Geometría convexa y politopos, día 1

Alexey Beshenov (cadadr@gmail.com)

8 de agosto de 2016

Los objetos geométricos que nos interesan en esta historia son subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Voy a denotar los puntos de $\mathbb{R}^n$ por letras $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \ldots$ en negrita y las letras cursivas van a denotar las coordenadas, por ejemplo $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, donde $x_i \in \mathbb{R}$. (En la pizarra en lugar de "$\mathbf{x}$" será más fácil escribir "$\underline{x}$".)

Recordemos que $\mathbb{R}^n$ tiene estructura de espacio vectorial, afín, euclídeo, métrico, topológico, etc. Voy a denotar todas estas estructuras por el mismo símbolo $\mathbb{R}^n$. En particular, para cada punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tiene sentido la multiplicación por $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda\, \mathbf{x} := (\lambda\, x_1, \ldots, \lambda\, x_n),$$

y para cada pareja de puntos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ se tiene su suma

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$

Tenemos el producto escalar (definido positivo, simétrico, bilineal)

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

Voy a usar la notación

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}.$$

Recordemos la **desigualdad del triángulo**

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \le \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$$

y también la **desigualdad del triángulo inversa**

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \ge |\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\||$$

Esto define una estructura de espacio métrico con distancia $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$. En fin, tenemos la topología estándar sobre $\mathbb{R}^n$ que es inducida por esta distancia. Es decir, los subconjuntos abiertos son uniones arbitrarias o intersecciones finitas de las bolas abiertas

$$B(\mathbf{x}_0, \epsilon) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}\| < \epsilon\}$$

para $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $\epsilon > 0$.

Las letras X, Y van a denotar subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. La letra K va a denotar un subconjunto convexo (de la palabra "konvex" en alemán) y las letras P y Q van a denotar politopos y poliedros convexos.

1. Conjuntos convexos

1.1. Definición. Un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se llama un **subespacio afín** si se cumple una de las siguientes condiciones equivalentes:

1) para cada dos puntos diferentes $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in A$ la recta que pasa por $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$:

$$\{\mathbf{x}_1 + \lambda\,(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \{\lambda_1\,\mathbf{x}_1 + \lambda_2\,\mathbf{x}_2 \mid \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}$$

está también contenida en A,

2) A contiene todos los puntos de $\mathbb{R}^n$ **afínmente dependientes** de A. Se dice que $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es afínmente dependiente de A si $\mathbf{x}$ es una **combinación afín** de ciertos puntos $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in A$:

$$\mathbf{x} = \sum_{1 \le i \le k} \lambda_i\,\mathbf{x}_i \quad \text{para ciertos coeficientes } \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ tales que } \sum_i \lambda_i = 1.$$

De hecho, para $k = 2$ la condición 2) es la misma cosa que 1). Entonces 2) implica 1). Ahora sea A un subconjunto que satisface la condición 1). La condición 2) se demuestra por inducción sobre k: el caso $k = 1$ es trivial, y para $k \ge 2$, si tenemos un punto

$$\mathbf{x} = \sum_{1 \le i \le k} \lambda_i\,\mathbf{x}_i \quad \text{donde } \sum_i \lambda_i = 1 \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in A,$$

entonces sin pérdida de generalidad $\lambda_k \neq 1$ y $\lambda_1 + \cdots + \lambda_{k-1} \neq 0$, y

$$\mathbf{x} = (\lambda_1 + \cdots + \lambda_{k-1}) \left(\sum_{1 \le i \le k-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_{k-1}}\,\mathbf{x}_i \right) + \lambda_k\,\mathbf{x}_k,$$

lo cual significa que $\mathbf{x}$ pertenece a la recta que pasa por los puntos $\left(\sum_{1 \le i \le k-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_{k-1}}\,\mathbf{x}_i\right)$ y $\mathbf{x}_k$. ∎

1.2. Definición. Se dice que un subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ es **afínmente independiente** si X no contiene ningún punto $\mathbf{x} \in X$ que sea afínmente dependiente de $X \setminus \{\mathbf{x}\}$.

