Álgebra I: Teoría de Grupos
Tarea 2: Grupos

Universidad de El Salvador. Ciclo impar 2018

Por cualquier pregunta, no duden en contactarme por correo electrónico cadadr@gmail.com.
Fecha límite: 22.03.2018.

Ejercicio 2.1. *Calcule el producto* $(fr)^7 \in D_3$.

Ejercicio 2.2. *Demuestre que* $\mathbb{Q} \setminus \{-1\}$ *es un grupo abeliano respecto a la operación*

$$x * y := xy + x + y.$$

Ejercicio 2.3. *Sea* X *un conjunto y* $\mathbf{2}^X$ *el conjunto de sus subconjuntos. Para* $A, B \subseteq X$*, definamos la* ***diferencia simétrica*** *por*

$$A \Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Demuestre que $\mathbf{2}^X$ *es un grupo abeliano respecto a* Δ.

Ejercicio 2.4. *Para dos parámetros fijos* $a, b \in \mathbb{R}$ *definamos una función*

$$\begin{aligned} \phi_{a,b} \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto ax + b. \end{aligned}$$

Consideremos el conjunto

$$G := \{\phi_{a,b} \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}\}.$$

Verifique que G *es un grupo respecto a la composición habitual de aplicaciones y que no es abeliano.*

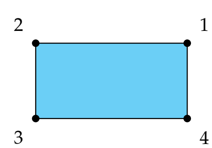
Ejercicio 2.5. *Supongamos que* G *es un grupo donde cada elemento* $g \in G$ *satisface* $g^2 = 1$*. Demuestre que* G *es abeliano.*

Ejercicio 2.6. *Encuentre todos los subgrupos del grupo simétrico* S_3.

Ejercicio 2.7.

1) *Escriba la tabla de multiplicación de* D_4*, el grupo de simetrías del cuadrado. Verifique la descripción de sus subgrupos que hemos mencionado en las lecciones.*

2) *Escriba la tabla de multiplicación del grupo de simetrías de un rectángulo que no es un cuadrado. (Note que este tiene menos simetrías que un cuadrado.)*



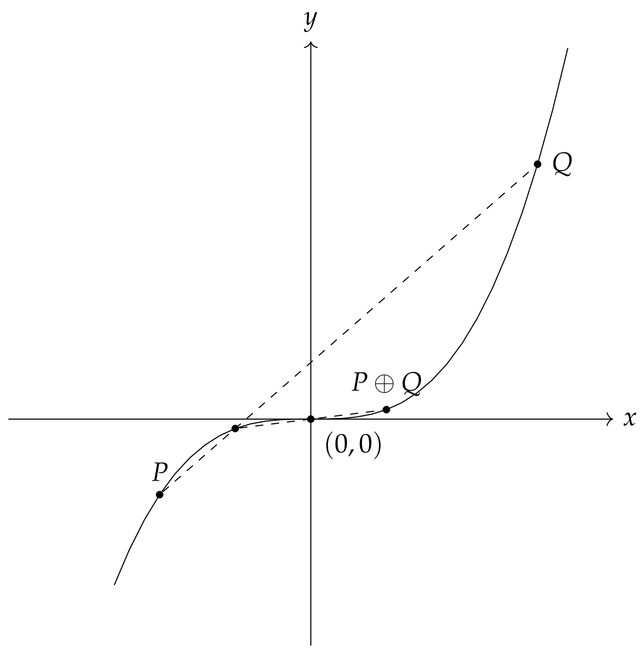
Ejercicio 2.8. *Consideremos el conjunto de puntos (x, y) en el plano real que satisfacen la ecuación $y = x^3$:*

$$X(\mathbb{R}) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^3\}.$$

Definamos la siguiente operación sobre $X(\mathbb{R})$: para dos puntos $P, Q \in X(\mathbb{R})$, consideremos la recta ℓ que pasa por P y Q, o la tangente si $P = Q$. Sea R la intersección de ℓ con otro punto de $X(\mathbb{R})$. Entonces, definimos la suma de P y Q como

$$P \oplus Q := -R;$$

es decir, el punto simétrico a R respecto al origen.



1) *Demuestre que $X(\mathbb{R})$ es un grupo abeliano respecto a $\oplus$.*

2) *Demuestre que el conjunto*

$$X(\mathbb{Q}) := \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \mid y = x^3\}$$

(cuyos elementos se denominan "puntos racionales" de la curva X) forman un subgrupo de $X(\mathbb{R})$.

Nota: este ejercicio requiere un buen conocimiento del álgebra de nivel de Baldor.

Ejercicio 2.9. *Sea G un grupo y $H, K \subset G$ dos subgrupos. Demuestre que $H \cup K$ es un grupo si y solamente si $H \subseteq K$ o $K \subseteq H$.*

Ejercicio 2.10. *Hemos visto que para el grupo simétrico se cumple*

$$Z(S_n) = \{\mathrm{id}\} \quad \textit{para } n \geq 3.$$

Demuestre que para el grupo alternante sobre 4 elementos

$$Z(A_4) = \{\mathrm{id}\}.$$

Nota: más adelante veremos en el curso que $Z(A_n) = \{\mathrm{id}\}$ para $n \geq 4$.