Funciones zeta de esquemas

Alexey Beshenov (cadadr@gmail.com)

Universidad de El Salvador. Ciclo par 2018

En esta serie de charlas me gustaría presentar algunos conceptos claves de la geometría algebraica y geometría aritmética: haces, esquemas, funciones zeta de esquemas, cohomología étale y ℓ-ádica, etcétera.

Índice

Parte I
¿Qué es un esquema?

12.10.18

Pregunta del público: ...si tratáramos de explicar a un lego qué es geometría algebraica, creo que todavía sería adecuado el título del viejo libro de Enriques "Teoría geométrica de ecuaciones". ¿Qué opina usted?
Grothendieck: Sí, pero su "lego" debe saber qué es un sistema de ecuaciones algebraicas. Esto le costaría años de estudio a Platón.

Apuntes de charlas de Grothendieck
tomados por Federico Gaeta

En la primera exposición voy a presentar la definición de esquema. Las referencias adicionales para el lector interesado son [Nee2007, Chapter 2, 3], [EH2000, Chapter I] y [Man2018]. Empezaré más bien por el lado técnico y formal para explicar más adelante el uso y verdadero significado de esquemas.

1 Conjuntos algebraicos afines

La geometría algebraica estudia soluciones de sistemas de ecuaciones polinomiales, pero para desarrollar una teoría interesante y general hay que trabajar mucho para llegar a la definición correcta de "sistemas de ecuaciones polinomiales". Revisemos rápidamente la teoría clásica. Para los detalles, se puede consultar, por ejemplo, el libro [Ful2008].

Sea k un cuerpo. El **espacio afín** de dimensión n sobre k viene dado por

$$\mathbb{A}^n(k) = \{\underline{x} := (x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in k\}.$$

Para un ideal $J \subseteq k[X_1, \ldots, X_n]$ el **conjunto algebraico afín** correspondiente es el conjunto de los ceros en común de los polinomios en J:

$$V(J) := \{\underline{x} \in \mathbb{A}^n(k) \mid f(\underline{x}) = 0 \text{ para todo } f \in J\}.$$

Viceversa, dado un conjunto algebraico afín $X \subseteq \mathbb{A}^n(k)$, las funciones polinomiales que se anulan sobre X forman un ideal

$$I(X) := \{f \in k[X_1, \ldots, X_n] \mid f(\underline{x}) = 0 \text{ para todo } \underline{x} \in X\}.$$

Por la definición, el **álgebra de las funciones polinomiales** sobre X es el anillo cociente

$$k[X] := k[X_1, \ldots, X_n]/I(X).$$

Las palabras "funciones polinomiales" vienen de la asociación de una aplicación polinomial $\mathbb{A}^n(k) \to k$ a un polinomio en n variables (evaluándolo en los puntos de $\mathbb{A}^n(k)$). La definición de arriba dice precisamente que los elementos de $k[X]$ dan lugar a aplicaciones polinomiales $X \to k$.

Los cocientes de anillos de polinomios $k[X_1,\ldots,X_n]$ se llaman **k-álgebras finitamente generadas**. Además, es fácil comprobar que los ideales $I(X)$ tienen una propiedad especial: si $f^n \in I(X)$ para algún n, entonces $f \in I(X)$. Esto implica que $k[X]$ no tiene **nilpotentes** (no triviales); es decir, elementos $f \neq 0$ tales que $f^n = 0$ para $n = 1,2,3,\ldots$ Una k-álgebra finitamente generada sin nilpotentes se llama una **k-álgebra afín**.