Notamos que la condición 2) de arriba no depende del origen de coordenadas $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$, y se ve fácilmente que $X \subset \mathbb{R}^n$ es afínmente independiente si y solamente si para diferentes puntos $\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_k \in X$ la relación

$$\sum_{0 \le i \le k} \alpha_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0} \quad \text{para } \sum_i \alpha_i = 0$$

implica que $\alpha_0 = \cdots = \alpha_k = 0$. Es decir, los vectores $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0$ son linealmente independientes.

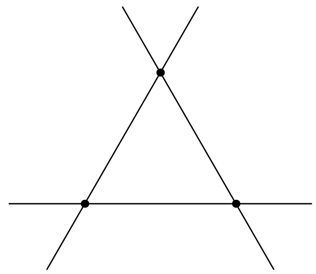
Mediante álgebra lineal básica se ve que cada subespacio afín $A \subset \mathbb{R}^n$ contiene un subconjunto afínmente independiente maximal $\{\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_d\}$, tal que A es el conjunto de todos los puntos de $\mathbb{R}^n$ afínmente dependientes de $\{\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_d\}$:

$$A = \{\sum_{0 \le i \le d} \lambda_i\,\mathbf{x}_i \mid \sum_i \lambda_i = 1\}.$$

1.3. Definición. El número d de arriba se llama la **dimensión** de A. Los números λ_i se llaman las **coordenadas baricéntricas** respecto a $\{\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_d\}$.

En otras palabras, se puede definir sobre A una estructura de $\mathbb{R}$-espacio vectorial (escogiendo como origen de coordenadas a $\mathbf{x}_0 \in A$), y la dimensión de este espacio vectorial es la dimensión de A. Los puntos $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_d\}$ definen una base particular de este espacio vectorial.

1.4. Ejemplo. La dimensión del plano $\mathbb{R}^2$ es 2 porque se puede encontrar 3 puntos $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ afínmente independientes (los vectores $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$ y $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0$ son linealmente independientes):



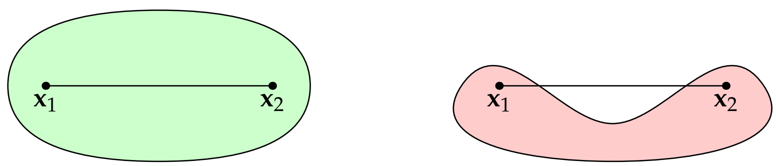
▲

1.5. Definición. Un subconjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ se llama **convexo** si se cumple una de las siguientes condiciones equivalentes:

1) para cualesquiera dos puntos diferentes $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in K$ el segmento de la recta entre $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$

$$[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2] := \{\mathbf{x}_1 + \lambda\,(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \mid 0 \le \lambda \le 1\} = \{\lambda_1\,\mathbf{x}_1 + \lambda_2\,\mathbf{x}_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \ge 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}$$

está también contenido en K,



convexo no convexo

2) K contiene todos los puntos de $\mathbb{R}^n$ **convexamente dependientes** de K. Se dice que $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es convexamente dependiente de K si $\mathbf{x}$ es una **combinación convexa** de algunos puntos $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in K$:

$$\mathbf{x} = \sum_{1 \le i \le k} \lambda_i\,\mathbf{x}_i \quad \text{para algunos coeficientes } \lambda_i \ge 0 \text{ tales que } \sum_i \lambda_i = 1.$$

Noten que la diferencia entre la definición de un subconjunto convexo y un subespacio afín es que para un conjunto convexo se pide que λ_i sean no negativos, y entonces la equivalencia de las condiciones 1) y 2) se demuestra de la misma manera. También notamos que cada subespacio afín de $\mathbb{R}^n$ es un ejemplo (poco interesante) de un conjunto convexo. El conjunto vacío $\emptyset$ es también convexo.

