Geometría convexa y politopos, día 2

Alexey Beshenov (cadadr@gmail.com)

9 de agosto de 2016

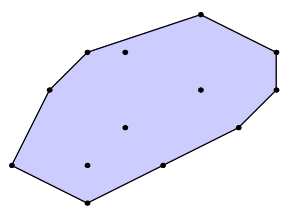
2. La envolvente convexa

2.1. Definición. Si $X \subset \mathbb{R}^n$ es cualquier conjunto, entonces la **envolvente convexa** de X es el conjunto

$$\operatorname{conv} X := \bigcap_{\substack{K \supseteq X \\ K \text{ convexo}}} K.$$

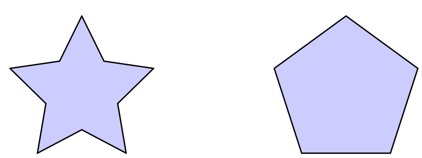
La intersección de conjuntos convexos es convexa, de donde $\operatorname{conv} X$ es un conjunto convexo, específicamente el conjunto convexo mínimo que contiene a X. Tenemos $\operatorname{conv} X = X$ si y solamente si X es convexo.

2.2. Ejemplo. He aquí la envolvente convexa de un conjunto finito de puntos en $\mathbb{R}^2$:



▲

2.3. Ejemplo. He aquí un subconjunto no convexo de $\mathbb{R}^2$ y su envolvente convexa:



X $\qquad$ $\operatorname{conv} X$

▲

2.4. Ejercicio. 1) *Demuestre que si X es un conjunto abierto, entonces* $\operatorname{conv} X$ *es también abierto. (Indicación:* $\operatorname{conv} X$ *es convexo, entonces* $\operatorname{int} \operatorname{conv} X$ *es también convexo.)*

2) *Encuentre algún ejemplo de un conjunto cerrado X tal que* $\operatorname{conv} X$ *no es cerrado.*

2.5. Ejercicio. *Si $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una aplicación afín, entonces para cualquier subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ tenemos*

$$f(\operatorname{conv} X) = \operatorname{conv} f(X)$$

(utilice el hecho que la imagen y la imagen inversa de un conjunto convexo, respecto a una aplicación afín, es también convexa).

2.6. Ejercicio. *1) Tenemos la siguiente descripción de la envolvente convexa de $X \subset \mathbb{R}^n$:*

$$\operatorname{conv} X = \{ \sum_{1\le i\le k} \lambda_i\, \mathbf{x}_i \mid \sum_i \lambda_i = 1,\ \lambda_i \ge 0,\ \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in X,\ k = 1, 2, \ldots \}.$$

(denotemos el conjunto a la derecha por K; note que $K \subseteq \operatorname{conv} X$ y $X \subset K$, por lo que es suficiente de demostrar que K es convexo).

2) En particular, para un conjunto finito $X = \{\mathbf{v}_0, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ y afínmente independiente, su envolvente convexa es el m-símplice con vértices $\mathbf{v}_0, \ldots, \mathbf{v}_m$.

3) Si K_1 y K_2 son dos subconjuntos convexos no vacíos en $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\operatorname{conv}(K_1 \cup K_2) = \bigcup_{\substack{\mathbf{x}_1 \in K_1 \\ \mathbf{x}_2 \in K_2}} [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2].$$

4) Si C_1 y C_2 son dos conos convexos, entonces su suma de Minkowski $C_1 + C_2$ coincide con $\operatorname{conv}(C_1 \cup C_2)$.

2.7. Proposición (Teorema de Carathéodory). *En la fómula de arriba para $\operatorname{conv} X$ es suficiente considerar $k = 1, 2, \ldots, n+1$ y suponer que los puntos $\mathbf{x}_i$ son afínmente independientes. En otras palabras, para $X \subset \mathbb{R}^n$ la envolvente convexa $\operatorname{conv} X$ es la unión de todos m-símplices con vértices en X para $m \le n$.*

Demostración. Está claro que cada símplice con vértices en X pertenece a $\operatorname{conv} X$. Lo que tenemos que demostrar es que cada punto $\mathbf{x} \in \operatorname{conv} X$ pertenece a un m-símplice para $m \le n$. En el ejercicio de arriba hemos visto que

$$\mathbf{x} = \sum_{1\le i\le k} \lambda_i\, \mathbf{x}_i$$

para algunos $\mathbf{x}_i \in X$ y $\lambda_i \ge 0$, $\sum_i \lambda_i = 1$. Sin pérdida de generalidad, $\lambda_i > 0$. Si los puntos $\mathbf{x}_i$ son afínmente independientes, entonces $k \le n+1$. Supongamos que $\mathbf{x}_i$ son afínmente dependientes, es decir que existe alguna relación

$$\sum_{1\le i\le k} \alpha_i\, \mathbf{x}_i = 0,$$

donde $\sum_i \alpha_i = 1$. Sin pérdida de generalidad, $\alpha_k > 0$. También, cambiando la numeración de los términos con $\alpha_i \ne 0$, podemos suponer que