Para relacionar diferentes conjuntos algebraicos $X \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ e $Y \subseteq \mathbb{A}^m(k)$, se pueden considerar las aplicaciones ente ellos dadas por polinomios. A saber, un **morfismo**[*] **de conjuntos algebraicos** $\phi\colon X \to Y$ es una aplicación que tiene coordenadas polinomiales; es decir,

$$\phi(\underline{x}) = (f_1(\underline{x}),\ldots,f_m(\underline{x})), \quad \text{donde } f_i \in k[X].$$

Tal morfismo de conjuntos algebraicos induce un homomorfismo de álgebras $\phi^*\colon k[Y] \to k[X]$ que va *en la dirección opuesta*:

$$\phi\colon X \to Y \quad \rightsquigarrow \quad \phi^*\colon k[Y] \to k[X].$$

A saber, un elemento $f \in k[Y]$ es un polinomio en m variables $f(Y_1,\ldots,Y_m)$ considerado módulo $I(Y)$. Luego, la aplicación ϕ es dada por m polinomios

$$f_1(X_1,\ldots,X_n),\ldots,f_m(X_1,\ldots,X_n) \in k[X_1,\ldots,X_n]/I(X),$$

así que f puede ser evaluado en $Y_i = f_i$. Esto nos da un homomorfismo bien definido

$$\begin{aligned}\phi^*\colon k[Y_1,\ldots,Y_m]/I(Y) &\to k[X_1,\ldots,X_n]/I(X),\\ f(Y_1,\ldots,Y_m) &\mapsto f(f_1(X_1,\ldots,X_n),\ldots,f_m(X_1,\ldots,X_n)).\end{aligned}$$

Las correspondencias

$$X \rightsquigarrow k[X] \quad \text{y} \quad (\phi\colon X \to Y) \rightsquigarrow (\phi^*\colon k[Y] \to k[X])$$

tienen las siguientes propiedades.

1) Los morfismos de conjuntos algebraicos $X \to Y$ están en una biyección natural con los homomorfismos de álgebras afines $k[Y] \to k[X]$. Esta biyección viene dada por $\phi \mapsto \phi^*$.

2) Si k es un cuerpo algebraicamente cerrado (!), entonces para toda k-álgebra afín A existe un conjunto algebraico X tal que $k[X] \cong A$.

La parte 1) sigue de las definiciones, mientras que la parte 2) es un resultado clásico (pero no tan trivial) conocido como el **teorema de los ceros de Hilbert**. Estas dos propiedades significan que por lo menos cuando k es algebraicamente cerrado, el estudio de conjuntos algebraicos se reduce al estudio de álgebras afines. En el lenguaje categórico, *la categoría de conjuntos algebraicos es equivalente a la categoría opuesta de la categoría de álgebras afines*:

$$\textbf{Conjuntos algebraicos afines en } \mathbb{A}^n(k) \simeq k\textbf{-álgebras afines}^{\mathrm{op}}.$$

La palabra “opuesta” significa nada más que los morfismos $\phi\colon X \to Y$ corresponden a homomorfismos $\phi^*\colon k[Y] \to k[X]$ que van en la dirección opuesta. Las equivalencias de categorías de este tipo (que dan vuelta a los morfismos) se conocen como **dualidades**. Voy a mencionar un par de ejemplos del análisis funcional.

- La **dualidad de Pontryagin**[**] es una **autodualidad** para los grupos abelianos localmente compactos, dada por $G \rightsquigarrow \widehat{G} := \mathrm{Hom}_{cont.}(G,\mathbb{T})$. Hay muchas más variantes del tema; véase por ejemplo `https://golem.ph.utexas.edu/category/2008/11/variations_on_pontryagin_duali.html`

[*] Aquí y más adelante el lector puede interpretar el término “morfismo” como una aplicación que preserva cierta estructura.

[**] Lev Pontryagin (1908–1988), topólogo soviético. Se volvió ciego a los 14 años en un accidente; leía y escribía artículos con ayuda de su madre.

- La **dualidad de Gelfand**[*] es una dualidad entre las C^*-álgebras conmutativas y los espacios topológicos compactos Hausdorff.

Estos dos ejemplos son otras ilustraciones más de la máxima filosófica:

un objeto geométrico se reconstruye
(o por lo menos puede ser investigado)
a partir de su álgebra de funciones.