1.6. Observación. *Sean $K \subset \mathbb{R}^n$ y $L \subset \mathbb{R}^m$ dos conjuntos convexos y sea $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación afín. Entonces $f(K) \subset \mathbb{R}^m$ y $f^{-1}(L) \subset \mathbb{R}^n$ son también convexos.*

Demostración. Recordemos que una **aplicación afín** $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se caracteriza como una aplicación tal que para cada familia de puntos $\mathbf{x}_i$, para $\sum_i \lambda_i\,\mathbf{x}_i$ donde $\sum_i \lambda_i = 1$ se tiene $f(\sum_i \lambda_i\,\mathbf{x}_i) = \sum_i \lambda_i\,f(\mathbf{x}_i)$.

Si $f(\mathbf{x}_i) \in f(K)$, entonces para cualquier combinación convexa tenemos

$$\sum_i \lambda_i\,f(\mathbf{x}_i) = f(\underbrace{\sum_i \lambda_i\,\mathbf{x}_i}_{\in K}) \in f(K).$$

De modo similar, si $\mathbf{x}_i \in f^{-1}(L)$, es decir $f(\mathbf{x}_i) \in L$, entonces

$$f(\sum_i \lambda_i\,\mathbf{x}_i) = \sum_i \lambda_i\,f(\mathbf{x}_i) \in L,$$

es decir $\sum_i \lambda_i\,\mathbf{x}_i \in f^{-1}(L)$. ■

1.7. Ejercicio. *¿Cuáles son los subconjuntos convexos de $\mathbb{R}^1$? Digamos que dos subconjuntos X y Y son* ***diferentes*** *si uno no se trasforma en otro por una homotecia de razón positiva (una aplicación $x \mapsto \lambda\, x$ con $\lambda > 0$). ¿Cuáles son los subconjuntos convexos diferentes de $\mathbb{R}^1$?*

Aquí hay un par de ejemplos de conjuntos convexos que no son subespacios afines:

1.8. Ejemplo. Una bola en $\mathbb{R}^n$ (cerrada o abierta) es un conjunto convexo. Sin pérdida de generalidad, la bola está centrada en $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$. Sean $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ dos puntos en la bola de radio r, es decir $\|\mathbf{x}_1\| \le r$ y $\|\mathbf{x}_2\| \le r$. Sea $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \lambda\,(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) = (1-\lambda)\,\mathbf{x}_1 + \lambda\,\mathbf{x}_2$ para $0 \le \lambda \le 1$. Entonces por la desigualdad del triángulo

$$\|\mathbf{x}\| \le (1-\lambda)\,\|\mathbf{x}_1\| + \lambda\,\|\mathbf{x}_2\| \le r.$$

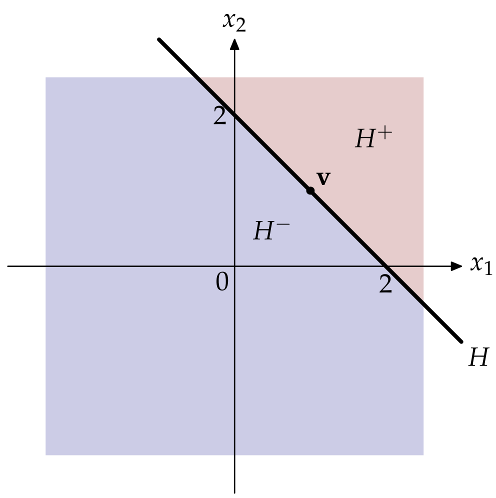
Para la bola abierta sustituyan "$\le$" por "$<$". ▲

1.9. Ejemplo. Sea $\mathbf{v} \ne \mathbf{0}$ un punto en $\mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ algún número fijo. Entonces el subconjunto

$$H := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle = \alpha\}$$

es un hiperplano que divide $\mathbb{R}^n$ en dos **semiespacios abiertos**

$$H^+ := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle > \alpha\},$$
$$H^- := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle < \alpha\}.$$



Ejemplo: $\mathbf{v} = (1,1)$, $\alpha = 2$, $H = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 = 2\}$.

