

Álgebra I: Teoría de Grupos

Examen parcial 1 (diferido / repetido)

Universidad de El Salvador. Ciclo impar 2018

Problema 1 (1 punto). Sea G un grupo.

1) Demuestre que

$$g \sim h \iff h = k g k^{-1} \text{ para algún } k \in G.$$

es una relación de equivalencia sobre los elementos de G .

Si $g \sim h$, se dice que los elementos g y h son **conjugados**. Las clases de equivalencia correspondientes se llaman las **clases de conjugación**.

2) Demuestre que $g \in G$ forma una clase de conjugación $\{g\}$ si y solamente si $g \in Z(G)$.

3) Supongamos que $g \sim h$. Demuestre que $g^n = 1$ si y solamente si $h^n = 1$.

Solución. La relación es reflexiva: para $k = 1$ tenemos

$$g = 1 \cdot g \cdot 1^{-1}.$$

Es simétrica:

$$g \sim h \iff h = k g k^{-1} \text{ para algún } k \in G \iff g = k^{-1} h k \iff h \sim g.$$

Por fin, es transitiva: si $g_1 \sim g_2$ y $g_2 \sim g_3$, entonces $g_2 = k_1 g_1 k_1^{-1}$ y $g_3 = k_2 g_2 k_2^{-1}$ para algunos $k_1, k_2 \in G$. Luego,

$$g_3 = k_2 (k_1 g_1 k_1^{-1}) k_2^{-1} = (k_2 k_1) g_1 (k_2 k_1)^{-1},$$

así que $g_1 \sim g_3$.

En 2) notamos que la clase de conjugación de $g \in G$ viene dada por

$$\{k g k^{-1} \mid k \in G\}.$$

Este conjunto es igual a $\{g\}$ si y solamente si $k g k^{-1} = g$ para todo $k \in G$; es decir, si y solamente si $g \in Z(G)$.

En 3), si $g \sim h$, entonces $h = k g k^{-1}$. Tenemos

$$h^n = \underbrace{(k g k^{-1}) \cdot (k g k^{-1}) \cdots (k g k^{-1})}_{n \text{ veces}} = k g^n k^{-1}.$$

De aquí se ve que $h^n = 1$ si y solamente si $g^n = 1$ (tenemos $h^n \sim g^n$, pero la identidad 1 puede ser conjugada solamente con sí misma). ■

Problema 2 (2 puntos). Describa las clases de conjugación en el grupo diédrico $D_4 = \{\text{id}, r, r^2, r^3, f, fr, fr^2, fr^3\}$.

Solución. Primero lo haré para el grupo diédrico D_n en general. Calculemos todos los elementos conjugados a las rotaciones r^i . Tenemos por supuesto $r^j r^i (r^j)^{-1} = r^i$, y luego,

$$(fr^j) r^i (fr^j)^{-1} = fr^j r^i r^{-j} f = f r^i f = r^{-i}.$$

Entonces, cada rotación r^i será conjugada solamente con sí misma y con r^{-i} . Esto quiere decir que para las rotaciones las clases de conjugación son $\{r^i, r^{-i}\}$.

- Si n es impar, esto nos da la clase de conjugación

$$\{\text{id}\}$$

y las siguientes clases de conjugación de dos elementos cada uno:

$$\{r^i, r^{n-i}\}, \quad i = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}.$$

- Si n es par, vamos a tener dos clases de conjugación

$$\{\text{id}\} \quad \text{y} \quad \{r^{n/2}\}$$

(recuerde que para n par se tiene $Z(D_n) = \{\text{id}, r^{n/2}\}$) y las siguientes clases de dos elementos cada uno:

$$\{r^i, r^{n-i}\}, \quad i = 1, 2, \dots, \frac{n-2}{2}.$$

Luego, para los elementos fr^i podemos calcular

$$r^j (fr^i) r^{-j} = fr^{i-2j}$$

y

$$(fr^j) (fr^i) (fr^j)^{-1} = fr^j fr^i r^{-j} f = fr^j fr^{i-j} f = fr^j r^{j-i} = fr^{2j-i}.$$