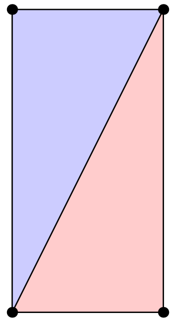
$$\lambda_i / \alpha_i \ge \lambda_k / \alpha_k.$$

Entonces

$$\mathbf{x} = \sum_{1\le i\le k} \lambda_i\, \mathbf{x}_i = \sum_{1\le i\le k} \lambda_i\, \mathbf{x}_i - \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \underbrace{\sum_{1\le i\le k} \alpha_i\, \mathbf{x}_i}_{=0} = \sum_{1\le i\le k-1} \underbrace{\left(\lambda_i - \frac{\lambda_k}{\alpha_k}\, \alpha_i\right)}_{\ge 0} \mathbf{x}_i.$$

Entonces, usando la relación $\sum_{1\le i\le k} \alpha_i\, \mathbf{x}_i = 0$, hemos escrito $\mathbf{x}$ como una combinación convexa de $k-1$ puntos $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}$. Si estos puntos son afínmente independientes, la demostración está terminada. Sino, podemos repetir el proceso y reducir el número de términos. ∎

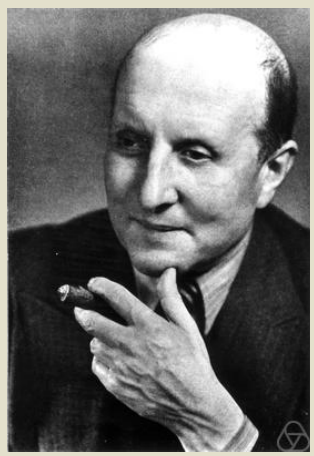
2.8. Ejemplo. El rectangulo es un conjunto convexo que es la unión de dos triángulos.



Cada punto de $\mathbb{R}^2$ pertenece a un triángulo, cada punto de $\mathbb{R}^n$ pertenece a un n-símplice; en general, cada punto de un conjunto convexo K pertenece a un símplice con vértices en K. El teorema de Carathéodory dice que para formar $\operatorname{conv} X$, hay que tomar todos los símplices con vértices en X. ▲

2.9. Ejemplo. Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un cono de vértice $\mathbf{0}$ (no necesariamente convexo), entonces cada punto de $\operatorname{conv} C$ puede ser escrito como $\mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_n$ para algunos $\mathbf{x}_i \in C$. El hecho que n términos sean suficientes es álgebra lineal. ▲

Constantin Carathéodory (1873–1950) fue un matemático de origen griego que trabajó en el análisis real, cálculo de variaciones y teoría de la medida.



Nació en Berlín, siendo su padre un embajador del Imperio otomano. Estudió matemáticas en la universidad de Berlín y la universidad de Gotinga bajo la dirección de Minkowski. Luego trabajó en varias universidades alemanas y en 1920 fue invitado a fundar una universidad en Esmirna tras la invasión griega de esta ciudad durante la partición del Imperio otomano en la guerra greco-turca de 1919–1922. Sin embargo, en 1922 la ciudad fue destrozada por un incendio y los turcos recuperaron el control. Carathéodory fue rescatado en el último momento por un barco de guerra. La universidad de Esmirna nunca admitió estudiantes; Carathéodory salvó la biblioteca universitaria y trabajó hasta 1924 en Atenas. Desde 1924 hasta su jubilación en 1938 fue profesor de matemáticas en la Universidad de Múnich. Aunque perteneció a la Academia de Ciencias de Baviera durante la época de Hitler, no tomaba directamente parte de las actividades del partido nazi.

2.10. Proposición. *Si $X \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto compacto, entonces* $\operatorname{conv} X$ *es también compacto.*

Un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es compacto si y solamente si es cerrado y acotado. Ya hemos mencionado que para X cerrado, conv X no es necesariamente cerrado. Esta proposición dice que si X es cerrado *y acotado*, entonces conv X es también cerrado y acotado.