H^+ y H^- son convexos. Por ejemplo, si $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in H^+$, entonces para cualquier $\lambda_1, \lambda_2 \ge 0$ tales que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ tenemos

$$\langle \lambda_1\,\mathbf{x}_1 + \lambda_2\,\mathbf{x}_2, \mathbf{v} \rangle = \lambda_1\,\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{v} \rangle + \lambda_2\,\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{v} \rangle > \alpha.$$

Si en lugar de las condiciones $>$ y $<$ se consideran $\ge$ y $\le$, entonces se tiene **semiespacios cerrados** correspondientes $\overline{H}^+$ y $\overline{H}^-$. ▲

1.10. Ejemplo. Sean $\mathbf{v}_0, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^{n+1}$ algunos puntos diferentes tales que $\{\mathbf{v}_0, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es afínmente independiente. Entonces el **símplice con vértices** $\mathbf{v}_0, \ldots, \mathbf{v}_n$ es el subconjunto de $\mathbb{R}^n$ definido por

$$S := \{\sum_{0 \le i \le n} \alpha_i\,\mathbf{v}_i \mid \sum_i \alpha_i = 1,\ \alpha_i \ge 0\}.$$

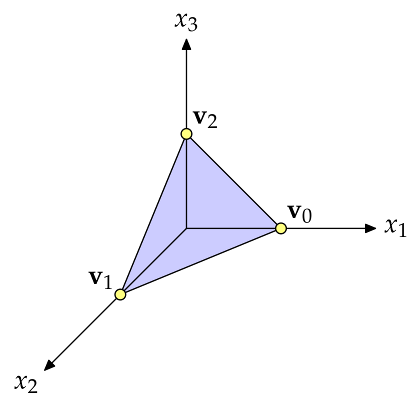
Se ve fácilmente que S es convexo. De hecho, si $\mathbf{x}_1 = \sum_{0\le i\le n} \alpha_i^{(1)}\,\mathbf{v}_i$ y $\mathbf{x}_2 = \sum_{0\le i\le n} \alpha_i^{(2)}\,\mathbf{v}_i$ son puntos de S (es decir, $\sum_i \alpha_i^{(1)} = \sum_i \alpha_i^{(2)} = 1$) y $\lambda_1, \lambda_2 \ge 0$ son algunos números positivos tales que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, entonces

$$\lambda_1\,\mathbf{x}_1 + \lambda_2\,\mathbf{x}_2 = \sum_{0\le i\le n} (\lambda_1\,\alpha_i^{(1)} + \lambda_2\,\alpha_i^{(2)})\,\mathbf{v}_i,$$

que es también un punto de S porque $\sum_i \lambda_1\,\alpha_i^{(1)} + \lambda_2\,\alpha_i^{(2)} = \lambda_1 \sum_i \alpha_i^{(1)} + \lambda_2 \sum_i \alpha_i^{(2)} = \lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

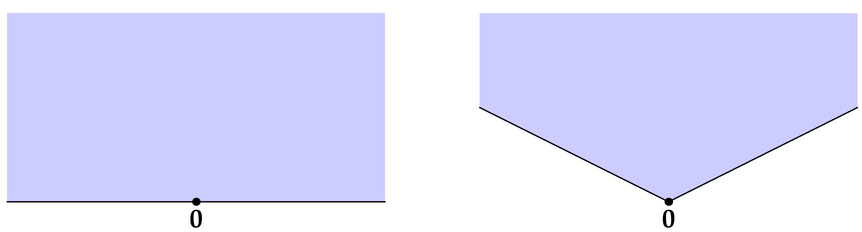
Normalmente en $\mathbb{R}^{n+1}$ se consideran los puntos $\mathbf{v}_0 = (1,0,\ldots,0)$, $\mathbf{v}_1 = (0,1,\ldots,0)$, …, $\mathbf{v}_n = (0,0,\ldots,1)$, y el conjunto correspondiente se llama el n-**símplice estándar**:

$$\Delta^n := \{(\alpha_0,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_i \alpha_i = 1,\ \alpha_i \ge 0\}.$$



