Álgebra I. Examen corto 1
Universidad de El Salvador, 08/03/2019

Ejercicio 1 (2 puntos). *Sean X e Y conjuntos finitos.*

1) *¿Cuántas aplicaciones distintas $X \to Y$ hay?*

2) *¿Cuántas biyecciones distintas $X \to X$ hay?*

Justifique sus respuestas.

Ejercicio 2 (2 puntos). *Sean X un conjunto que tiene más de un elemento y $f\colon X \to Y$, $g\colon X \to Z$ dos aplicaciones biyectivas. Consideremos la aplicación*

$$\begin{aligned} \phi\colon X &\to Y \times Z, \\ x &\mapsto (f(x), g(x)). \end{aligned}$$

1) *¿Es ϕ inyectiva?*

2) *¿Es ϕ sobreyectiva?*

Justifique sus respuestas.

Ejercicio 3 (2 puntos). *Consideremos las expresiones $x + y\epsilon$, donde $x, y \in \mathbb{R}$, respecto a la suma y producto*

$$\begin{aligned} (x_1 + y_1\epsilon) + (x_2 + y_2\epsilon) &:= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\,\epsilon, \\ (x_1 + y_1\epsilon) \cdot (x_2 + y_2\epsilon) &:= x_1 x_2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)\,\epsilon. \end{aligned}$$

1) *Demuestre que de esta manera se obtiene un anillo conmutativo.*

2) *¿Es un dominio? (Justifique su respuesta.)*

3) *Determine cuándo un elemento $x + y\epsilon$ es invertible y encuentre la fórmula para su inverso.*

Ejercicio 4 (2 puntos). *Consideremos el conjunto*

$$\mathbb{Z}[\zeta_5] := \{a_0 + a_1\,\zeta_5 + a_2\,\zeta_5^2 + a_3\,\zeta_5^3 \mid a_i \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C},$$

donde $\zeta_5 := e^{2\pi i/5}$.

1) *Demuestre que $\mathbb{Z}[\zeta_5]$ es un subanillo de $\mathbb{C}$.*

2) *Calcule $(1 + \zeta_5^3)^3$ y $(1 + \zeta_5^3)^{-1}$ en $\mathbb{Z}[\zeta_5]$.*

Ejercicio 5 (2 puntos). *Demuestre que en el anillo de las series formales $\mathbb{Q}[\![X]\!]$ para cualquier $n = 1, 2, 3, \ldots$ se cumple la identidad*

$$\Bigl(\sum_{i \geq 0} \frac{X^i}{i!}\Bigr)^n = \sum_{i \geq 0} \frac{n^i}{i!}\, X^i.$$