Volviendo a nuestro ejemplo sencillo con conjuntos algebraicos, una pregunta natural que se puede hacer es qué sucede si el cuerpo base k no es algebraicamente cerrado. En este caso la correspondencia ya no funciona. Un ejemplo trivial: el álgebra $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$ no corresponde a ningún conjunto algebraico en la recta real $\mathbb{A}^1(\mathbb{R})$, puesto que el polinomio X^2+1 no tiene raíces reales.

Una solución radical es *declarar* que nuestro objeto principal de estudio no son conjuntos algebraicos afines, sino las álgebras afines. El punto de vista aún más general, adoptado por Grothendieck, es considerar no solamente álgebras afines, sino anillos conmutativos arbitrarios. Esto nos lleva a la noción del **esquema afín**. Esencialmente, los esquemas afines forman una categoría que es dual a la categoría de anillos conmutativos:

$$\textbf{Esquemas afines} \simeq \textbf{Anillos conmutativos}^{\mathrm{op}}.$$

En pocas palabras, un esquema afín es un anillo conmutativo R y un morfismo entre esquemas afines que corresponden a dos anillos R y S es un homomorfismo $S \to R$ que va en la dirección opuesta. En general, un **esquema** es cierto objeto que "se ve localmente" como un anillo conmutativo. Para precisar estas ideas, hay que adoptar otra definición del esquema afín, más técnica y menos tautológica.

2 Haces

Nuestro objetivo es pegar de cierta manera anillos conmutativos, y para pegar objetos sirve la noción de haz[**]. La teoría de haces nació durante la segunda guerra mundial en los trabajos del matemático francés Jean Leray (1906–1998) mientras él estaba en un campo de prisioneros de guerra en Austria. Las fundaciones fueron elaboradas a finales de los 40 en el seminario de Henri Cartan (1904–2008).

Un **haz de anillos** $\mathcal{F}$[***] sobre un espacio topológico X es una regla que a cada subconjunto abierto $U \subseteq X$ asocia un anillo $\Gamma(U,\mathcal{F})$, llamado el anillo de las **secciones sobre** U. Además, a dos abiertos $U \subseteq V$ se asocia un homomorfismo de anillos

$$\begin{aligned} \mathrm{res}_{UV}\colon \Gamma(V,\mathcal{F}) &\to \Gamma(U,\mathcal{F}),\\ f &\mapsto f|_U\,. \end{aligned}$$

Este se llama el homomorfismo de **restricción** de V a U. Se pide que las restricciones sean compatibles:

a) la restricción de U al mismo U es el homomorfismo identidad

$$\mathrm{res}_{UU} = \mathrm{id}\colon \Gamma(U,\mathcal{F}) \to \Gamma(U,\mathcal{F});$$

b) para $U \subseteq V \subseteq W$, la restricción de W a V y luego a U es lo mismo que la restricción de W a U de una vez:

$$\begin{tikzcd} \Gamma(W,\mathcal{F}) \arrow[r, "\mathrm{res}_{VW}"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{res}_{UW}"'] & \Gamma(V,\mathcal{F}) \arrow[r, "\mathrm{res}\,UV"] & \Gamma(U,\mathcal{F}) \end{tikzcd}$$

[*] Israel Gelfand (1913–2009), matemático soviético conocido por sus contribuciones en el análisis funcional y la teoría de representación.

[**] Nuestros amigos mexicanos suelen ocupar el término "gavilla".

[***] La letra $\mathcal{F}$ viene del francés *faisceau*, "haz".

Además, se piden los siguientes dos axiomas. Sea $U = \bigcup_i U_i$ un recubrimiento de $U \subseteq X$ por abiertos.

1) *Las secciones se determinan por las secciones locales*: si para $f, g \in \Gamma(U, \mathcal{F})$ se tiene $f|_{U_i} = g|_{U_i}$ para todo i, entonces $f = g$.

2) *Las secciones locales pueden ser pegadas en una sección global*: si están especificados elementos $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{F})$ tales que $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ para cualesquiera i, j, entonces existe $f \in \Gamma(U, \mathcal{F})$ tal que $f|_{U_i} = f_i$ para todo i.