De esto resulta que la clase de conjugación de fr^i es precisamente

$$\{fr^{i-2j} \mid j \in \mathbb{Z}\}.$$

- Si n es impar, entonces para i fijo los restos $i - 2j \pmod n$ para $j \in \mathbb{Z}$ son todos los restos módulo n . Podemos concluir que en este caso se tiene una sola clase de conjugación formada por las reflexiones:

$$\{f, fr, fr^2, fr^3, \dots, fr^{n-1}\}.$$

- Si n es par, se ve que fr^i es conjugado con $fr^{i'}$ si y solamente si los números i, i' tienen la misma paridad. En este caso las reflexiones forman dos clases diferentes:

$$\{f, fr^2, fr^4, \dots, fr^{n-2}\} \quad \text{y} \quad \{fr, fr^3, fr^5, \dots, fr^{n-1}\}.$$

Esto es la prueba general, pero la pregunta era sobre D_4 . Allí se podía primero notar que $Z(D_4) = \{\text{id}, r^2\}$, lo que ya nos da dos clases de conjugación

$$\{\text{id}\} \quad \text{y} \quad \{r^2\}$$

—véase la parte 2) del ejercicio anterior. Luego, $r^3 = r^{-1} = frf$, así que r y r^3 son conjugados. Los elementos fr^i cumplen $(fr^i)^2 = \text{id}$, mientras que $r^2 \neq \text{id}$, así que por la parte 3) del ejercicio anterior, ninguna de las reflexiones fr^i puede ser conjugada con r y r^3 . Podemos concluir que

$$\{r, r^3\}$$

es una clase de conjugación. Nos quedan cuatro reflexiones f, fr, fr^2, fr^3 , y un cálculo directo nos dice que $f \sim fr^2$ (por ejemplo, $frf(fr)^{-1} = fr(fr^{-1}f) = fr^2$) y $fr \sim fr^3$ (por ejemplo, $f(fr)f^{-1} = rf = fr^{-1} = fr^3$), y se puede ver que las reflexiones forman *dos* clases de conjugación

$$\{f, fr^2\}, \quad \{fr, fr^3\}$$

(por ejemplo, bastaría notar que conjugando a f por otros elementos, no se puede obtener fr o fr^3). Entonces, la respuesta es

$$\{\text{id}\}, \{r^2\}, \{r, r^3\}, \{f, fr^2\}, \{fr, fr^3\}.$$

■

Para los problemas 3, 4, 5 necesitamos la siguiente noción. Sea G un grupo. Para dos elementos $g, h \in G$ su **conmutador** es el elemento dado por $[g, h] := ghg^{-1}h^{-1}$.

Problema 3 (2 puntos). Consideremos el grupo diédrico $D_n = \{\text{id}, r, r^2, \dots, r^{n-1}, f, fr, fr^2, \dots, fr^{n-1}\}$. Demuestre que para cualesquiera $g, h \in D_n$ se tiene $[g, h] = r^{2i}$ para algún $i \in \mathbb{Z}$, y de hecho todo elemento $r^{2i} \in D_n$ puede ser expresado como un conmutador.

Solución. Primero,

$$[r^i, r^j] = r^i r^j r^{-i} r^{-j} = \text{id}.$$

Ahora

$$[fr^i, fr^j] = fr^i fr^j (fr^i)^{-1} (fr^j)^{-1} = \underbrace{fr^i f}_{r^{-i}} r^j r^{-i} \underbrace{fr^j f}_{r^j} = r^{2(j-i)}.$$

Luego,

$$[fr^i, r^j] = fr^i r^j (fr^i)^{-1} r^{-j} = fr^i r^j r^{-i} f r^{-j} = fr^i r^j r^{-i} r^j f = fr^{2j} f = r^{-2j}$$

y

$$[r^i, fr^j] = [fr^j, r^i]^{-1} = (r^{-2i})^{-1} = r^{2i}.$$

■

Problema 4 (1 punto). Demuestre que para cualesquiera $\sigma, \tau \in S_n$ se cumple $[\sigma, \tau] \in A_n$.

