

Cuadrados mágicos y matrices de permutación

Alexey Beshenov (cadadr@gmail.com)

13 de agosto de 2016

Estos son mis apuntes para una pequeña presentación para los alumnos del Programa Jóvenes Talento de la Universidad de El Salvador.

Un **cuadrado mágico** es una tabla de $n \times n$ llenada con números naturales arbitrarios (posiblemente 0) tal que las sumas de filas y columnas son iguales al mismo número m . Por ejemplo:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

$$15 = 4 + 9 + 2 = 3 + 5 + 7 = 8 + 1 + 6 \quad (\text{sumas de filas})$$

$$= 4 + 3 + 8 = 9 + 5 + 1 = 2 + 7 + 6 \quad (\text{sumas de columnas})$$

Notemos que si $m = 1$, entonces en cada cuadrado mágico de $n \times n$ con suma 1, los elementos de cada fila y cada columna deben ser 0, excepto uno, que debe ser igual a 1. Cuadrados de esta forma son conocidos como **matrices de permutación**.

Por ejemplo, para $n = 2$ tenemos 2 posibilidades, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, y para $n = 3$ tenemos 6 posibilidades:

0	0	1
0	1	0
1	0	0

0	0	1
1	0	0
0	1	0

0	1	0
0	0	1
1	0	0

0	1	0
1	0	0
0	0	1

1	0	0
0	0	1
0	1	0

1	0	0
0	1	0
0	0	1

Ejercicio. Demuestre que hay $n!$ matrices de permutación de $n \times n$.

Hay una biyección

$$\text{matrices de permutación de } n \times n \longleftrightarrow S_n := \{\text{permutaciones de } n \text{ elementos}\}.$$

Entonces a cada permutación $\sigma \in S_n$ corresponde una matriz de permutación P_σ .

Cuando tenemos dos tablas de $n \times n$, tiene sentido tomar su suma o diferencia (elemento por elemento, por ejemplo $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$) o multiplicar por algún número (por ejemplo, $2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$).

Hoy deseo demostrar la siguiente propiedad curiosa:

Teorema. Cada cuadrado mágico es una suma de matrices de permutación.

Aquí hay un ejemplo de esta descomposición:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En general, esta expresión no es única. Por ejemplo, el cuadrado

4	9	2
3	5	7
8	1	6

 tiene dos descomposiciones diferentes:

$$\begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + 7 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 4 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 6 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio. Demuestre que la suma de matrices de permutación es siempre mágica. (Es la implicación fácil del teorema.)

Por ciertas razones (que voy a explicar en otra lección), es útil normalizar cada cuadrado mágico: si su suma es m , dividimos sus elementos por m . Luego, tenemos una tabla donde suma de fila y cada columna es 1. Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix} = 15 \cdot \begin{bmatrix} 4/15 & 3/5 & 2/15 \\ 1/5 & 1/3 & 7/15 \\ 8/15 & 1/15 & 2/5 \end{bmatrix}$$

Una tabla que satisface esta condición se llama **matriz doblemente estocástica**. En particular, cada matriz de permutación es doblemente estocástica. Se ve que nuestro teorema es una consecuencia del siguiente:

Teorema de Birkhoff–von Neumann. Cada matriz doblemente estocástica A puede ser escrita como una combinación de matrices de permutación P_σ con coeficientes $\lambda_\sigma \geq 0$ tales que $\sum_{\sigma \in S_n} \lambda_\sigma = 1$:

$$A = \sum_{\sigma \in S_n} \lambda_\sigma P_\sigma \quad \text{para algunos coeficientes } \lambda_\sigma \geq 0 \text{ y } \sum_{\sigma \in S_n} \lambda_\sigma = 1.$$

En general, una suma $\sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i x_i$ con coeficientes no negativos $\lambda_i \geq 0$ tales que $\sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i = 1$ se llama una **combinación convexa** de x_1, \dots, x_n .

Ejercicio. Si A_1, \dots, A_n son matrices doblemente estocásticas, entonces cada combinación convexa $\sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i A_i$, donde $\lambda_i \geq 0$ y $\sum_i \lambda_i = 1$, es también doblemente estocástica. En particular, combinaciones convexas de matrices de permutación son matrices doblemente estocásticas.

La parte difícil es de ver que para cada matriz doblemente estocástica A se puede encontrar matrices de permutación P_σ y coeficientes apropiados $\lambda_\sigma \geq 0$, $\sum_\sigma \lambda_\sigma = 1$, de tal manera que $A = \sum_\sigma \lambda_\sigma P_\sigma$. Este va a ser nuestro objetivo de hoy. Primero veamos que es suficiente de demostrar el

Lema clave. Sea $A = [x_{ij}]$ una matriz doblemente estocástica. Entonces existe una matriz de permutación $P = [p_{ij}]$ tal que $p_{ij} = 1 \Rightarrow x_{ij} \neq 0$.