▲

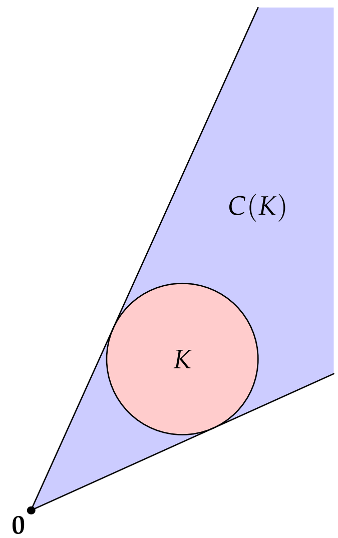
1.11. Ejemplo. Un subconjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ se llama un **cono** de vértice $\mathbf{0}$ si $\mathbf{0} \in C$ y para cada punto $\mathbf{x} \in C$ y cada $\lambda > 0$ también $\lambda\,\mathbf{x} \in C$. Notemos que C es convexo si y solamente si para cada $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$ tenemos $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in C$. En otras palabras, un cono convexo C es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ tal que $\mathbf{0} \in C$ y C es cerrado bajo combinaciones lineales positivas. En general, un cono de vértice $\mathbf{a}$ se obtiene por la traslación paralela de un cono de vértice $\mathbf{0}$. Un hiperplano es un caso particular de un cono.



Ahora si $X \subset \mathbb{R}^n$ es un subconjunto, entonces el conjunto

$$C(X) := \{\lambda\,\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in X,\ \lambda \ge 0\}$$

es el mínimo cono que contiene a X. Si $K \subset \mathbb{R}^n$ es convexo, entonces $C(K)$ es un cono convexo.



▲

Las siguientes propiedades son fáciles de demostrar y las dejo como un ejercicio:

1.12. Ejercicio. *1) Si $K \subset \mathbb{R}^n$ y $L \subset \mathbb{R}^m$ son conjuntos convexos, entonces $K \times L \subset \mathbb{R}^{n+m}$ es también convexo.*

2) Sea $\{K_\alpha\}$ una familia de conjuntos convexos en $\mathbb{R}^n$ (indexada por algún parámetro real α). Entonces su intersección $\bigcap_\alpha K_\alpha$ es también convexa.

3) La unión de conjuntos convexos $\bigcup_\alpha K_\alpha$ casi nunca es convexa. Sin embargo, si la familia $\{K_\alpha\}_\alpha$ satisface $\alpha \le \beta \Leftrightarrow K_\alpha \subseteq K_\beta$, entonces su unión es también convexa.

4) Para dos subconjuntos $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ su ***suma de Minkowski*** *es el subconjunto*

$$X + Y := \{\mathbf{x} + \mathbf{y} \mid \mathbf{x} \in X,\ \mathbf{y} \in Y\}.$$

Demuestre que si X y Y son convexos, entonces $X + Y$ es también convexo.

Hermann Minkowski (1864–1909) fue un matemático alemán de origen judío, conocido por sus contribuciones en geometría, teoría de números y física matemática.

Nació en el Imperio ruso, en el territorio actual de Lituania. Su familia se mudó a Königsberg en el 1872. Minkowski recibió su doctorado en Königsberg bajo la dirección de Ferdinand von Lindemann. Estudió formas cuadráticas y estableció la "geometría de los números". Minkowski trabajó en universidades de Bonn, Gotinga, Königsberg y Zürich. En Zürich fue uno de los profesores de Albert Einstein. Murió repentinamente a los 44 años de ruptura del apéndice.

Varios conceptos y resultados en matemáticas tienen su nombre, entre ellos la suma de Minkowski que hemos definido arriba y los teoremas sobre conjuntos convexos y retículos:

- Sea $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ un retículo (por ejemplo, $\Lambda = \mathbb{Z}^n$). Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo, simétrico respecto a $\mathbf{0}$ (es decir, si $\mathbf{x} \in K$, entonces $-\mathbf{x} \in K$). Si $\operatorname{vol} K > 2^n \cdot \det \Lambda$, entonces el **teorema de Minkowski** dice que K contiene un punto $\mathbf{x} \in \Lambda$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

- Sea $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ un retículo y sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo, simétrico respecto a $\mathbf{0}$, tal que $\operatorname{vol} K < \infty$. Entonces el **segundo teorema de Minkowski** da una estimación de $\operatorname{vol} K$:

  $$\frac{2^n}{n!} \det \Lambda \le \lambda_1 \cdots \lambda_n \operatorname{vol} K \le 2^n \det \Lambda,$$

  donde
  $$\lambda_i := \inf\{\lambda > 0 \mid \lambda K \text{ contiene } i \text{ vectores linealmente independientes de } \Lambda\}.$$

