $P = Q$ , se considera la tangente que pasa por  $P$ ) y sea  $R$  el tercer punto de intersección de  $\ell$  con  $E$ . Sea  $\ell'$  la recta vertical que pasa por  $R$ . Entonces, el punto  $P \oplus Q$  es el otro punto de intersección de  $E$  con  $\ell'$ .



Un caso excepcional es cuando  $P = (x, y)$  y  $Q = (x, -y)$ . En este caso se dice que el tercer punto de intersección “está al infinito” y se escribe  $P \oplus Q = O$ . Aquí  $O$  es un punto que se añade al plano afín; para este punto se define

$$P \oplus O = O \oplus P = P$$

para todo  $P$ . En el resto de casos, las coordenadas del tercer punto de intersección  $R$  pueden ser calculadas directamente.

1. Si  $P = (x_P, y_P)$  y  $Q = (x_Q, y_Q)$  donde  $x_P \neq x_Q$ , entonces se puede calcular que el tercer punto de intersección  $R = (x_R, y_R)$  tiene coordenadas

$$x_R = \left( \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q} \right)^2 - x_P - x_Q, \quad y_R = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q} (x_R - x_Q) + y_Q.$$

2. Si  $P = Q = (x_P, y_P)$ , entonces

$$x_R = \frac{(3x_P^2 + A)^2}{4y_P^2} - 2x_P, \quad y_R = \frac{3x_P^2 + A}{2y_P} (x_R - x_P) + y_P.$$

**10.5.1. Teorema.** Sea  $E$  una curva elíptica definida por la ecuación

$$y^2 = x^3 + Ax + B,$$

donde  $4A^3 + 27B^2 \neq 0$ . Denotemos por  $E(\mathbb{Q})$  los puntos con coordenadas racionales que están en la curva, junto con el punto  $O$ :

$$E(\mathbb{Q}) := \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \mid y^2 = x^3 + Ax + B\} \cup \{O\}.$$

Este se llama el **grupo de Mordell–Weil** de la curva elíptica  $E$ .

Entonces,  $E(\mathbb{Q})$  es un grupo abeliano respecto a la operación  $\oplus$ .

*Bosquejo de demostración.* De las fórmulas de arriba se ve que si  $P$  y  $Q$  tienen coordenadas racionales, entonces  $P \oplus Q$  también tiene coordenadas racionales.

Por la definición,  $O$  es el elemento neutro. El elemento opuesto a  $P = (x_P, y_P)$  es  $-P = (x_P, -y_P)$ . La operación es simétrica en  $P$  y  $Q$ , así que  $P \oplus Q = Q \oplus P$  para cualesquiera  $P, Q \in E(\mathbb{Q})$ .

La única cosa que no está clara es la asociatividad:  $P \oplus (Q \oplus R) = (P \oplus Q) \oplus R$ . La única prueba comprensible y convincente usa geometría algebraica y la omitiré. ■

Un teorema clásico de Siegel dice que una curva elíptica tiene un número finito de puntos enteros. El número de puntos racionales puede ser infinito. Sin embargo, tenemos el siguiente resultado, conocido como el **teorema de Mordell–Weil**<sup>\*</sup>.

**10.5.2. Teorema.** *El grupo  $E(\mathbb{Q})$  es finitamente generado.*

Esto significa que

$$E(\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}^r \times E(\mathbb{Q})_{tors},$$

donde  $r$  es un número natural, llamado el **rango** de la curva elíptica, y  $E(\mathbb{Q})_{tors}$  es algún grupo finito. En otras palabras, existen algunos puntos

$$P_1, \dots, P_r, Q_1, \dots, Q_s$$

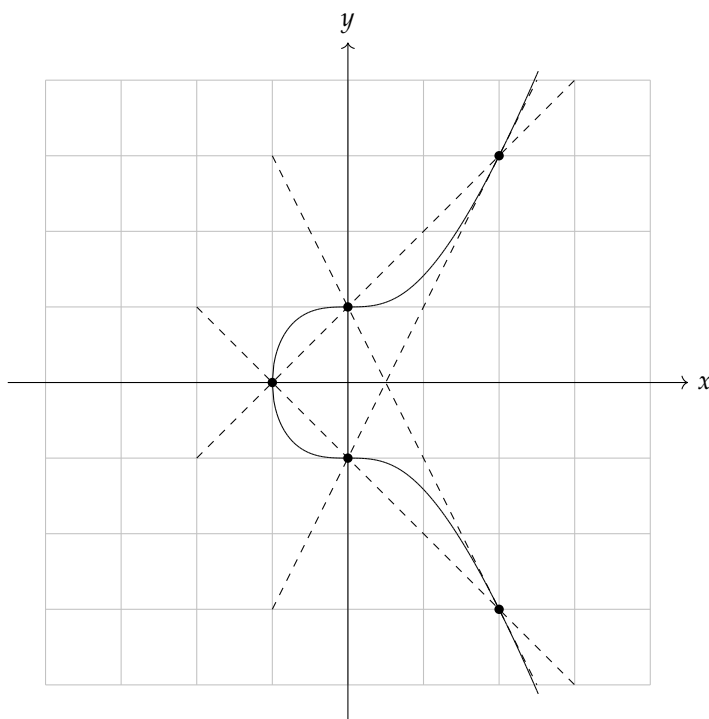
tales que todos los puntos racionales de la curva pueden ser obtenidas a partir de estas usando la operación  $\oplus$ .

**10.5.3. Ejemplo.** Para la curva  $y^2 = x^3 + 1$  podemos calcular que el punto  $(2, 3)$  es de orden 6:

$$2 \cdot (2, 3) = (0, 1), 3 \cdot (2, 3) = (-1, 0), 4 \cdot (2, 3) = (0, -1), 5 \cdot (2, 3) = (2, -3), 6 \cdot (2, 3) = O.$$

Todo esto se ve del dibujo de abajo. Note que  $(0, \pm 1)$  son puntos de inflexión.