Veamos que este resultado es suficiente para demostrar el teorema de Birkhoff–von Neumann. Si para una matriz doblemente estocástica A tenemos tal matriz de permutación P , consideramos

$$\lambda := \min_{1 \leq i, j \leq n} \{x_{ij} \mid p_{ij} \neq 0\}.$$

Notamos que es un número positivo. Sean p, q índices tales que $\lambda = x_{pq}$. Si $\lambda = 1$, entonces A es una matriz de permutación y la afirmación del teorema es trivial. Si $\lambda \neq 1$, consideramos la matriz doblemente estocástica

$$A' := \frac{1}{1 - \lambda} (A - \lambda P).$$

Tenemos la combinación convexa

$$A = (1 - \lambda) A' + \lambda P,$$

donde P es una matriz de permutación y A' es una matriz doblemente estocástica y observamos que $x'_{pq} = 0$ porque $x_{pq} = \lambda$, entonces A' tiene un coeficiente nulo más que A . Esto significa que podemos aplicar el mismo procedimiento a A' y el proceso se termina en cierto punto porque cada vez la matriz A' va a tener más ceros. ■

Por ejemplo, consideremos la matriz $\begin{pmatrix} 1/5 & 4/5 & 0 \\ 2/5 & 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}$. Según la demostración de arriba, para escri-

birla como una combinación convexa de matrices de permutación, tenemos que escoger una matriz de permutación cuyos coeficientes no nulos corresponden a coeficientes no nulos en nuestra matriz. El lema (que todavía no hemos demostrado) nos dice que es siempre posible. Tomemos por ejemplo $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Tenemos la combinación convexa

$$\begin{pmatrix} 1/5 & 4/5 & 0 \\ 2/5 & 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix} = \frac{4}{5} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De la misma manera, para la primera matriz de la suma se obtiene una descomposición convexa

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$\begin{pmatrix} 1/5 & 4/5 & 0 \\ 2/5 & 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix} = \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Demostración del lema clave

Nuestro lema sobre matrices de permutación se demuestra usando un famoso resultado combinatorio.

Les recuerdo que un **grafo bipartito** $G = (V, E)$ es un grafo tal que su conjunto de vértices es una unión disjunta $V = X \sqcup Y$ tal que todas las aristas son de la forma (x, y) donde $x \in X$ y $y \in Y$.

Para un subconjunto $W \subset V$ su **entorno** $N_G(W)$ es el conjunto de los vértices adyacentes a los vértices de W :

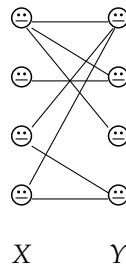
$$N_G(W) := \{v \in V \mid (u, v) \in E \text{ para algún } u \in W\}.$$

Teorema del matrimonio. Sea $G = (X \sqcup Y, E)$ un grafo bipartito con $|X| = |Y|$. Supongamos que

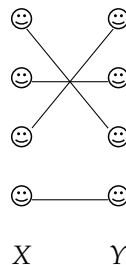
$$|N_G(W)| \geq |W| \quad \text{para cada } W \subset X.$$

Entonces existe un **emparejamiento perfecto**, es decir una biyección $\phi: X \rightarrow Y$ tal que $(x, \phi(x)) \in E$ para cada $x \in X$.

Por ejemplo, si tenemos dos grupos de personas X e Y , ponemos una arista entre $x \in X$ e $y \in Y$ si x e y se gustan y quieren casarse.



El teorema de Hall dice que si a cada grupo de personas $W \subset X$ le gustan por lo menos $|W|$ personas del grupo Y , entonces todos del grupo X pueden casarse. En nuestro caso tenemos la siguiente solución:



No voy a recordar la demostración; voy a aplicar el teorema a nuestra situación. Para una matriz doblemente estocástica $A = [x_{ij}]$ consideramos el grafo bipartito cuyos vértices representan las filas y columnas:

$$V := F \sqcup C := \{f_1, \dots, f_n\} \sqcup \{c_1, \dots, c_n\}.$$

Las aristas corresponden a coeficientes no nulos en el grafo:

$$E := \{(f_i, c_j) \mid x_{ij} \neq 0\}.$$

Primero verifiquemos que este grafo satisface la condición $|N(I)| \geq |I|$ para cada $I \subset F$, es decir, si escogemos ℓ filas $I = \{f_{i_1}, \dots, f_{i_\ell}\}$, entonces hay por lo menos ℓ columnas diferentes con coeficientes no nulos en las intersecciones con I . En efecto, notamos que

$$\sum_{\substack{i \in I \\ j \in N(I)}} x_{ij} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in N(\{i\})} x_{ij} = \sum_{i \in I} \underbrace{\sum_{1 \leq j \leq n} x_{ij}}_{=1} = |I|,$$

porque la matriz es doblemente estocástica. De la misma manera, para cada $J \subset C$ tenemos

$$|J| = \sum_{\substack{j \in J \\ i \in N(J)}} x_{ij}$$

Para $I \subset F$ notamos que $I \subseteq N(N(I))$, y por lo tanto

$$|N(I)| = \sum_{\substack{j \in N(I) \\ i \in N(N(I))}} x_{ij} \geq \sum_{\substack{j \in N(I) \\ i \in I}} x_{ij} = |I|.$$

Entonces $|N(I)| \geq |I|$ y podemos aplicar el teorema del matrimonio para demostrar que existe un emparejamiento perfecto $M \subset E$. Consideramos la matriz $P = [p_{ij}]$ definida por

$$p_{ij} := \begin{cases} 1, & (f_i, c_j) \in M, \\ 0, & (f_i, c_j) \notin M. \end{cases}$$

Si M es un emparejamiento perfecto, entonces cada fila y cada columna de P tiene exactamente un coeficiente 1; es decir, P es una matriz de permutación. Si $x_{ij} = 0$, entonces por la definición del grafo, $(f_i, c_j) \notin E$ y $p_{ij} = 0$, como deseamos. ■