Por el momento nos servirán haces de *anillos*, pero de la misma manera se definen **haces de grupos abelianos** (hay que reemplazar anillos por grupos abelianos), etc. En realidad, los más básicos e importantes son los **haces de conjuntos**, donde las secciones $\Gamma(U, \mathcal{F})$ no tienen ninguna estructura algebraica. El ejemplo primordial es el **haz de las secciones** de una aplicación continua $f\colon E \to X$, donde para $U \subseteq X$ se pone

$$\Gamma(U, \mathcal{F}) := \{\text{aplicaciones continuas } s\colon U \to E \mid f \circ s = \mathrm{id}_U\}.$$

Es un ejercicio fácil comprobar que esto define un haz sobre X. Resulta que para todo haz de conjuntos $\mathcal{F}$ sobre X se puede construir cierto espacio topológico E junto con una aplicación continua $f\colon E \to X$ tal que $\mathcal{F}$ será el haz de secciones de f. Sin embargo, este espacio E (llamado el **espacio étalé**[*]) es enorme y tiene solamente significado teórico. El lector interesado en los detalles puede leer [MLM1994, Chapter II].

La definición de haces es bastante formal, pero la terminología y notación está sugerida por los siguientes ejemplos bien conocidos.

- Sea $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ o $k = \infty$. Para un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ pongamos

  $$\Gamma(U, \mathcal{C}^k) := \{\text{funciones } k\text{-diferenciables } f\colon U \to \mathbb{R}\}.$$

  Esto es un anillo con las operaciones punto por punto. Las restricciones $\Gamma(V, \mathcal{C}^k) \to \Gamma(U, \mathcal{C}^k)$ para abiertos $U \subseteq V$ son literalmente las restricciones de funciones. Por el análisis real básico, $\mathcal{C}^k$ es un haz de anillos sobre $\mathbb{R}^n$.

- En el mundo del análisis complejo, se estudia el haz sobre $\mathbb{C}^n$ que a todo abierto $U \subseteq \mathbb{C}^n$ asocia el anillo

  $$\Gamma(U, \mathcal{O}) := \{\text{funciones holomorfas } f\colon U \to \mathbb{C}\}.$$

Notamos que un haz $\mathcal{F}$ sobre X puede ser restringido a un haz $\mathcal{F}|_V$ sobre un abierto $V \subseteq X$ poniendo para cualquier $U \subseteq V$

$$\Gamma(U, \mathcal{F}|_V) := \Gamma(U, \mathcal{F}).$$

Un espacio topológico X dotado de un haz de anillos se llama un **espacio anillado**. Normalmente este haz de anillos se denota por $\mathcal{O}_X$.

3 Variedades diferenciables y complejas

El lector probablemente conoce la definición de variedades diferenciables (resp. complejas) en términos de los atlas (pegamiento de bolas en $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$ mediante aplicaciones diferenciables u holomorfas). Tal variedad X puede ser vista como un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$, donde $\mathcal{O}_X$ es el haz de las funciones

[*] No confundir las palabras franceses *étalé* y *étale* (¡note el acento!): son dos términos matemáticos diferentes. Vamos a encontrar el segundo más adelante.

diferenciables (resp. holomorfas). En este caso las aplicaciones entre las variedades (definidas como las aplicaciones continuas compatibles con los atlas) son precisamente las aplicaciones que son compatibles con $\mathcal{O}_X$ en el siguiente sentido.

Un **morfismo de espacios anillados** $(\phi, \phi^*)\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ consiste en los siguientes datos.

- Una aplicación continua $\phi\colon X \to Y$.
- Un homomorfismo de anillos $\phi_U^*\colon \Gamma(U, \mathcal{O}_Y) \to \Gamma(\phi^{-1}U, \mathcal{O}_X)$ para todo abierto $U \subseteq Y$.