<sup>\*</sup>LOUIS J. MORDELL (1888–1972) probó el resultado en 1922 y ANDRÉ WEIL (1906–1998) obtuvo una generalización en 1928.



curva elíptica  $y^2 = x^3 + 1$

De hecho, no hay otros puntos racionales y el grupo  $E(\mathbb{Q})$  es cíclico de orden 6. ▲

**10.5.4. Ejemplo.** Resulta que para la curva  $y^2 = x^3 - 4x + 4$  el grupo  $E(\mathbb{Q})$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}$ . Su generador es  $P = (2, -2)$ . Tenemos, por ejemplo

$$2 \cdot P = (0, -2), \quad 3 \cdot P = (-2, 2), \quad 4 \cdot P = (1, 1), \quad 5 \cdot P = (6, 14), \quad 6 \cdot P = (8, -22).$$

▲

En 1978 el matemático estadounidense BARRY MAZUR demostró que el subgrupo  $E(\mathbb{Q})_{tors}$  es isomorfo a uno de los siguientes grupos:

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \text{ donde } n = 1, 2, 3, \dots, 9, 10, 12,$$

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \text{ donde } m = 2, 4, 6, 8,$$

y además, cada uno de los grupos mencionados surge como el subgrupo de torsión de alguna curva elíptica.

El número  $r$  es más misterioso. Una curva elíptica aleatoria suele tener rango 0 o 1. Una conjetura dice que  $r$  puede ser arbitrariamente grande, pero es muy difícil construir ejemplos particulares. El último récord pertenece al matemático estadounidense NOAM ELKIES: es una curva de rango  $\geq 28$ .

Aparte del interés teórico, el grupo abeliano  $E(\mathbb{Q})$  tiene aplicaciones en criptografía.



## 10.6 Ejercicios

**Ejercicio 10.1.** Enumere todos los grupos abelianos de orden 666 salvo isomorfismo.

**Ejercicio 10.2.** Sea  $n \geq 3$  un número natural impar. Consideremos el grupo diédrico

$$D_{2n} = \{\text{id}, r, r^2, \dots, r^{2n-1}, f, fr, fr^2, \dots, fr^{2n-1}\}$$

(las simetrías del  $2n$ -ágono regular) y sus subgrupos  $H := \langle r^2, f \rangle$  y  $K := \{1, r^n\}$ .

- 1) Demuestre que  $H \cong D_n$  y  $K \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .
- 2) Demuestre que  $D_{2n} \cong H \times K$ .
- 3) Si  $n$  es par, demuestre que  $D_{2n} \not\cong D_n \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

**Ejercicio 10.3.** Demuestre que la sucesión

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{n \mapsto (n, -n)} \mathbb{Z}[1/p] \times \mathbb{Z}_{(p)} \xrightarrow{(x,y) \mapsto x+y} \mathbb{Q} \rightarrow 0$$

es exacta. Aquí  $\mathbb{Z}[1/p]$  es el subgrupo de  $\mathbb{Q}$  formado por las fracciones con potencias de  $p$  en el denominador y  $\mathbb{Z}_{(p)}$  es el subgrupo de fracciones con el denominador no divisible por  $p$ .

**Ejercicio 10.4.** Demuestre que si  $\mathbb{Q} \cong A \times B$  para algunos grupos abelianos  $A$  y  $B$ , entonces  $A = 0$  o  $B = 0$ .

*Sugerencia: supongamos que  $A$  y  $B$  son subgrupos no triviales de  $\mathbb{Q}$ . Demuestre que  $A \cap B \neq \{0\}$ .*

**Ejercicio 10.5.** Demuestre que  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}[1/p]/\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{(p)}/\mathbb{Z}$ .

**Ejercicio 10.6.** Consideremos el grupo alternante  $A_4$  y sus subgrupos

$$V := \{\text{id}, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$$

y  $H := \langle (1\ 2\ 3) \rangle$ . Demuestre que  $A_4$  es el producto semidirecto de  $V$  y  $H$ .

**Ejercicio 10.7.** Demuestre que para  $n \geq 5$  el grupo alternante  $A_n$  no puede ser isomorfo a un producto semidirecto  $N \rtimes_{\phi} H$  donde  $N$  y  $H$  no son triviales.

**Ejercicio 10.8.** Sea  $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)$  el grupo de isometrías del plano euclidiano. Demuestre que

$$\text{Isom}(\mathbb{R}^2) \cong \mathbb{R}^2 \rtimes_{\phi} O_2(\mathbb{R}),$$

donde  $\mathbb{R}^2$  es el grupo aditivo  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  y el homomorfismo

$$\phi: O_2(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{R}^2)$$

viene dado por la multiplicación de vectores  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  por matrices  $A \in O_2(\mathbb{R})$ :

$$\phi_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

10.6. EJERCICIOS

**Ejercicio 10.9.** Demuestre que  $O_n(\mathbb{R}) \cong SO_n(\mathbb{R}) \rtimes_{\phi} \{\pm 1\}$  para algún homomorfismo  $\phi: \{\pm 1\} \rightarrow \text{Aut}(SO_n(\mathbb{R}))$ . Indicación: demuestre que la sucesión exacta corta

$$1 \rightarrow SO_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{i} O_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{p} \{\pm 1\} \rightarrow 1$$

(donde  $i$  es la inclusión de subgrupo y  $p$  es la proyección sobre el grupo cociente) admite un homomorfismo  $s: \{\pm 1\} \rightarrow O_n(\mathbb{R})$  tal que  $i \circ s = \text{id}$ .

**Ejercicio 10.10.** Encuentre todas las posibles extensiones de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  por  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow A \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

salvo isomorfismo.

**Ejercicio 10.11.** Demuestre que toda sucesión exacta corta de grupos abelianos

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

es equivalente a la extensión

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{a \mapsto (a,0)} A \times \mathbb{Z} \xrightarrow{(a,n) \mapsto n} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

Indicación: demuestre que todo epimorfismo  $p: B \rightarrow \mathbb{Z}$  admite un homomorfismo  $s: \mathbb{Z} \rightarrow B$  tal que  $p \circ s = \text{id}_{\mathbb{Z}}$ .

**Ejercicio 10.12.** Sea  $A$  un grupo abeliano que satisface la siguiente propiedad: todo monomorfismo de grupos abelianos  $i: A \rightarrow B$  admite un homomorfismo  $r: B \rightarrow A$  tal que  $r \circ i = \text{id}_A$ . En este ejercicio vamos a demostrar que  $A$  es divisible.

Sea  $n = 1, 2, 3, \dots$  y  $a \in A$ .

