

Álgebra I: Teoría de Grupos

Tarea 4: Grupos de unidades

Universidad de El Salvador. Ciclo impar 2018

Por cualquier pregunta, no duden en contactarme por correo electrónico cadadr@gmail.com.

Fecha límite: 19.04.2018.

Ejercicio 4.1. Para el anillo de los enteros de Eisenstein $\mathbb{Z}[\zeta_3]$, calcule el grupo de unidades $\mathbb{Z}[\zeta_3]^\times$ y escriba la tabla de multiplicación correspondiente.

Indicación: considere la norma

$$N(a + b\zeta_3) := (a + b\zeta_3) \overline{(a + b\zeta_3)} = a^2 - ab + b^2.$$

Ejercicio 4.2. Sea R un anillo conmutativo. Se dice que un elemento $u \in R$ es una **unidad** si existe un elemento $u^{-1} \in R$ tal que $uu^{-1} = u^{-1}u = 1$. Se dice que $x \in R$ es un **nilpotente** si existe un número $n = 1, 2, 3, \dots$ tal que $x^n = 0$.

Encuentre las unidades y nilpotentes en los anillos $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$.

Ejercicio 4.3. Continuemos con las nociones introducidas en el ejercicio precedente. Sea R un anillo conmutativo.

- 1) Demuestre que si $x \in R$ es un nilpotente y $a \in R$ es cualquier elemento del anillo, entonces ax es un nilpotente.
- 2) Demuestre que si $x, y \in R$ son nilpotentes, entonces $x + y$ es también un nilpotente.
- 3) Demuestre que si $x \in R$ es un nilpotente, entonces $1 + x$ es una unidad.

Indicación: recuerde la identidad

$$(1 + X) \cdot (1 - X + X^2 - X^3 + X^4 - X^5 + \dots) = 1$$

en $R[[X]]$.

- 4) Demuestre que si $u \in R$ es una unidad y $x \in R$ es un nilpotente, entonces $u + x$ es una unidad.

Ejercicio 4.4. Calcule la matriz inversa para las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{F}_3), \quad \begin{pmatrix} 1 & X & 0 \\ 0 & 1 & X \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}[X]).$$

Ejercicio 4.5. Consideremos las matrices de $n \times n$ que tienen 1 en las entradas diagonales, ceros debajo de la diagonal y números arbitrarios arriba de la diagonal.

$$\{(x_{ij}) \mid x_{ii} = 1 \text{ para todo } i, x_{ij} = 0 \text{ para } i > j\}.$$

Por ejemplo, para $n = 3$ son de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Demuestre que estas matrices forman un subgrupo de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$.

Ejercicio 4.6. Consideremos el conjunto de matrices

$$O_n(k) = \{A \in \text{GL}_n(k) \mid A^t A = A A^t = I\},$$

donde A^t denota la matriz transpuesta.

1) Demuestre que $O_n(k)$ es un subgrupo de $\text{GL}_n(k)$. Este se llama el **grupo ortogonal** sobre k .

2) Para $n = 2$ y $k = \mathbb{R}$ demuestre que los elementos de $O_2(\mathbb{R})$ son de la forma

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \text{ o } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

3) Demuestre que el grupo diédrico D_n es un subgrupo de $O_2(\mathbb{R})$. Escriba las matrices* que corresponden a los elementos r y f .

Ejercicio 4.7. Demuestre que el grupo $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ es infinito.

Ejercicio 4.8. Demuestre que las únicas matrices invertibles que conmutan con todas las matrices son las **matrices escalares**

$$aI = \begin{pmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{pmatrix} \text{ para } a \in \mathbb{R}^\times.$$

Es decir,

$$Z(\text{GL}_n(\mathbb{R})) = \{aI \mid a \in \mathbb{R}^\times\}.$$

1) Fijemos algunos índices $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$. Denotemos por e_{ij} la matriz de $n \times n$ cuyos coeficientes son nulos, excepto el coeficiente (i, j) que es igual a 1. Consideremos las matrices $I + e_{ij}$. Estas tienen ceros en todas las entradas, excepto 1 en la posición (i, j) y en la diagonal. Demuestre que

$$\det(I + e_{ij}) = 1$$

En particular, $I + e_{ij} \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$.

2) Supongamos que $A \in Z(\text{GL}_n(\mathbb{R}))$. En particular, debe cumplirse

$$(I + e_{ij})A = A(I + e_{ij}),$$

que es equivalente a la identidad

$$e_{ij}A = Ae_{ij}$$

en el anillo de matrices $M_n(\mathbb{R})$. Recuerde la tarea anterior donde hemos visto que esto implica que A es una matriz escalar.

3) Note que el centro de $Z(\text{SL}_n(\mathbb{R}))$ también consiste en las matrices escalares (de determinante 1).

Ejercicio 4.9. Demuestre que una serie formal de potencias $f = \sum_{i \geq 0} a_i X^i \in \mathbb{R}[[X]]$ es invertible (pertenecer a $\mathbb{R}[[X]]^\times$) si y solamente si su coeficiente constante es invertible ($a_0 \in \mathbb{R}^\times$).

Ejercicio 4.10. Calcule las series $(1 - X)^{-1}$, $(1 - X^2)^{-1}$, $(1 - (X + X^2))^{-1}$ en el anillo $\mathbb{Z}[[X]]$.

*En este ejercicio hay que identificar las aplicaciones lineales $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ con matrices de 2×2 .