Solución. Usando el hecho de que $\text{sgn}(\sigma^{-1}) = \text{sgn}(\sigma)$ y $\text{sgn}(\sigma\tau) = \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\tau)$ para cualesquiera $\sigma, \tau \in S_n$, se obtiene

$$\text{sgn}[\sigma, \tau] = \text{sgn}(\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}) = \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\tau) \text{sgn}(\sigma^{-1}) \text{sgn}(\tau^{-1}) = \text{sgn}(\sigma)^2 \text{sgn}(\tau)^2 = +1.$$

■

Problema 5 (2 puntos).

- 1) Fijemos un número natural $n \geq 3$. En el grupo simétrico S_n calcule los conmutadores $[(1\ 2), (1\ i)]$ para $i \geq 3$. Deduzca que todo elemento del grupo alternante A_n es un producto de conmutadores $[\sigma, \tau]$ donde $\sigma, \tau \in S_n$.
- 2) Fijemos un número natural $n \geq 5$. En el grupo alternante A_n calcule los conmutadores $[(1\ 2\ 4), (1\ 3\ 5)], [(1\ 2\ 3), (1\ 4\ 5)],$ y $[(1\ 2\ 3), (1\ i\ 4)]$ para $i \geq 5$. Deduzca que todo elemento de A_n es un producto de conmutadores $[\sigma, \tau]$ donde $\sigma, \tau \in A_n$.

Indicación. Haga los cálculos de conmutadores y luego recuerde la tarea 1.

Solución. En 1) tenemos

$$[(1\ 2), (1\ i)] = (1\ 2)(1\ i)(1\ 2)(1\ i) = (1\ 2\ i),$$

y todo elemento de A_n es un producto de 3-ciclos de esta forma. De la misma manera, en 2) calculamos

$$\begin{aligned} [(1\ 2\ 4), (1\ 3\ 5)] &= (1\ 2\ 4)(1\ 3\ 5)(1\ 4\ 2)(1\ 5\ 3) = (1\ 2\ 3), \\ [(1\ 2\ 3), (1\ 4\ 5)] &= (1\ 2\ 3)(1\ 4\ 5)(1\ 3\ 2)(1\ 5\ 4) = (1\ 2\ 4), \\ [(1\ 2\ 3), (1\ i\ 4)] &= (1\ 2\ 3)(1\ i\ 4)(1\ 3\ 2)(1\ 4\ i) = (1\ 2\ i). \end{aligned}$$

■

Problema 6 (2 puntos). Consideremos el plano \mathbb{R}^2 con la distancia euclidiana d . Una **isometría** de \mathbb{R}^2 es una aplicación $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que satisface $d(f(\underline{a}), f(\underline{b})) = d(\underline{a}, \underline{b})$ para cualesquiera $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^2$. Demuestre que las isometrías de \mathbb{R}^2 forman un grupo respecto a la composición. ¿Es abeliano?

Indicación. Se puede asumir el siguiente resultado: toda isometría del plano es una composición de traslaciones, rotaciones y reflexiones. Demuestre que las isometrías forman un subgrupo del grupo de biyecciones $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Solución. Primero, notamos que si f, g son isometrías, entonces $g \circ f$ es también una isometría: para cualesquiera $\underline{a}, \underline{b}$ tenemos

$$d(g(f(\underline{a})), g(f(\underline{b}))) = d(f(\underline{a}), f(\underline{b})) = d(\underline{a}, \underline{b}).$$

La aplicación identidad id es obviamente una isometría y es neutra respecto a la composición. Nos queda ver que toda isometría f posee una aplicación inversa f^{-1} que es también una isometría. Esto no es tan fácil, pero una vez sabemos que f es una composición de traslaciones, rotaciones y reflexiones, es suficiente notar que todas estas aplicaciones tienen inversas que son evidentemente isometrías. Entonces, las isometrías del plano forman un grupo. Por supuesto, no es abeliano: este tiene como sus subgrupos los grupos diédricos D_n . ■