Demostración. Consideramos el símplice

$$\Delta := \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_i \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0\}.$$

Es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^{n+1}$. Ahora el teorema de Carathéodory nos dice que conv X es exactamente la imagen de la aplicación continua

$$\underbrace{X \times \cdots \times X}_{n+1} \times \Delta \to \mathbb{R}^n,$$
$$(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n+1}, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \mapsto \sum_{1 \leq i \leq n+1} \lambda_i\, \mathbf{x}_i.$$

Si X es compacto, entonces $X \times \cdots \times X \times \Delta$ es también compacto (como producto de conjuntos compactos). La imagen de un conjunto compacto por una aplicación continua es también compacta. ■

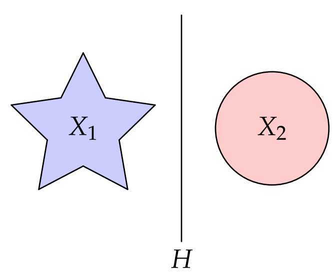
2.11. Corolario. *Si X es un conjunto acotado, entonces* conv X *es también acotado.*

Demostración. Recuerden que X es acotado si y solamente si $X \subseteq Y$ donde Y es compacto. En este caso conv $X \subseteq$ conv Y, donde conv Y es compacto por la proposición precedente. ■

3. Separación por hiperplanos

3.1. Definición. Se dice que dos conjuntos no vacíos $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ están **separados por el hiperplano** H si $X_1 \subseteq \overline{H^+}$ y $X_2 \subseteq \overline{H^-}$ para los dos semiespacios cerrados definidos por H.

Si $X_1 \subseteq H^+$ y $X_2 \subseteq H^-$ para los semiespacios abiertos correspondientes, entonces se dice que X_1 y X_2 están **estrictamente separados**.

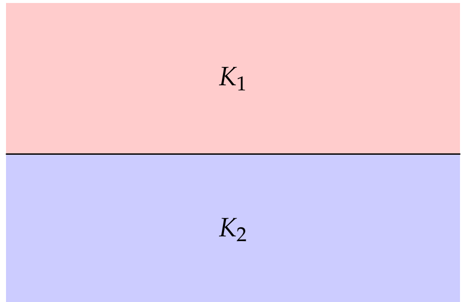


Es claro que hay parejas de conjuntos $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ que no pueden ser separadas por un hiperplano. Vamos a analizar el caso de la separación estricta. He aquí un criterio suficiente:

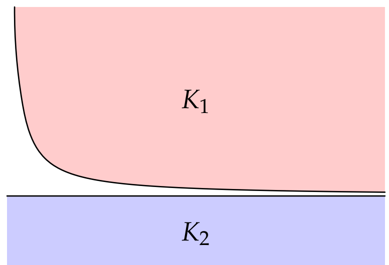
3.2. Teorema. *Sean $K_1, K_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ dos conjuntos no vacíos, disjuntos, convexos, cerrados. También supongamos que K_2 es acotado. Entonces existe un hiperplano que separa K_1 y K_2 estrictamente.*

3.3. Ejemplo. La condición $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ es obviamente necesaria. También sin la hipótesis que K_1 y K_2 son convexos, se puede construir muchos contraejemplos.

Es necesario que ambos conjuntos sean cerrados, porque en el caso contrario tenemos el contraejemplo estúpido donde K_1 y K_2 son dos semiespacios que corresponden al mismo hiperplano, K_1 abierto, K_2 cerrado y $K_1 \cup K_2 = \mathbb{R}^n$.



En fin, la hipótesis que uno de los conjuntos es compacto es necesaria porque, por ejemplo, los conjuntos $K_1 := \{x > 0,\ y \geq 1/x\}$ y $K_2 := \{y \leq 0\}$ en $\mathbb{R}^2$ no admiten separación estricta: son disjuntos, pero la distancia entre K_1 y K_2 es arbitrariamente pequeña.



▲

El punto clave de la demostración del teorema 3.2 es el siguiente

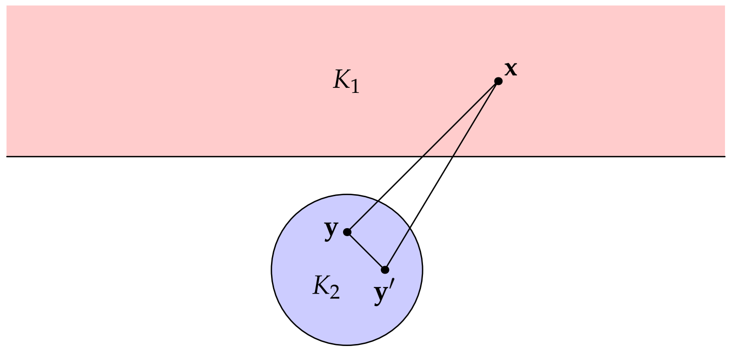
3.4. Lema. *Bajo las hipótesis de 3.2, existen puntos $\mathbf{x}_0 \in K_1$ y $\mathbf{y}_0 \in K_2$ tales que la distancia $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0\|$ es mínima.*

