Álgebra I. Hoja de ejercicios 3: Anillos (continuación)
Universidad de El Salvador, ciclo impar 2019

Por cualquier pregunta, no duden en escribir al grupo ues-algebra-2019@googlegroups.com.

Ejercicio 1.

1) Sean A un anillo conmutativo y $x, y \in A$ dos nilpotentes. Demuestre que $x + y$ es también nilpotente.
   Sugerencia: calcule $(x + y)^n$ usando el teorema del binomio.

2) En el anillo de matrices $M_2(A)$ encuentre $a, b \in M_2(A)$ tales que a y b son nilpotentes, pero $a + b$ no es nilpotente.

Ejercicio 2. Sea A un anillo. Demuestre que si $x \in A$ es nilpotente, entonces $1 \pm x$ es invertible en A.
Sugerencia: revise la fórmula para la serie geométrica $\sum_{k \geq 0} x^k$.

Ejercicio 3. Consideremos las matrices con coeficientes en cualquier anillo conmutativo A.

1) Demuestre que las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   son nilpotentes.

2) En general, demuestre que toda **matriz triangular superior estricta** de $n \times n$; es decir $a \in M_n(A)$ con $a_{ij} = 0$ para $i \geq j$ (la diagonal es también nula) es nilpotente.

Ejercicio 4. Sea $a \in M_n(A)$ una matriz triangular superior estricta. Demuestre que

$$(1 - a)^{-1} = 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{n-1}.$$

Ejercicio 5. Sea A un dominio.

1) Demuestre que para todo $a \neq 0$ la aplicación

$$\mu_a \colon A \to A, \quad x \mapsto ax$$

   es inyectiva.

2) Demuestre que si A es un dominio finito, entonces la aplicación $x \mapsto ax$ es biyectiva.

3) Deduzca de lo anterior que todo dominio finito es un cuerpo.

Ejercicio 6. Sean L un cuerpo y $K \subseteq L$ un subcuerpo. Demuestre que L es un espacio vectorial sobre K.

Ejercicio 7.

1) Calcule la dimensión del espacio vectorial

   a) $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$,

   b) $\mathbb{Q}(\sqrt{n})$ sobre $\mathbb{Q}$, donde $n \neq 1$ es libre de cuadrados.

2) Demuestre que $\mathbb{R}$ tiene dimensión infinita sobre $\mathbb{Q}$.

   Sugerencia: recuerde que $\mathbb{R}$ no es un conjunto numerable.

Ejercicio 8. Sean A un dominio y $\operatorname{Frac} A$ su cuerpo de fracciones. Demuestre explícitamente todos los axiomas de anillos (anillos conmutativos, cuerpos) para $\operatorname{Frac} A$.

Ejercicio 9.

1) En el anillo de las series formales $\mathbb{Z}[\![X]\!]$ demuestre que los siguientes elementos son invertibes y encuentre sus inversos:
$$f(X) = X^2 - 2X + 1, \quad g(X) = 1 - X - X^2.$$

2) Generalizando estos cálculos, demuestre que una serie formal es invertible si y solo si su término constante es invertible:
$$A[\![X]\!]^\times = \Big\{ \sum_{i \geq 0} a_i\, X^i \;\Big|\; a_0 \in A^\times \Big\}.$$

Ejercicio 10. Sea k un cuerpo. Una **serie de Laurent** es una serie formal que puede tener un número finito de términos $a_i\, X^i$ con $i < 0$:

$$f(X) = \sum_{i \geq -k} a_i\, X^i = a_{-k}\, X^{-k} + a_{-k+1}\, X^{-k+1} + \cdots + a_{-1}\, X^{-1} + a_0 + a_1\, X + a_2\, X^2 + a_3\, X^3 + \cdots,$$

donde $a_i \in k$. Demuestre que las series de Laurent forman un cuerpo. Este se denota por $k(\!(X)\!)$.