- 1) Consideremos el homomorfismo  $f: \mathbb{Z} \rightarrow A$  definido por  $f(1) = a$ .
- 2) Demuestre que  $C := \{(f(x), -nx) \mid x \in \mathbb{Z}\}$  es un subgrupo de  $A \times \mathbb{Z}$ .
- 3) Consideremos el cuadrado de homomorfismos de grupos abelianos

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\times n} & \mathbb{Z} \\ f \downarrow & & \downarrow \bar{f} \\ A & \xrightarrow{i} & (A \times \mathbb{Z})/C \end{array}$$

donde la primera flecha horizontal es la multiplicación por  $n$ , la flecha  $i$  viene dada por  $a \mapsto (a, 0) + C$  y la flecha  $\bar{f}$  viene dada por  $x \mapsto (0, x) + C$ . Demuestre que el cuadrado es conmutativo y que  $i$  es un monomorfismo.

- 4) Por la hipótesis sobre  $A$ , existe un homomorfismo  $r: (A \times \mathbb{Z})/C \rightarrow A$  tal que  $r \circ i = \text{id}_A$ .

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\times n} & \mathbb{Z} \\ f \downarrow & & \downarrow \bar{f} \\ A & \xrightarrow{i} & (A \times \mathbb{Z})/C \\ & & \leftarrow r \end{array}$$

Usando esto, encuentre un elemento  $b \in A$  tal que  $b = n \cdot a$ . Concluya que  $A$  es divisible.

**Ejercicio 10.13.** Recordemos que dos sucesiones exactas cortas (extensiones de grupos)

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad 0 \rightarrow A \xrightarrow{i'} B' \xrightarrow{p'} C \rightarrow 0$$

son *equivalentes* si existe un homomorfismo  $f: B \rightarrow B'$  tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{p} & C & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow \text{id} & & \downarrow f & & \downarrow \text{id} & & \\ 1 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i'} & B' & \xrightarrow{p'} & C & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

es conmutativo (hemos probado que en este caso  $f$  es un isomorfismo).

Sea  $p$  un número primo. Consideremos una sucesión de homomorfismos

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \xrightarrow{[1]_{p^1} \mapsto [p]_{p^2}} \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \xrightarrow{[1]_{p^2} \mapsto [n]_p} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

- 1) Demuestre que para todo  $n = 1, 2, \dots, p-1$  es una sucesión exacta corta.
- 2) Demuestre que estas sucesiones no son equivalentes para diferentes  $n = 1, 2, \dots, p-1$ .

**Ejercicio 10.14.** Sea

$$1 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow K \rightarrow 1$$

una sucesión exacta corta de grupos finitos. Demuestre que  $|G| = |H| \cdot |K|$ .

**Ejercicio 10.15.** Se dice que una sucesión de homomorfismos

$$1 \xrightarrow{f_n} G_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} G_{n-2} \xrightarrow{f_{n-2}} G_{n-3} \rightarrow \dots \rightarrow G_1 \xrightarrow{f_1} G_0 \xrightarrow{f_0} 1$$

es *exacta* si  $\text{im } f_i = \ker f_{i-1}$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . Es una generalización de la noción de sucesión exacta corta

$$1 \xrightarrow{f_3} G_2 \xrightarrow{f_2} G_1 \xrightarrow{f_1} G_0 \xrightarrow{f_0} 1$$

Demuestre que para una sucesión exacta de grupos finitos se cumple

$$\prod_{0 \leq i \leq n-1} |G_i|^{(-1)^i} = 1.$$

Esto generaliza la fórmula del ejercicio precedente.



# Apéndice A

## Divisibilidad en $\mathbb{Z}$

Todo número compuesto es medido por algún número primo.  
Todo número o bien es número primo o es medido por algún número primo.

---

Euclides, "Elementos", Libro VII

Cualquier número compuesto puede resolverse en factores primos de una manera única.

---

Gauss, "Disquisitiones Arithmeticae", §16

Este apéndice contiene un breve resumen de la teoría de números elemental que necesitamos en el curso, específicamente los resultados básicos relacionados con la divisibilidad de números enteros. Algunos otros temas, como la aritmética módulo  $n$ , hacen parte del texto principal. El lector interesado puede consultar, por ejemplo, el libro de texto [IR1990].

### A.0 Subgrupos de $\mathbb{Z}$

Ya que nuestro curso está dedicado a la teoría de grupos, algunas demostraciones de abajo usan la noción de grupo abeliano. Solamente para facilitar la lectura y no dejar la impresión de que en nuestra exposición hay argumentos circulares, revisemos toda la teoría de grupos necesaria.

Recordemos que un **subgrupo**  $A \subset \mathbb{Z}$  es un subconjunto de números enteros que satisface las siguientes condiciones:

- 1)  $0 \in A$ ,
- 2) para cualesquiera  $a, b \in A$  tenemos  $a + b \in A$ ,
- 3) para cualquier  $a \in A$  tenemos  $-a \in A$ .

**A.0.1. Observación.** Si  $A$  y  $B$  son dos subgrupos de  $\mathbb{Z}$ , entonces su intersección  $A \cap B$  es también un subgrupo.

Para  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$  el **subgrupo generado** por  $a_1, \dots, a_n$  es el subconjunto  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \subseteq \mathbb{Z}$  que satisface una de las siguientes condiciones equivalentes.

- 1)  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$  es el mínimo subgrupo de  $\mathbb{Z}$  que contiene todos los números  $a_1, \dots, a_n$ ,
- 2)  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$  es el conjunto de las combinaciones  $\mathbb{Z}$ -lineales de  $a_1, \dots, a_n$ :

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \left\{ \sum_i n_i a_i \mid n_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Nos van a interesar dos casos particulares: los subgrupos generados por un número  $d \in \mathbb{Z}$ :

$$\langle d \rangle = \{md \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

y subgrupos generados por dos números:

$$\langle a, b \rangle = \{ma + nb \mid m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

## A.1 División con resto

**A.1.1. Teorema (Euclides).** Sean  $a, b \in \mathbb{Z}$  dos números enteros, con  $b \neq 0$ . Entonces, existen  $q, r \in \mathbb{Z}$  tales que

$$a = qb + r, \quad 0 \leq r < |b|.$$

*Demostración.* Para el conjunto

$$\{a - xb \mid x \in \mathbb{Z}\}$$

sea

$$r = a - qb$$

su mínimo elemento tal que  $r \geq 0$  (este existe, puesto que  $b \neq 0$ ). Supongamos que  $r \geq |b|$ . Si  $b > 0$ , tenemos

$$0 \leq r - b = a - qb - b = a - (q + 1)b < r.$$

De la misma manera, si  $b < 0$ , entonces

$$0 \leq r + b = a - qb + b = a - (q - 1)b < r.$$

En ambos casos se produce un elemento  $a - (q \pm 1)b$ , lo que contradice nuestra elección de  $r$ . Podemos concluir que  $r < |b|$ . ■

El resultado que acabamos de describir se llama la **división con resto** de  $a$  por  $b$ . He aquí una de sus consecuencias importantes.