Además, se pide que los homomorfismos ϕ^* sean compatibles con las restricciones: si $U \subseteq V \subseteq Y$, entonces el siguiente cuadrado conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(V, \mathcal{O}_Y) \arrow[r, "\phi_V^*"] \arrow[d, "\mathrm{res}"'] & \Gamma(\phi^{-1}V, \mathcal{O}_X) \arrow[d, "\mathrm{res}"] \\
\Gamma(U, \mathcal{O}_Y) \arrow[r, "\phi_U^*"] & \Gamma(\phi^{-1}U, \mathcal{O}_X)
\end{tikzcd}$$

En efecto, las variedades pueden ser *definidas* usando este lenguaje de espacios anillados.

- Una $\mathcal{C}^k$-variedad de dimensión n es un espacio anillado $(X, \mathcal{O})$ que es **localmente isomorfo** al espacio anillado $(\mathbb{R}^n, \mathcal{C}^k)$ en el siguiente sentido. Está especificado un recubrimiento abierto $X = \bigcup_i U_i$ junto con isomorfismos de espacios anillados $(\mathbb{R}^n, \mathcal{C}^k) \xrightarrow{\cong} (U_i, \mathcal{O}|_{U_i})$.
- De la misma manera, una variedad compleja de dimensión n es un espacio anillado $(X, \mathcal{O})$ que es localmente isomorfo al espacio anillado $(\mathbb{C}^n, \mathcal{O})$.

4 Esquemas

Las variedades diferenciables y complejas se construyen a partir de pedazos de $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$; es decir, una variedad se ve igual *localmente*, alrededor de cada punto. Un esquema es un objeto mucho más sofisticado: localmente este se ve como un *anillo conmutativo*. Para dar una definición rigurosa, hay que asociar a todo anillo conmutativo cierto espacio anillado.

Para un anillo conmutativo R su **espectro** es el conjunto de los ideales primos en R:

$$\operatorname{Spec} R := \{\mathfrak{p} \subset R \text{ ideal primo}\}.$$

Recordemos que un ideal $\mathfrak{p} \subset R$ es primo si el anillo cociente $R/\mathfrak{p}$ no tiene divisores de cero. He aquí algunos ejemplos de espectros.

1) Para todo cuerpo k se tiene $\operatorname{Spec} k = \{(0)\}$.

2) Para el anillo de polinomios $k[X]$ se tiene

$$\operatorname{Spec} k[X] = \{(f) \mid f \in k[X] \text{ irreducible}\} \cup \{(0)\}.$$

3) Para los números enteros

$$\operatorname{Spec} \mathbb{Z} = \{(p) \mid p \in \mathbb{Z} \text{ primo}\} \cup \{(0)\}.$$

4) El espectro de $\mathbb{Z}[X]$ tiene los siguientes elementos:

   - el ideal nulo (0);

- los ideales (p) donde $p = 2, 3, 5, 7, \ldots$ es un número primo;
- los ideales (f) donde f es un polinomio irreducible no constante en $\mathbb{Z}[X]$, por ejemplo $X^2 + 1$;
- los ideales (p, f) donde p es primo y $f \in \mathbb{Z}[X]$ es un polinomio que es irreducible en $\mathbb{F}_p[X]$; por ejemplo, $X^2 + 1$ es irreducible en $\mathbb{F}_p[X]$ si y solo si $p \equiv 3 \pmod 4$.

Todo espectro puede ser dotado de una topología, llamada la **topología de Zariski**[*]. A saber, para todo ideal $I \subseteq R$ definamos

$$V(I) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid \mathfrak{p} \supseteq I\}.$$

Estos conjuntos satisfacen los axiomas de conjuntos *cerrados*.

1) Se tiene $V(0) = \operatorname{Spec} R$ y $V(1) = \emptyset$.

2) Las uniones finitas de cerrados son cerradas:

$$V(I) \cup V(J) = V(IJ).$$

3) Las intersecciones arbitrarias de cerrados son cerradas:

$$\bigcap_k V(I_k) = V(\sum_k I_k).$$

Cuando hemos hablado de los conjuntos algebraicos afines, hemos también definido conjuntos $V(J) \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ para ideales $J \subseteq k[X_1, \ldots, X_n]$. Estos satifacen las mismas propiedades y definen una topología sobre $\mathbb{A}^n(k)$ que también se conoce como la topología de Zariski.