- **El teorema de Hasse–Minkowski**: si $F(X_1, \ldots, X_n) \in \mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_n]$ es una forma cuadrática (un polinomio homogéneo de grado 2 en n variables), entonces la ecuación $F(\mathbf{X}) = 0$ tiene una solución no trivial $\mathbf{x} \in \mathbb{Q}^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ si y solamente si $\overline{F}(\mathbf{X}) = 0$ tiene solución no trivial en cada compleción $\mathbb{Q}_p$ (incluso $\mathbb{Q}_\infty = \mathbb{R}$). La demostración del teorema de Hasse–Minkowski usa el teorema de Minkowski de arriba.

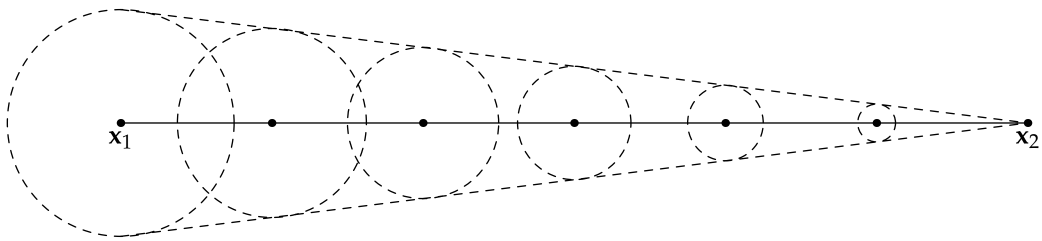
1.13. Observación. *Si $K \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo, entonces su **interior** y **clausura topológica***

$$\operatorname{int} K := \bigcup_{\substack{F \subseteq K \\ F \text{ abierto en } \mathbb{R}^n}} F = \{\mathbf{x} \in K \mid B(\mathbf{x}, \epsilon) \subset K \text{ para algún } \epsilon > 0\},$$
$$\overline{K} := \bigcap_{\substack{F \supseteq K \\ F \text{ cerrado en } \mathbb{R}^n}} F = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid B(\mathbf{x}, \epsilon) \cap K \neq \emptyset \text{ para cualquier } \epsilon > 0\}.$$

son también convexos.

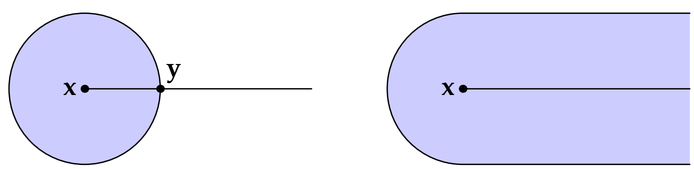
Demostración. Vamos a demostrar la parte sobre $\operatorname{int} K$. Sea $\mathbf{x}_1 \in \operatorname{int} K$. Entonces $B(\mathbf{x}_1, \epsilon) \subset K$ para algún $\epsilon > 0$. Luego, para cualquier punto $\mathbf{x}_2 \in K$ por la convexidad de K tenemos

$$\lambda_1 B(\mathbf{x}_1, \epsilon) + \lambda_2 \mathbf{x}_2 = B(\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2, \lambda_1 \epsilon) \subset K \quad \text{para } \lambda_1 > 0,\ \lambda_2 \geq 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$



En otras palabras, para cualquier $\mathbf{x}_1 \in \operatorname{int} K$ y $\mathbf{x}_2 \in K$ tenemos $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \subset \operatorname{int} K$. En particular, si $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \operatorname{int} K$, entonces $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2] \subset \operatorname{int} K$. ■

El argumento de arriba demuestra que los conjuntos convexos tienen la siguiente propiedad especial: si R es un rayo con origen en $\mathbf{x} \in \operatorname{int} K$, entonces R interseca la frontera $\operatorname{fr} K$ como mucho en un punto. Si $K \cap \operatorname{fr} K = \{\mathbf{y}\}$, entonces $[\mathbf{x}, \mathbf{y}) \subset \operatorname{int} K$ y $R \setminus [\mathbf{x}, \mathbf{y}] \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{K}$. Si K no es acotado, puede ser que $R \cap \operatorname{fr} K = \emptyset$, y en este caso $R \subset \operatorname{int} K$.