**A.1.2. Proposición.** Todo subgrupo de  $\mathbb{Z}$  es de la forma  $\langle d \rangle$  para algún  $d \in \mathbb{Z}$ . En particular, para cualesquiera  $a, b \in \mathbb{Z}$  se tiene

- 1)  $\langle a, b \rangle = \langle d \rangle$  para algún  $d \in \mathbb{Z}$ ,
- 2)  $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle d \rangle$  para algún  $d \in \mathbb{Z}$ .

*Demostración.* Sea  $A \subseteq \mathbb{Z}$  un subgrupo. Si  $A = 0$ , entonces  $A = \langle 0 \rangle$  y enunciado es trivial. Luego, si  $A \neq 0$ , entonces  $A$  contiene números no nulos. Para cada  $x \in A$  también  $-x \in A$ , así que  $A$  contiene números positivos. Sea entonces

$$d := \min\{x \in A \mid x > 0\}.$$

Está claro que  $\langle d \rangle \subseteq A$ . Para ver la otra inclusión, consideremos un elemento arbitrario  $c \in A$ . La división con resto por  $d$  nos da

$$c = qd + r, \quad 0 \leq r < d.$$

Luego, puesto que  $c, d \in A$ , tenemos también  $r = c - qd \in A$ . Por nuestra elección de  $d$ , podemos descartar el caso  $0 < r < d$ . Entonces,  $r = 0$  y  $c = qd \in \langle d \rangle$ . ■

## A.2 Divisibilidad y los números primos

**A.2.1. Definición.** Para dos números enteros  $d, n \in \mathbb{Z}$  se dice que  $d$  **divide a**  $n$  y se escribe " $d \mid n$ " si  $n = mx$  para algún  $m \in \mathbb{Z}$ . En este caso también se dice que  $d$  es un **divisor** de  $n$  o que  $n$  es **divisible por**  $d$ . Cuando  $d$  no divide a  $n$ , se escribe " $d \nmid n$ ".

Notamos que en términos de subgrupos de  $\mathbb{Z}$ ,

$$d \mid n \iff \langle n \rangle \subseteq \langle d \rangle.$$

El lector puede comprobar las siguientes propiedades de la relación de divisibilidad.

- 0)  $a \mid 0$  para todo\*  $a \in \mathbb{Z}$ . Esto caracteriza a 0 de modo único. Tenemos  $0 \mid a$  solamente para  $a = 0$ .
- 1)  $a \mid a$  y  $\pm 1 \mid a$  para todo  $a \in \mathbb{Z}$ .
- 2) Si  $a \mid b$  y  $b \mid a$ , entonces  $a = \pm b$ .
- 3) Si  $a \mid b$  y  $b \mid c$ , entonces  $a \mid c$ .
- 4) Si  $a \mid b$ , entonces  $a \mid bc$  para cualquier  $c \in \mathbb{Z}$ .
- 5) Si  $a \mid b$  y  $a \mid c$ , entonces  $a \mid (b + c)$ .

**A.2.2. Definición.** Se dice que un número entero positivo  $p > 0$  es **primo** si  $p \neq 1$  y los únicos divisores de  $p$  son  $\pm 1$  y  $\pm p$ .

\*Algunas fuentes insisten que  $0 \nmid 0$ , pero la relación  $0 \mid 0$  no tiene nada de malo. De hecho  $0 \in \langle d \rangle$  para cualquier  $d \in \mathbb{Z}$ , en particular para  $d = 0$ .

### A.3. EL MÁXIMO COMÚN DIVISOR

---

En otras palabras,  $p$  es primo si y solamente si para  $m, n > 0$ , si tenemos  $p = mn$ , entonces o bien  $m = p, n = 1$  o bien  $m = 1, n = p$ . Los primeros números primos son

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, ...

Por ejemplo,  $57 = 3 \cdot 19$  no es primo.

**A.2.3. Proposición.** *Todo entero no nulo puede ser expresado como*

$$n = \pm p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_\ell^{k_\ell}$$

donde  $p_i$  son primos diferentes.

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad, podemos considerar el caso de  $n > 0$ . Sería suficiente ver que  $n$  es un producto de primos y juntando múltiplos iguales, se obtiene la expresión de arriba.

Para  $n = 1$  tenemos  $n = p^0$  para cualquier primo  $p$ . Luego, se puede proceder por inducción. Supongamos que el resultado se cumple para todos los números positivos  $< n$ . Si  $n$  es primo, no hay que demostrar nada. Si  $n$  no es primo, entonces  $n = ab$  donde  $a < n$  y  $b < n$ . Por la hipótesis de inducción,  $a$  y  $b$  son productos de números primos, y por lo tanto  $n$  lo es. ■

En este caso la palabra “primo” es un sinónimo de “primero” y refiere precisamente al hecho de que todo número entero sea un producto de primos. No se trata de ninguna relación de parentesco entre los números.

**A.2.4. Teorema (Euclides).** *Hay un número infinito de primos.*

*Demostración.* Consideremos los primeros  $n$  números primos

$$p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, p_5 = 11, \dots, p_n.$$

Luego, el número

$$N := p_1 p_2 \cdots p_n + 1$$

no es divisible por ningún primo entre  $p_1, \dots, p_n$ . Sin embargo,  $N$  tiene que ser un producto de primos, así que es necesariamente divisible por algún primo  $p$  tal que  $p_n < p \leq N$ . ■

## A.3 El máximo común divisor

**A.3.1. Definición.** Para dos números enteros  $a, b \in \mathbb{Z}$  su **máximo común divisor (mcd)** es un número  $d := \text{mcd}(a, b)$  caracterizado por las siguientes propiedades:

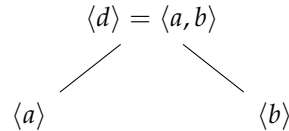
- 1)  $d \mid a$  y  $d \mid b$ ,
- 2) si  $d'$  es otro número tal que  $d' \mid a$  y  $d' \mid b$ , entonces  $d' \mid d$ .