Si tenemos un homomorfismo de anillos $f\colon R \to S$, entonces para todo ideal primo $\mathfrak{p} \subset S$ su preimagen $f^{-1}(\mathfrak{p})$ es un ideal primo en R. Esto nos da una aplicación

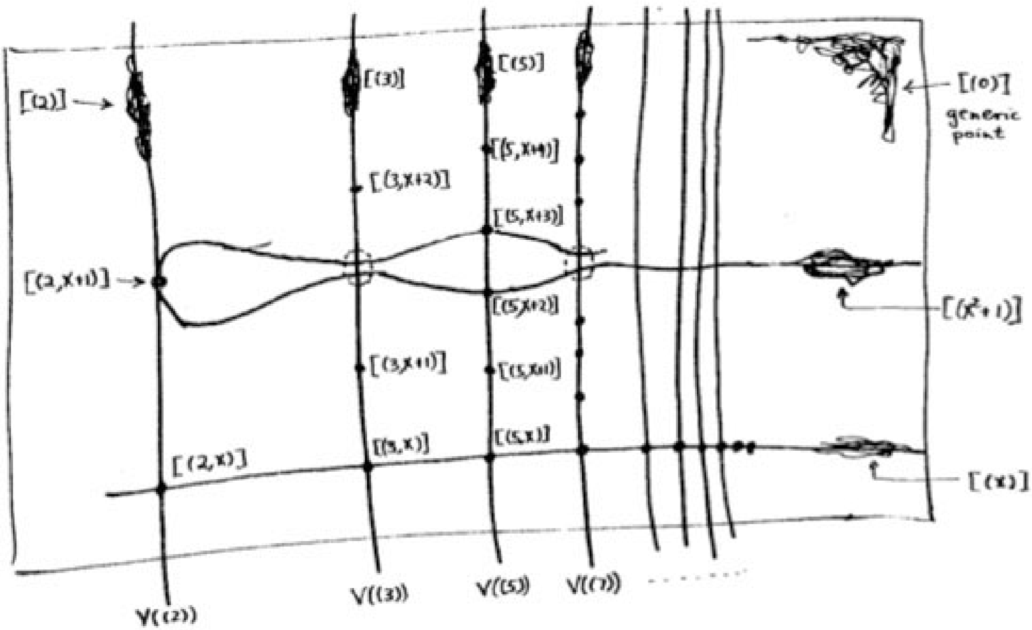
$$\operatorname{Spec} S \to \operatorname{Spec} R,$$

y de hecho es continua respecto a la topología de Zariski sobre los espectros.

No hay que buscar intuición geométrica detrás de la topología de Zariski: esta topología casi nunca es Hausdorff, tiene subconjuntos unipuntuales $\{\mathfrak{p}\}$ que son *abiertos*, etc. La topología de Zariski no se parece para nada a la topología de espacios métricos; su propósito es reflejar ciertos fenómenos de álgebra conmutativa. Una buena propiedad que satisface la topología de Zariski es que $\operatorname{Spec} R$ es siempre compacto[**].

[*] Oscar Zariski (1899–1986), geómetra algebraico de origen polaco.

[**] En otras ramas, como por ejemplo la topología algebraica, el término "compacto" subsume "Hausdorff". En geometría algebraica, casi nada es Hausdorff y "compacto" significa lo que se llama "casi compacto" en la literatura clásica.



Visualización del espacio $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[X]$ por David Mumford;
véase http://www.neverendingbooks.org/mumfords-treasure-map para más detalles

Diferentes anillos conmutativos no se distinguen por sus espectros: por ejemplo, para cualquier cuerpo k el espectro $\operatorname{Spec} k$ es el espacio unipuntual. Por esto aparte de la topología, hay que también definir un haz de anillos sobre el espectro. Los haces asocian anillos de secciones a cada subconjunto *abierto* $U \subseteq X$, pero la topología de Zariski está definida en términos de conjuntos *cerrados*. Al revisar los axiomas de haces, se ve que es suficiente especificar las secciones sobre una *base de abiertos*, y esto define de modo único las secciones para cualquier abierto.