1.14. Ejercicio. *Termine la demostración del caso de $\overline{K}$.*

Noten que en general el interior $\operatorname{int} K$ de un conjunto convexo $K \subset \mathbb{R}^n$ puede ser vacío. Por ejemplo, si

$$S = \{ \sum_{0 \leq i \leq n} \alpha_i \mathbf{v}_i \mid \sum_{0 \leq i \leq n} \alpha_i = 1,\ \alpha_i \geq 0\}$$

es un símplice en $\mathbb{R}^{n+1}$, entonces S no contiene ningún subconjunto que sea abierto en $\mathbb{R}^{n+1}$, simplemente porque S pertenece al hiperplano

$$H = \{ \sum_{0 \leq i \leq n} \alpha_i \mathbf{v}_i \mid \sum_{0 \leq i \leq n} \alpha_i = 1\}.$$

Pero H es un espacio afín, de hecho el espacio afín mínimo que contiene a S, y el interior de S como subespacio topológico de H no es vacío, es dado por

$$\operatorname{intrel} S = \{ \sum_{0 \leq i \leq n} \alpha_i \mathbf{v}_i \mid \sum_i \alpha_i = 1,\ \alpha_i > 0\}.$$

Esto recibe el nombre de **interior relativo** (a H). La **frontera relativa** de S está dada por

$$S \setminus \operatorname{intrel} S = \bigcup_{0 \le i \le n} S_i,$$

donde S_i es el símplice con vértices $\{\mathbf{v}_0, \ldots, \mathbf{v}_n\} \setminus \{\mathbf{v}_i\}$, que se obtiene poniendo $\alpha_i = 0$.

1.15. Definición. Si $K \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo, entonces la **envolvente afín** de K es el conjunto

$$\operatorname{af} K := \bigcap_{\substack{A \supseteq K \\ A \text{ es un subespacio afín de } \mathbb{R}^n}} A.$$

La **dimensión** de K es la dimensión del espacio afín $\operatorname{af} K$.

Se ve que

$$\operatorname{af} K = \{ \sum_{0 \le i \le m} \lambda_i \, \mathbf{x}_i \mid \sum_{0 \le i \le m} \lambda_i = 1 \},$$

donde $\{\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_m\} \subset K$ es un conjunto maximal de puntos afínmente independientes y $m = \dim K$. La envolvente afín es interesante por la siguiente razón:

1.16. Observación. *Sea K un conjunto convexo no vacío. Entonces el interior de K como subconjunto de $\operatorname{af} K$ no es vacío. Este se llama el **interior relativo** y se denota por $\operatorname{intrel} K$.*

En particular, si $\operatorname{int} K = \emptyset$, entonces $\operatorname{af} K \subsetneq \mathbb{R}^n$ y K pertenece a algún hiperplano en $\mathbb{R}^n$.

Demostración. Si K no es vacio, entonces

$$\operatorname{af} K = \{ \sum_{0 \le i \le m} \lambda_i \, \mathbf{x}_i \mid \sum_{0 \le i \le m} \lambda_i = 1 \}$$

contiene el símplice

$$S = \{ \sum_{0 \le i \le m} \lambda_i \, \mathbf{x}_i \mid \sum_{0 \le i \le m} \lambda_i = 1, \ \lambda_i \ge 0 \},$$

con vértices en ciertos puntos $\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_m \in K$, y luego su **baricentro** $\frac{1}{m+1} \sum_{0 \le i \le m} \mathbf{x}_i$ pertenece a $\operatorname{intrel} S \subseteq \operatorname{intrel} K$. ∎

Los conjuntos convexos tienen buenas propiedades topológicas. Por ejemplo, para cualquier espacio topológico X tenemos

$$\overline{\operatorname{int} X} \subseteq \overline{X},$$
$$\operatorname{int} X \subseteq \operatorname{int} \overline{X}.$$

Pero en general $\overline{\operatorname{int} X} \neq \overline{X}$ (por ejemplo, si X es un punto) y $\operatorname{int} X \neq \operatorname{int} \overline{X}$ (por ejemplo, si X es una bola en $\mathbb{R}^n$ sin un punto interior). Sin embargo, si X es convexo y $\operatorname{int} X \neq \emptyset$, entonces hay inclusiones inversas.