Las condiciones de arriba pueden ser escritas como



- 1)  $\langle a \rangle \subseteq \langle d \rangle$  y  $\langle b \rangle \subseteq \langle d \rangle$ ,
- 2) si  $\langle a \rangle \subseteq \langle d' \rangle$  y  $\langle b \rangle \subseteq \langle d' \rangle$ , entonces  $\langle d \rangle \subseteq \langle d' \rangle$ .

El subgrupo mínimo de  $\mathbb{Z}$  que contiene a  $\langle a \rangle$  y  $\langle b \rangle$  es  $\langle a, b \rangle$ . Gracias a A.1.2, sabemos que  $\langle a, b \rangle = \langle d \rangle$  para algún  $d \in \mathbb{Z}$ .



Esto nos lleva al siguiente resultado.

**A.3.2. Proposición.** *El mcd siempre existe: tenemos*

$$\langle a, b \rangle = \langle d \rangle \quad \text{donde } d = \text{mcd}(a, b).$$

*En particular, se cumple*

$$ax + by = \text{mcd}(a, b) \quad \text{para algunos } x, y \in \mathbb{Z}$$

y  $\text{mcd}(a, b)$  es el mínimo número posible que puede ser representado como una combinación  $\mathbb{Z}$ -lineal de  $a$  y  $b$ .

La última expresión se conoce como la **identidad de Bézout**. Aquí los coeficientes  $x$  e  $y$  no son únicos. Por ejemplo,

$$2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 = 2 \cdot (-4) + 3 \cdot 3 = 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) = \dots = 1.$$

He aquí algunas observaciones respecto a  $\text{mcd}(a, b)$ .

- 1) La definición de  $d := \text{mcd}(a, b)$  caracteriza a  $d$  *salvo signo*. De hecho, si  $d$  y  $d'$  satisfacen las condiciones de  $\text{mcd}(a, b)$ , entonces  $d \mid d'$  y  $d' \mid d$  (o la condición equivalente  $\langle d \rangle = \langle d' \rangle$ ) implica que  $d' = \pm d$ . Normalmente se escoge  $d > 0$ , pero estrictamente hablando, todas las identidades con  $\text{mcd}(a, b)$  pueden ser interpretadas salvo signo.
- 2) La definición de  $\text{mcd}(a, b)$  es visiblemente simétrica en  $a$  y  $b$ , así que

$$\text{mcd}(a, b) = \text{mcd}(b, a).$$

- 3) Para todo  $a \in \mathbb{Z}$  se tiene

$$\text{mcd}(a, 0) = a.$$

En particular <sup>\*</sup>,

$$\text{mcd}(0, 0) = 0.$$

Esto nada más significa que cualquier número divide a 0, o de manera equivalente, que  $\langle 0 \rangle \subseteq \langle a \rangle$  para todo  $a \in \mathbb{Z}$ , y también para  $a = 0$ .

---

<sup>\*</sup>Algunas fuentes insisten que  $\text{mcd}(0, 0)$  no está definido, pero como vemos, es lógico poner  $\text{mcd}(0, 0) = 0$ .

**A.3.3. Definición.** Si  $\text{mcd}(a, b) = 1$ , se dice que  $a$  y  $b$  son **coprimos**.

Si  $a$  y  $b$  son coprimos, entonces  $\langle a, b \rangle = \langle 1 \rangle = \mathbb{Z}$ , y en particular tenemos

$$ax + by = 1 \quad \text{para algunos } x, y \in \mathbb{Z}.$$

**A.3.4. Observación.** Si  $a \mid bc$  donde  $a$  y  $b$  son coprimos, entonces  $a \mid c$ .

*Demostración.* Tenemos

$$ax + by = 1$$

para algunos  $x, y \in \mathbb{Z}$ . Luego,

$$axc + byc = c,$$

y la expresión a la izquierda es divisible por  $a$ . ■

**A.3.5. Corolario.** Si  $p$  es primo y  $p \mid bc$ , entonces  $p \mid b$  o  $p \mid c$ .

Muy a menudo se usa el contrapuesto: si  $p \nmid b$  y  $p \nmid c$ , entonces  $p \nmid bc$ .

*Demostración.* Ya que los únicos divisores de  $p$  son  $\pm 1$  y  $\pm p$ , tenemos dos casos posibles. En el primer caso,  $\text{mcd}(p, b) = 1$  y luego  $p \mid c$  por el resultado precedente. En el segundo caso,  $\text{mcd}(p, b) = p$ , lo que significa que  $p \mid b$ . ■

## A.4 El mínimo común múltiplo

**A.4.1. Definición.** Para dos números enteros  $a, b \in \mathbb{Z}$  su **mínimo común múltiplo (mcm)** es un número  $m := \text{mcm}(a, b)$  caracterizado por las siguientes propiedades:

- 1)  $a \mid m$  y  $b \mid m$ ,
- 2) si  $m'$  es otro número tal que  $a \mid m'$  y  $b \mid m'$ , entonces  $m \mid m'$ .

Las condiciones de arriba pueden ser escritas como

- 1)  $\langle m \rangle \subseteq \langle a \rangle$  y  $\langle m \rangle \subseteq \langle b \rangle$ ,
- 2) si  $m'$  es otro número tal que  $\langle m' \rangle \subseteq \langle a \rangle$  y  $\langle m' \rangle \subseteq \langle b \rangle$ , entonces  $\langle m' \rangle \subseteq \langle m \rangle$ .

El subgrupo máximo de  $\mathbb{Z}$  que contiene a  $\langle a \rangle$  y  $\langle b \rangle$  es su intersección  $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle$ . Gracias a [A.1.2](#) sabemos que es también de la forma  $\langle m \rangle$  para algún  $m \in \mathbb{Z}$ .

$$\begin{array}{ccc} \langle a \rangle & & \langle b \rangle \\ & \searrow & \swarrow \\ & \langle m \rangle = \langle a \rangle \cap \langle b \rangle & \end{array}$$

**A.4.2. Proposición.** El mcm siempre existe: tenemos

$$\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle m \rangle \quad \text{donde } m = \text{mcm}(a, b).$$

Tenemos las siguientes propiedades.

