# Álgebra I. Hoja de ejercicios 4: Polinomios
# Universidad de El Salvador, ciclo impar 2019

Por cualquier pregunta, no duden en escribir al grupo ues-algebra-2019@googlegroups.com.

**Ejercicio 1.** Para una serie de potencias $f = \sum_{i\ge 0} a_i\, X^i \in A[\![X]\!]$ la noción de grado no existe, pero se puede considerar el mínimo índice tal que el coeficiente correspondiente no es nulo:

$$v(f) := \text{mín}\{i \mid a_i \ne 0\}, \quad v(0) := +\infty.$$

Demuestre que para cualesquiera $f, g \in A[\![X]\!]$ se cumplen las desigualdades

$$v(fg) \ge v(f) + v(g), \quad v(f+g) \ge \text{mín}\{v(f), v(g)\},$$

y la igualdad $v(fg) = v(f) + v(g)$ si $A$ es un dominio.

**Ejercicio 2.**

1) Sea $f \in \mathbb{R}[X]$ un polinomio real. Demuestre que si $z \in \mathbb{C}$ es una raíz compleja de $f$, entonces $\bar{z}$ es también una raíz.

2) Deduzca que un polinomio real de grado impar debe tener por lo menos una raíz real.

3*) Demuéstrelo usando el análisis real, sin recurrir al teorema fundamental del álgebra.

**Ejercicio 3.** Demuestre que si $m > 1$ es impar, entonces $\Phi_{2m}(X) = \Phi_m(-X)$.
Sugerencia: compare las expresiones

$$\prod_{d\mid 2m} \Phi_d(X) = X^{2m} - 1 = (X^m - 1)\,(X^m + 1) = -(X^m - 1)\,((-X)^m - 1) = -\prod_{d\mid m} \Phi_d(X)\,\Phi_d(-X)$$

usando la inducción sobre $m$.

**Ejercicio 4.** Encuentre los coeficientes de los polinomios ciclotómicos $\Phi_n$ para $n = 10, 11, \ldots, 20$.

**Ejercicio 5** (Determinante de Vandermonde)**.** Sea $k$ un cuerpo y $x_0, \ldots, x_n \in k$. Demuestre que

$$V(x_0, x_1, \ldots, x_n) := \det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & x_{n-1}^n \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{pmatrix} = \prod_{0\le i<j\le n} (x_j - x_i).$$

**Ejercicio 6** (Interpolación polinomial)**.** Sea $k$ un cuerpo. Consideremos $n$ puntos $(x_i, y_i) \in k^2$, donde $i = 0, \ldots, n$ y $x_i \ne x_j$ para $i \ne j$. Usando el ejercicio anterior, demuestre que existe un polinomio único

$$f = a_n\, X^n + a_{n-1}\, X^{n-1} + \cdots + a_1\, X + a_0 \in k[X]$$

de grado $\le n$ tal que $f(x_i) = y_i$ para todo $i$. (Use el ejercicio anterior.)

**Ejercicio 7.** Consideremos el polinomio $f = X^n - 1 \in \mathbb{F}_p[X]$. Demuestre que $f$ no tiene raíces múltiples si y solo si $p \nmid n$.

**Ejercicio 8.** Sea $A$ un anillo conmutativo. Para una serie de potencias $f = \sum_{n\geq 0} a_n\, X^n \in A[\![X]\!]$ definamos su **derivada formal** como la serie

$$f' := \sum_{n\geq 1} n\, a_n\, X^{n-1}.$$

1) Demuestre que para cualesquiera $f, g \in A[\![X]\!]$ se cumple

$$(f+g)' = f' + g', \quad (f\,g)' = f'\,g + f\,g'.$$

2) Calcule las derivadas de las siguientes series formales en $\mathbb{Q}[\![X]\!]$:

$$\exp(X) := \sum_{n\geq 0} \frac{X^n}{n!}, \quad \log(1+X) := \sum_{n\geq 0} (-1)^{n+1}\,\frac{X^n}{n},$$
$$\operatorname{sen}(X) := \sum_{n\geq 0} (-1)^n\, \frac{X^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos(X) := \sum_{n\geq 0} (-1)^n\, \frac{X^{2n}}{(2n)!}.$$

**Ejercicio 9** (Serie de Taylor)**.** Demuestre que si $\mathbb{Q} \subseteq A$, entonces para $f \in A[\![X]\!]$ se cumple

$$f = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, X^n,$$

donde $f^{(0)} := f$ y $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$ para $n \geq 1$.

**Ejercicio 10.** Si $\mathbb{Q} \subseteq A$, definamos las **integrales formales** por

$$\int_0^X \left(\sum_{n\geq 0} a_n\, X^n\right) dX := \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1}\, X^{n+1}.$$

1) Demuestre que se cumple el **teorema fundamental del cálculo**:

$$\int_0^X f'(X)\, dX = f(X) - f(0) \quad \text{y} \quad \left(\int_0^X f(X)\, dX\right)' = f(X),$$

donde $f(0)$ denota el término constante de $f$.

2) Demuestre que se cumple la **integración por partes**:

$$f(X)\, g(X) - f(0)\, g(0) = \int_0^X f(X)\, g'(X)\, dX + \int_0^X f'(X)\, g(X)\, dX.$$

3) Calcule las series

$$\int_0^X \exp(X)\, dX, \ \int_0^X \log(1+X)\, dX, \ \int_0^X X\, \exp(X)\, dX.$$