1.17. Proposición. *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo. Entonces*

$$\begin{aligned}
\overline{\operatorname{int} K} &= \overline{K}, \quad \text{si } \operatorname{int} K \neq \emptyset, \\
\operatorname{int} K &= \operatorname{int} \overline{K}, \\
\overline{\operatorname{intrel} K} &= \overline{K}, \quad \text{si } \operatorname{intrel} K \neq \emptyset, \\
\operatorname{intrel} K &= \operatorname{intrel} \overline{K}, \\
\operatorname{fr} K &= \operatorname{fr}(\operatorname{int} K) = \operatorname{fr}(\overline{K}), \quad \text{si } \operatorname{int} K \neq \emptyset.
\end{aligned}$$

*Aquí $\operatorname{fr} K := \overline{K} \setminus \operatorname{int} K$ es la **frontera** de K.*

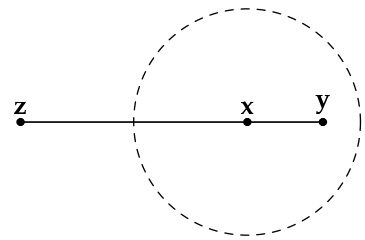
Demostración. La última formula es una consecuencia formal de las dos primeras. Las formulas con intrel son también consecuencias de las fórmulas con int.

Para la primera fórmula, si $\mathbf{x} \in \overline{K}$, entonces para cualquier $\epsilon > 0$ existe $\mathbf{y} \in K$ tal que $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \epsilon$. Por nuestra hipótesis, existe un punto $\mathbf{z} \in \operatorname{int} K$, y por lo tanto $[\mathbf{z}, \mathbf{y}) \subset \operatorname{int} K$, como hemos visto en 1.13. Entonces para cualquier $\epsilon > 0$ existe $\mathbf{y}' \in \operatorname{int} K$ tal que $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}'\| < \epsilon$. Hemos demostrado que $\overline{K} \subseteq \overline{\operatorname{int} K}$.

Para la segunda fórmula, tenemos que demostrar que $\operatorname{int} \overline{K} \subseteq \operatorname{int} K$. Primero supongamos que $\operatorname{int} K = \emptyset$. Tenemos dos posibilidades:

- $K = \emptyset$, y en este caso obviamente $\operatorname{int} K = \operatorname{int} \overline{K}$,
- $K \neq \emptyset$, y en este caso $\operatorname{intrel} K \neq \emptyset$ y por lo tanto $\operatorname{af} K \subsetneq \mathbb{R}^n$ y $\operatorname{int} K = \operatorname{int} \overline{K} = \emptyset$.

Entonces, el caso $\operatorname{int} K = \emptyset$ es trivial y podemos suponer que $\operatorname{int} K \neq \emptyset$. Escojamos un punto $\mathbf{z} \in \operatorname{int} K$. Para un punto $\mathbf{x} \in \operatorname{int} \overline{K}$ sea R el rayo que empieza en $\mathbf{z}$ y pasa por $\mathbf{x}$. La condición $\mathbf{x} \in \operatorname{int} \overline{K}$ quiere decir que $B(\mathbf{x}, \epsilon) \subset \overline{K}$ para algún $\epsilon > 0$, y por lo tanto existe $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, \epsilon)$ tal que $\mathbf{x} \in (\mathbf{z}, \mathbf{y})$. Pero $[\mathbf{z}, \mathbf{y}) \subset \operatorname{int} K$, como hemos observado antes (el rayo puede intersecar la frontera solo una vez, y esta intersección no puede estar antes de $\mathbf{y}$ porque $\mathbf{y} \in \overline{K}$).



■