- 1) La definición caracteriza a  $\text{mcm}(a, b)$  de modo único salvo signo.
- 2) Para cualesquiera  $a, b \in \mathbb{Z}$  se tiene

$$\text{mcm}(a, b) = \text{mcm}(b, a).$$

- 3) Para todo  $a$  se cumple

$$\text{mcm}(a, 0) = a.$$

En particular,

$$\text{mcm}(0, 0) = 0.$$

(De hecho,  $0 \mid m$  implica que  $m = 0$ .)

**A.4.3. Proposición.** Para cualesquiera  $a, b \in \mathbb{Z}$  tenemos

$$\text{mcm}(a, b) \cdot \text{mcd}(a, b) = ab.$$

En particular,

$$\text{mcm}(a, b) = ab \text{ si y solamente si } a \text{ y } b \text{ son coprimos.}$$

*Primera demostración.* El caso de  $a = b = 0$  es trivial y podemos descartarlo. Sea  $d := \text{mcd}(a, b)$  y  $m := ab/d$ . Vamos a ver que  $m = \text{mcm}(a, b)$ .

Primero, puesto que  $d \mid a$  y  $d \mid b$ , podemos escribir

$$a = da', \quad b = db'.$$

Luego,

$$m = da'b' = ab' = ba',$$

así que  $a \mid m$  y  $b \mid m$ .

Ahora notemos que

$$d = \text{mcd}(a, b) = \text{mcd}(da', db') = d \cdot \text{mcd}(a', b'),$$

así que

$$\text{mcd}(a', b') = 1$$

y los números  $a'$  y  $b'$  son coprimos.

Sea  $m'$  otro número tal que  $a \mid m'$  y  $b \mid m'$ . Queremos ver que  $m \mid m'$ . Escribamos

$$m' = ax = by.$$

Luego,

$$m'b' = ab'x = mx, \quad m'a' = ba'y = my,$$

lo que nos da  $m \mid m'b'$  y  $m \mid m'a'$  y por lo tanto

$$m \mid \text{mcd}(m'b', m'a') = m' \cdot \text{mcd}(a', b') = m'.$$

■

Segunda demostración, usando la teoría de grupos. Consideremos los subgrupos  $m\mathbb{Z}$  y  $n\mathbb{Z}$  en  $\mathbb{Z}$ . Luego, el segundo teorema de isomorfía nos dice que

$$a\mathbb{Z}/(a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}) \cong (a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z})/b\mathbb{Z}$$

(véase el capítulo 7 y los ejercicios). Tenemos  $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$  donde  $m = \text{mcm}(a, b)$  y  $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$  donde  $d = \text{mcd}(a, b)$ . Entonces,

$$a\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong d\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}.$$

Lo que nos da la identidad  $a/m = d/b$ . ■

Note que la última proposición nos dice básicamente que la existencia de  $\text{mcd}(a, b)$  es equivalente a la existencia de  $\text{mcm}(a, b)$ .

También se pueden definir  $\text{mcd}$  y  $\text{mcm}$  de  $n$  números. El lector puede generalizar de manera evidente las definiciones A.3.1 y A.4.1 y ver que estas generalizaciones son equivalentes a

- 1)  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \langle d \rangle$  para  $d = \text{mcd}(a_1, \dots, a_n)$ ,
- 2)  $\langle a_1 \rangle \cap \dots \cap \langle a_n \rangle = \langle m \rangle$  para  $m = \text{mcm}(a_1, \dots, a_n)$ .

Por ejemplo, tenemos la siguiente generalización de la identidad de Bézout: existen  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}$  tales que

$$x_1 a_1 + \dots + x_n a_n = \text{mcd}(a_1, \dots, a_n).$$

Además, se puede ver que las operaciones  $\text{mcd}(-, -)$  y  $\text{mcm}(-, -)$  son asociativas y por lo tanto la definición generalizada se reduce al caso binario:

- 1)  $\text{mcd}(\text{mcd}(a, b), c) = \text{mcd}(a, \text{mcd}(b, c)) = \text{mcd}(a, b, c)$ ,
- 2)  $\text{mcm}(\text{mcm}(a, b), c) = \text{mcm}(a, \text{mcm}(b, c)) = \text{mcm}(a, b, c)$ .

## A.5 El teorema fundamental de la aritmética

**A.5.1. Definición.** Sea  $p$  un número primo fijo. Para un número entero no nulo  $n$  su **valuación  $p$ -ádica** es el número natural máximo  $k$  tal que  $p^k$  divide a  $n$ :

$$v_p(n) := \text{máx}\{k \mid p^k \mid n\}.$$

(Para  $n = 0$  normalmente se pone  $v_p(0) := +\infty$ , pero no vamos a necesitar esta convención.)

Notamos que  $v_p(n) = 0$  si y solamente si  $p \nmid n$ . La valuación  $p$ -ádica se caracteriza por

$$n = p^{v_p(n)} n',$$

donde  $p \nmid n'$  (véase A.3.5).

**A.5.2. Lema.** Para cualesquiera  $m, n \in \mathbb{Z}$  se cumple

$$v_p(mn) = v_p(m) + v_p(n).$$

*Demostración.* Tenemos

$$m = p^{v_p(m)} m', \quad n = p^{v_p(n)} n',$$

donde  $p \nmid m'$  y  $p \nmid n'$ . Luego,

$$mn = p^{v_p(m)+v_p(n)} m' n',$$

donde  $p \nmid (m'n')$ , así que  $v_p(mn) = v_p(m) + v_p(n)$ . ■

**A.5.3. Teorema.** Todo número entero no nulo puede ser representado de modo único como

$$n = \pm p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_\ell^{k_\ell}$$

donde  $p_i$  son algunos primos diferentes. A saber, tenemos  $k_i = v_{p_i}(n)$ .

(La unicidad se entiende salvo permutaciones de los factores  $p_i^{k_i}$ .)

*Demostración.* Ya hemos notado en A.2.3 que todo entero no nulo es un producto de primos; la parte interesante es la unicidad. Dada una expresión

$$n = \pm p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_\ell^{k_\ell},$$

para todo primo  $p$  podemos calcular la valuación  $p$ -ádica correspondiente:

$$v_p(n) = v_p(p_1^{k_1}) + v_p(p_2^{k_2}) + \cdots + v_p(p_\ell^{k_\ell}).$$

Aquí

$$v_p(p_i^{k_i}) = \begin{cases} k_i, & p = p_i, \\ 0, & p \neq p_i. \end{cases}$$

Entonces,  $k_i = v_{p_i}(n)$ . ■

Entonces, podemos escribir

$$n = \pm \prod_{p \text{ primo}} p^{v_p(n)},$$

donde el producto es sobre todos los números primos, pero  $v_p(n) \neq 0$  solamente para un número finito de  $p$ .