En el caso de la topología de Zariski, una base de abiertos viene dada por los conjuntos

$$U_x := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid x \notin \mathfrak{p}\} = \operatorname{Spec}(R) \setminus V((x))$$

para $x \in R$, que vienen de la **localización**

$$R[x^{-1}] = \Big\{ \frac{r}{x^n} \mid r \in R,\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots \Big\}.$$

Este es el anillo formado por las fracciones $\frac{r}{x^n}$ donde

$$\frac{r}{x^m} = \frac{s}{x^n} \iff x^\ell\,(rx^n - s\,x^m) = 0 \text{ para algún } \ell,$$

y la suma y producto se definen de la manera habitual (véase [Bal]). Tenemos un homomorfismo canónico

$$R \to R[x^{-1}], \quad r \mapsto \frac{1}{r}$$

que induce una aplicación inyectiva $\operatorname{Spec} R[x^{-1}] \to \operatorname{Spec} R$ cuya imagen es precisamente U_x. El hecho de que los U_x formen una base de abiertos se remonta a las propiedades

- $U_x \cap U_y = U_{xy}$ (lo que equivale a $V((x)) \cup V((y)) = V((xy))$);

- todo abierto en la topología de Zariski es una unión de los U_x (lo que se sigue de $V(I) = \bigcap_{x \in I} V((x))$).

Ahora podemos definir un haz de anillos $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}$ sobre nuestra base de abiertos mediante

$$\Gamma(U_x, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}) := R[x^{-1}].$$

Si $U_x \subseteq U_y$, entonces hay un homomorfismo único $R[y^{-1}] \to R[x^{-1}]$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ R[y^{-1}] \arrow[rr, dashed, "\exists!"] & & R[x^{-1}] \end{tikzcd}$$

donde $R \to R[x^{-1}]$ y $R \to R[y^{-1}]$ son los homomorfismos canónicos. Esto define los homomorfismos de restricción.

Todos estos datos definen un espacio anillado $(\operatorname{Spec} R, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R})$. Un homomorfismo de anillos $f\colon R \to S$ induce un homomorfismo de espacios anillados $(\operatorname{Spec} S, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} S}) \to (\operatorname{Spec} R, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R})$.

Los espacios anillados $\operatorname{Spec} R := (\operatorname{Spec} R, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R})$ se llaman **esquemas afines**.

Volviendo al ejemplo de conjuntos algebraicos afines $X \subseteq \mathbb{A}^n(k)$, en su lugar se pueden estudiar los esquemas afines $\operatorname{Spec} k[X_1, \ldots, X_n]/I(X)$.

Por la definición, un **morfismo** de esquemas afines es un morfismo de espacios anillados. Hay una biyección natural

$$\{\text{homomorfismos de anillos } R \to S\} \cong \{\text{morfismos } \operatorname{Spec} S \to \operatorname{Spec} R\}.$$

En este sentido, los esquemas afines son los objetos duales a los anillos conmutativos. El álgebra conmutativa esencialmente estudia esquemas afines. El hecho de que un anillo R se reconstruya a través del esquema afín correspondiente $\operatorname{Spec} R$ no es muy sorprendente: el espectro está dotado de todo un haz de anillos. El propósito de esta construcción es poder pegar esquemas afines.

