

Álgebra I. Hoja de ejercicios 2: Anillos

Universidad de El Salvador, ciclo impar 2019

Por cualquier pregunta, no duden en escribir al grupo ues-algebra-2019@googlegroups.com.

Ejercicio 1. Demuestre las identidades trigonométricas

$$\sin(\phi + \psi) = \sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \psi, \quad \cos(\phi + \psi) = \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \sin \psi$$

usando la identidad de Euler para los números complejos.

Ejercicio 2. Sea $n = 2, 3, 4, \dots$ un número fijo y $\zeta_n := e^{2\pi i/n}$.

1) Para un polinomio complejo $f = a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$ de grado $< n$ demuestre que

$$\frac{1}{n} \sum_{0 \leq k \leq n-1} f(\zeta_n^k) = a_0.$$

2) Demuestre que $\prod_{1 \leq k \leq n-1} (1 - \zeta_n^k) = n$.

Ejercicio 3. Sea X un conjunto y 2^X el conjunto de los subconjuntos de X . Demuestre que 2^X es un anillo conmutativo de característica 2 respecto a la suma $A \Delta B$ (diferencia simétrica) y producto $A \cap B$ (intersección).

Ejercicio 4 (Los números duales). Inmitando la definición de los números complejos, consideremos las expresiones $x + y\epsilon$, donde $x, y \in \mathbb{R}$, respecto a la suma y producto

$$\begin{aligned}(x_1 + y_1\epsilon) + (x_2 + y_2\epsilon) &:= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\epsilon, \\ (x_1 + y_1\epsilon) \cdot (x_2 + y_2\epsilon) &:= x_1x_2 + (x_1y_2 + x_2y_1)\epsilon.\end{aligned}$$

- 1) Demuestre que de esta manera se obtiene un anillo conmutativo.
- 2) Demuestre que no es un dominio.
- 3) Determine cuándo un elemento $x + y\epsilon$ es invertible y encuentre la fórmula para su inverso.

Ejercicio 5 (Cuaterniones). Denotemos por $u \cdot v$ y $u \times v$ el producto escalar y producto cruz sobre \mathbb{R}^3 respectivamente.

1) Demuestre que en general, $(u \times v) \times w \neq u \times (v \times w)$, pero se cumple la **identidad de Jacobi**

$$u \times (v \times w) + v \times (w \times u) + w \times (u \times v) = 0.$$

2) Identifiquemos los elementos de \mathbb{R}^4 con pares (a, u) , donde $a \in \mathbb{R}$ y $u \in \mathbb{R}^3$. Demuestre que \mathbb{R}^4 forma un anillo no conmutativo respecto a las operaciones

$$(a, u) + (b, v) := (a + b, u + v), \quad (a, u) \cdot (b, v) := (ab - u \cdot v, av + bu + u \times v).$$

Este se llama el **anillo de cuaterniones** y se denota por \mathbb{H} .

3) Demuestre que todo elemento no nulo en \mathbb{H} es invertible.

Sugerencia: defina $\overline{(a, u)} := (a, -u)$ y calcule $(a, u) \cdot \overline{(a, u)}$.

Ejercicio 6 (Enteros ciclotómicos). Para un número primo p consideremos el conjunto

$$\mathbb{Z}[\zeta_p] := \{a_0 + a_1 \zeta_p + a_2 \zeta_p^2 + \cdots + a_{p-2} \zeta_p^{p-2} \mid a_i \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}.$$

- 1) Demuestre que $\mathbb{Z}[\zeta_p]$ es un subanillo de \mathbb{C} .
- 2) Calcule $(1 + \zeta_5^3)^2$, $(1 + \zeta_5^3)^3$, $(1 + \zeta_5^3)^{-1}$ en $\mathbb{Z}[\zeta_5]$.

Ejercicio 7. Para un número fijo $n = 1, 2, 3, \dots$ consideremos el conjunto de fracciones con potencias de n en el denominador:

$$\mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right] := \left\{ \frac{m}{n^k} \mid m \in \mathbb{Z}, k = 0, 1, 2, 3, \dots \right\} \subset \mathbb{Q}.$$

De modo similar, para un número primo fijo $p = 2, 3, 5, 7, 11, \dots$ consideremos las fracciones con denominador no divisible por p :

$$\mathbb{Z}_{(p)} := \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0, p \nmid b \right\} \subset \mathbb{Q}.$$

Verifique que $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$ y $\mathbb{Z}_{(p)}$ son subanillos de \mathbb{Q} .

Ejercicio 8. Sea A un anillo y $A_i \subseteq A$ una familia de subanillos. Demuestre que $\bigcap_i A_i$ es un subanillo de A .

Ejercicio 9 (Series formales de potencias). Sea A un anillo conmutativo. Una **serie formal de potencias** con coeficientes en A en una variable X es una suma formal

$$f(X) = \sum_{i \geq 0} a_i X^i,$$

donde $a_i \in A$. A diferencia de polinomios, se puede tener un número infinito de coeficientes no nulos. Las sumas y productos de series formales están definidos por

$$\sum_{i \geq 0} a_i X^i + \sum_{i \geq 0} b_i X^i := \sum_{i \geq 0} (a_i + b_i) X^i, \quad \left(\sum_{i \geq 0} a_i X^i \right) \cdot \left(\sum_{i \geq 0} b_i X^i \right) := \sum_{k \geq 0} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) X^k.$$

- 1) Demuestre que las series formales forman un anillo conmutativo. Este se denota por $A[[X]]$.
- 2) Demuestre que $A[X]$ es un subanillo de $A[[X]]$.
- 3) Demuestre que si A es un dominio, entonces $A[[X]]$ es también un dominio.

Sugerencia: para dos series no nulas $f(X), g(X) \in A[[X]]$, sean a_m y b_n el primer coeficiente no nulo de $f(X)$ y $g(X)$ respectivamente:

$$f(X) = a_m X^m + a_{m+1} X^{m+1} + \cdots, \quad g(X) = b_n X^n + b_{n+1} X^{n+1} + \cdots$$

Analice los coeficientes del producto $f(X)g(X)$.

- 4) Verifique la identidad

$$(1 + X) \cdot (1 - X + X^2 - X^3 + X^4 - X^5 + \cdots) = 1$$

en el anillo de series formales $A[[X]]$.

- 5) Verifique la identidad $\left(\sum_{i \geq 0} \frac{X^i}{i!} \right)^n = \sum_{i \geq 0} \frac{n^i}{i!} X^i$ en el anillo de series formales $\mathbb{Q}[[X]]$.

Ejercicio 10. En el anillo de matrices de 2×2 , para

$$e_{12} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{21} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

calcule las matrices

$$(e_{12} e_{21})^2, \quad e_{12}^2 e_{21}^2, \quad (e_{12} + e_{21})^2, \quad e_{12}^2 + 2 e_{12} e_{21} + e_{21}^2.$$