El último resultado se conoce como el **teorema fundamental de la aritmética**. Su primera demostración completa fue publicada por Gauss en el tratado "Disquisitiones Arithmeticae".

Notamos que

$$\text{mcd}(m, n) = \prod_{p \text{ primo}} p^{\min\{v_p(m), v_p(n)\}}$$

y

$$\text{mcm}(m, n) = \prod_{p \text{ primo}} p^{\max\{v_p(m), v_p(n)\}}.$$

Estas fórmulas no ayudan mucho para grandes valores de  $m$  y  $n$ . En práctica se usa el **algoritmo de Euclides** basado en la división con resto repetida (es algo parecido a nuestra demostración de A.1.2).

## A.6 Generalizaciones

Las definiciones A.3.1 y A.4.1 de  $\text{mcd}$  y  $\text{mcm}$  tienen sentido en cualquier dominio de integridad  $R$ . En este caso  $\text{mcm}(a, b)$  y  $\text{mcd}(a, b)$  están definidos salvo un múltiplo  $u \in R^\times$ . Para  $R = \mathbb{Z}$  tenemos  $\mathbb{Z} = \{\pm 1\}$ . Sin embargo, la existencia de  $\text{mcm}(a, b)$  y  $\text{mcd}(a, b)$  no está garantizada en general.

Un dominio de integridad donde se puede definir un análogo de la división con resto se llama un **dominio euclidiano**; en este caso  $\text{mcd}$  y  $\text{mcm}$  siempre existen gracias a los mismos argumentos que vimos arriba (solo hay que reemplazar los subgrupos  $A \subseteq \mathbb{Z}$  por **ideales**  $I \subseteq R$ ). Un ejemplo típico de dominios euclidianos, excepto  $\mathbb{Z}$ , es el anillo de polinomios  $k[X]$  sobre un cuerpo  $k$ : para  $f, g \in k[X]$ ,  $g \neq 0$  existen  $q, r \in k[X]$  tales que  $f = qg + r$  donde  $-\infty \leq \deg r < \deg g$ .

Un dominio de integridad donde se cumple la factorización única (un análogo del teorema fundamental de la aritmética) se llama un **dominio factorización única**. Un típico ejemplo es el anillo de polinomios  $k[X_1, \dots, X_n]$  en  $n$  variables sobre un cuerpo  $k$ . Todos los dominios euclidianos son dominios de factorización única.

Todo esto se estudiará en la continuación de nuestro curso.

# Bibliografía

- [IR1990] Kenneth Ireland and Michael Rosen, *A classical introduction to modern number theory*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 84, Springer-Verlag, New York, 1990. [MR1070716](#)  
<https://doi.org/10.1007/978-1-4757-2103-4>
- [Lan2002] Serge Lang, *Algebra*, third ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 211, Springer-Verlag, New York, 2002. [MR1878556](#)  
<http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4613-0041-0>
- [Per1996] Daniel Perrin, *Cours d'algèbre*, CAPES / AGREG Mathématiques, Ellipses, 1996.
- [Ser1973] Jean-Pierre Serre, *A course in arithmetic*, Springer-Verlag, New York, 1973, Translated from the French, Graduate Texts in Mathematics, No. 7. [MR0344216](#)





# Índice de símbolos

- $A_{div}$ , 145  
 $\text{Aff}(V)$ , 186  
 $A[m]$ , 120  
 $A_n$ , 33  
 $\mathbb{A}^n(k)$ , 164  
 $A[p^\infty]$ , 195  
 $A_{tf}$ , 194  
 $A_{tors}$ , 120  
 $\text{Aut}(G)$ , 100  
  
 $C_G(x)$ , 169  
  
 $\deg f$ , 61  
 $D_n$ , 41  
  
 $E_{ij}(\lambda)$ , 150  
 $\text{End}(V)$ , 80  
 $E(\mathbb{Q})$ , 198  
  
 $\phi(n)$ , 75  
 $\mathbb{F}_p$ , 60  
  
 $G^{ab}$ , 155  
 $[G, G]$ , 147  
 $G/H$ , 122  
 $[G : H]$ , 125  
 $gH, Hg$ , 121  
 $[g, h]$ , 147  
 $\text{GL}_n(R)$ , 81  
 $\text{GL}(V)$ , 80  
 $g(n)$ , 114  
 $g^n$ , 39  
 $G_x$ , 164  
 $G_x$ , 169  
 $\varepsilon_x$ , 169  
  
 $\mathcal{H}$ , 162  
 $H \setminus G$ , 122  
  
 $(i_1 i_2 \cdots i_k)$ , 24  
 $\text{id}$ , 6  
 $I_g$ , 170  
 $(i j)$ , 24  
 $\text{im } f$ , 101  
 $\text{Inn}(G)$ , 170  
  
 $\ker f$ , 103  
  
 $\text{mcd}$ , 208  
 $\text{mcm}$ , 210  
 $M_n(R)$ , 57  
 $\mu_\infty(\mathbb{C})$ , 74  
 $\mu_n(\mathbb{C})$ , 73  
 $\mu_{p^\infty}(\mathbb{C})$ , 145  
  
 $n \cdot a$ , 40  
 $n\mathbb{Z}$ , 71  
  
 $O_n(k)$ , 85  
 $\text{ord } g$ , 112  
 $\text{Out}(G)$ , 171  
 $O_x$ , 164  
  
 $\text{PGL}_2(k)$ , 171  
 $\mathbb{P}^n(k)$ , 166  
 $\text{PSL}_n(k)$ , 139  
  
 $\mathbb{Q}_8$ , 44  
 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ , 143  
  
 $\mathbb{R}_{>0}$ , 72  
 $R^\times$ , 72  
 $R[X]$ , 61  
  
 $R[[X]]$ , 70  
  
 $\text{sgn } \sigma$ , 30  
 $\text{SL}_n(R)$ , 81  
 $S_n$ , 22  
 $\text{SO}_n(k)$ , 108  
 $S_X$ , 21  
  