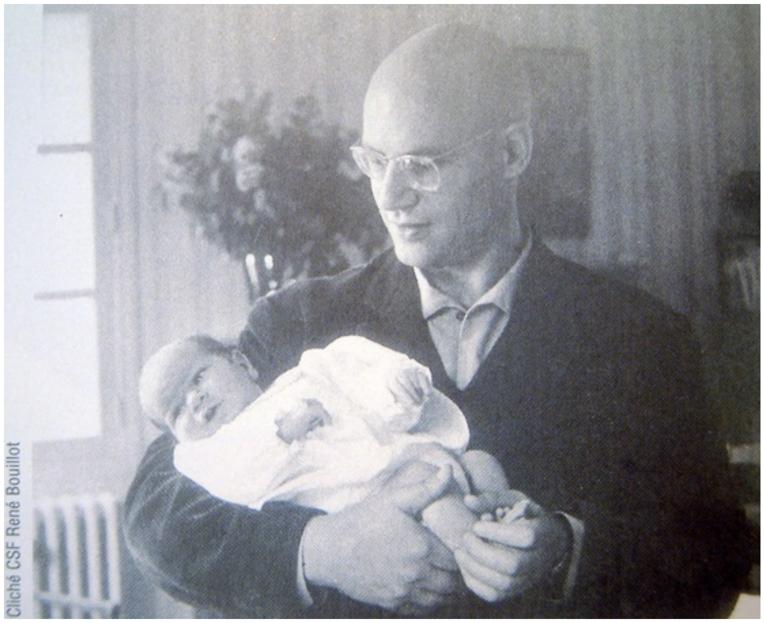
Estamos listos para dar la definición general: *un **esquema** es un espacio anillado*[*] $(X, \mathcal{O}_X)$ *que es localmente isomorfo a esquemas afines* $\operatorname{Spec} R$ *para diferentes* R.

Nuestro próximo objetivo sería entender algo sobre esta definición; terminaré hoy por un poco de la historia. Técnicamente hablando, la noción de esquema no pertenece a nadie y nació en los círculos de matemáticos parisinos en los años 50. Sin embargo, fue Alexander Grothendieck (1928–2014) quien desarrollo sistemáticamente la *teoría de esquemas*. Las fundaciones están en el tratado "Éléments de géométrie algébrique" escrito junto con Jean Dieudonné (1906–1992). El título es una referencia a los "Elementos" de Euclides. Sin duda, Grothendieck, como Euclides, fue uno de los matemáticos más importantes e influyentes de toda la historia de la humanidad. Para saber más de su vida y filosofía, se puede consultar la página `http://www.grothendieckcircle.org/` Además. Grothendieck escibió una larga autobiografía[**] "Récoltes et Semailles" ("Cosechas y siembras").

Más adelante en estas exposiciones trataré de explicar algo sobre otros conceptos elaborados por Grothendieck.

[*] Véase [EH2000, §I.2] para una discusión y en particular la noción de **espacio localmente anillado**. No la menciono en esta charla a propósito, para no complicar las cosas aún más.

[**] Bastante controvertida...



Alexander Grothendieck (a la derecha)

Muchos textos importantes sobre la geometría algebraica grothendieckiana todavía existen solamente en francés. Una fundación moderna de la teoría de esquemas en inglés puede ser encontrada en el *Stacks project*: http://stacks.math.columbia.edu/

Referencias

[Bal] Aurelio Baldor, *Álgebra*.

[EH2000] David Eisenbud and Joe Harris, *The geometry of schemes*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 197, Springer-Verlag New York, 2000.
http://dx.doi.org/10.1007/b97680

[Ful2008] William Fulton, *Algebraic curves. An introduction to algebraic geometry*, 2008.
http://www.math.lsa.umich.edu/~wfulton/CurveBook.pdf

[Man2018] Yuri I. Manin, *Introduction to the theory of schemes*, Moscow Lectures, Springer International Publishing, 2018.
http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-74316-5

[MLM1994] Saunders Mac Lane and Ieke Moerdijk, *Sheaves in geometry and logic*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 1994, A first introduction to topos theory, Corrected reprint of the 1992 edition. MR1300636
http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4612-0927-0

[Nee2007] Amnon Neeman, *Algebraic and analytic geometry*, London Mathematical Society Lecture Note Series, Cambridge University Press, 2007.
http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511800443