 $\mathbb{T}$ , 73  
  
 $V \subset A_4$ , 47  
 $v(f)$ , 70  
 $v_p(n)$ , 92  
  
 $\langle X \rangle$ , 109  
 $X/G$ , 165  
 $X^G$ , 164  
  
 $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ , 55  
 $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ , 56  
 $Z(G)$ , 48  
 $\mathbb{Z}[1/n]$ , 69  
 $\mathbb{Z}_{(p)}$ , 69  
 $\mathbb{Z}[\zeta_3]$ , 56  
 $\rightarrow$ , 97  
 $\equiv$ , 16  
 $\cong$ , 97  
 $\left(\frac{a}{p}\right)$ , 93  
 $\mapsto$ , 97  
  
 $\amalg$  (producto directo de grupos), 177  
 $\rtimes$  (producto semidirecto de grupos), 184  
 $\times$  (producto directo de grupos), 177



# Índice alfabético de términos

- abelianización, 155
- acción
  - de grupo sobre un conjunto, 159
  - fiel, 160
  - por aplicaciones lineales, 161
  - transitiva, 164
- algoritmo
  - de Euclides, 213
  - de Horner, 65
- anillo, 53
  - conmutativo, 54
  - de endomorfismos, 80
  - de los enteros de Eisenstein, 56
  - de los enteros de Gauss, 55
  - de matrices, 57
  - de polinomios, 61
  - de series formales, 62
  - nulo, 58
- aplicación
  - biyectiva, 7
  - de Frobenius, 60
  - diagonal, 13
  - equivariante, 163
  - identidad, 6
  - invertible, 6
  - inyectiva, 7
  - sobreyectiva, 7
- asociatividad, 21, 37
- automorfismo
  - de grupos, 100
  - externo, 171
  - interno, 170
- base
  - de Hamel, 68
  - de un espacio vectorial, 68
  - de un grupo abeliano, 192
- centralizador, 169
- centro
  - de grupo, 48
- ciclos
  - disjuntos, 26
- clase
  - de conjugación, 169
  - de equivalencia, 16
  - lateral en un grupo, 122
- congruencia, 16
- conjugación
  - en un grupo, 169
- conmutador
  - en un grupo, 147
- conmutatividad, 37
- cuerpo, 59
- curva elíptica, 197
- dimensión
  - de un espacio vectorial, 68
- distributividad, 53
- división con resto, 206
- divisibilidad, 207
- divisor de cero, 59
- dominio
  - de integridad, 59
- ecuación
  - de Pell, 77

- elemento
  - inverso, 37
  - invertible, 72
  - neutro, 37
  - opuesto, 40
- entero algebraico, 56, 196
- epimorfismo
  - de grupos, 97
- espacio
  - afín, 164
  - proyectivo, 166
  - vectorial, 66
- estabilizador, 164
- evaluación
  - de un polinomio, 62
- extensión de grupos, 187
  
- factorización
  - epi-mono, 142
- función
  - $\phi$  de Euler, 75
  - de Landau, 114
  - de particiones, 28
  - multiplicativa, 75
  
- G-conjunto, 159
  - homogéneo, 164
- generador
  - de un grupo, 110
- grado
  - de polinomio, 61
- grupo, 37
  - abeliano, 38
  - afín, 186
  - alternante, 33
  - cíclico, 115
  - cociente, 136
  - de cuaterniones, 45
  - de cuatro, 47
  - de extensiones, 192
  - de isotropía, 164
  - de Klein, 47
  - de las raíces de la unidad, 73
  - de Mordell–Weil, 199
  - de Prüfer, 145
  - de unidades, 72
  - del círculo, 73
  - diédrico, 41
  - divisible, 145
  - finitamente generado, 110
  - lineal especial, 81
    - proyectivo, 139
  - lineal general, 80, 81
  - modular, 81
  - ortogonal, 85
    - especial, 108
  - resoluble, 150
  - simétrico, 22
  - simple, 138
  - trivial, 38
  
- homomorfismo
  - de evaluación, 94
  - de grupos, 89
  - trivial, 96
  
- identidad
  - de Bézout, 209
- imagen
  - de un homomorfismo de grupos, 101
- índice
  - de subgrupo, 125
- isomorfismo
  - de grupos, 97
  
- lema
  - de Burnside, 175
  
- mínimo común múltiplo, 210
- máximo común divisor, 208
- matriz
  - elemental, 150
- monomorfismo
  - de grupos, 97
  
- núcleo
  - de un homomorfismo de grupos, 103
  - de una acción, 160
- números
  - de Catalan, 5
  - primos, 207, 210

- nilpotente
  - en un anillo, 84
- norma, 76
- órbita, 164
- orden
  - de un elemento de grupo, 112
  - de un grupo, 37
- permutación, 21
  - cíclica, 24
  - impar, 30
  - par, 30
- polinomio, 61
  - constante, 61
- producto
  - cartesiano de conjuntos, 11
  - directo de grupos, 177
  - semidirecto, 184
- punto al infinito, 166
- punto fijo, 164
- raíz
  - de la unidad, 73
    - primitiva, 117
  - de un polinomio, 62
- rango
  - de un grupo abeliano, 194
  - de una curva elíptica, 199
- relación
  - de equivalencia, 16
  - reflexiva, 16
  - simétrica, 16
  - transitiva, 16
- representación
  - lineal, 161
  - por permutaciones, 161
- residuo cuadrático, 93
- semiplano superior, 162
- serie
  - de potencias, 69
  - derivada, 150
- subconjunto
  - invariante, 164
- subgrupo, 45
  - conmutador, 147
  - de torsión, 120
  - derivado, 147
  - generado, 110
  - máximo divisible, 145
  - normal, 133
  - propio, 45
- sucesión exacta, 203
  - corta, 186
    - escindida, 190
- típo de ciclo, 27
- teorema
  - chino del resto, 179
  - de Abel–Ruffini, 150
  - de Euler, 126
  - de Lagrange, 125
  - de Mordell–Weil, 199
  - fundamental de la aritmética, 213
  - pequeño de Fermat, 60, 126
- transformación de Möbius, 162
- transposición, 24
- unión disjunta, 11
- unidad
  - en un anillo, 72
- valor absoluto  $p$ -ádico, 93
- valuación  $p$ -ádica, 92, 212