Demostración. Consideremos la distancia entre los puntos de nuestros conjuntos:

$$\begin{aligned} K_1 \times K_2 &\to \mathbb{R}_{>0}, \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\mapsto \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|. \end{aligned}$$

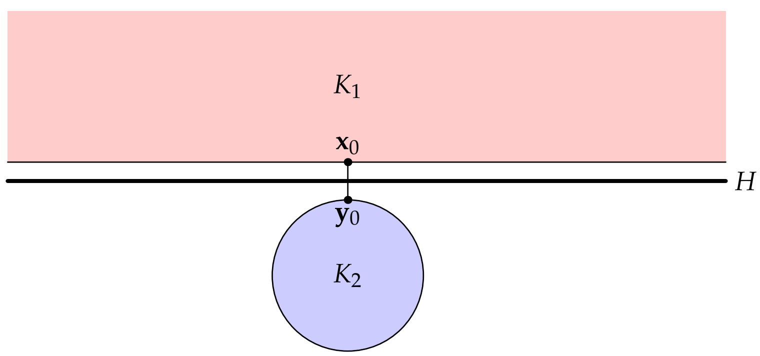
Es una función continua, por lo que si K_1 y K_2 son compactos, la función alcanza su valor mínimo en ciertos puntos $\mathbf{x}' \in K_1$ y $\mathbf{y}' \in K_2$. Según nuestras hipótesis, solamente K_2 es compacto, pero esto no es un problema. Fijemos cualquier punto $\mathbf{y}' \in K_2$. Luego para dos puntos $\mathbf{x} \in K_1$ y $\mathbf{y} \in K_2$ tenemos la desigualdad inversa del triángulo que dice que cada lado de un triángulo es más largo que la diferencia de los otros dos lados:

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \geq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}'\| - \underbrace{\|\mathbf{y} - \mathbf{y}'\|}_{\leq \operatorname{diam} K_2}.$$



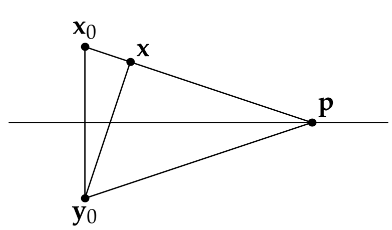
Podemos escoger otro punto $\mathbf{x}' \in K_1$ y remplazar K_1 por el conjunto $K_1' := K_1 \cap B(\mathbf{y}', r)$, donde $\overline{B}(\mathbf{y}', r)$ es la bola cerrada de radio $r := \|\mathbf{x}' - \mathbf{y}'\| + \operatorname{diam}(K_2)$. Ahora si $\mathbf{x}$ no está en esta bola, entonces $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| > \|\mathbf{x}' - \mathbf{y}'\|$. Esto quiere decir que la distancia mínima, si existe, se alcanza sobre $K_1' \times K_2$. Pero ahora K_1' es compacto, y el mínimo existe. ∎

Demostración de 3.2. Sean $\mathbf{x}_0 \in K_1$ y $\mathbf{y}_0 \in K_2$ dos puntos tales que la distancia $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0\|$ es mínima. Afirmamos que el hiperplano que es perpendicular al segmento $[\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0]$ y pasa por su mitad separa a K_1 y K_2:

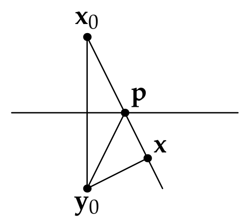


De hecho, si H no los separa, entonces H tiene un punto de intersección con K_1 o K_2. Por ejemplo, supongamos que $\mathbf{p} \in H \cap K_1$. Consideremos el triángulo isósceles $\mathbf{x}_0\mathbf{y}_0\mathbf{p}$. Sea $\mathbf{y}_0\mathbf{x}$ el perpendicular desde $\mathbf{y}_0$ al lado $\mathbf{x}_0\mathbf{p}$. Tenemos dos posibilidades:

- $\mathbf{x} \in [\mathbf{x}_0, \mathbf{p}]$, y en este caso, por convexidad de K_1 (¡es el punto donde tenemos que usar esta hipótesis!) también $\mathbf{x} \in K_1$ y $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}_0\| < \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0\|$. Pero esto contradice el hecho que $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0\|$ es la distancia mínima entre los puntos de K_1 y K_2.



- $\mathbf{x} \notin [\mathbf{x}_0, \mathbf{p}]$. En este caso vemos que $\|\mathbf{p} - \mathbf{y}_0\| < \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0\|$, contradicción.



Así el hiperplano H no puede tener intersecciones con K_1. De modo similar se ve que H tampoco puede tener intersecciones con K_2. ∎

Un caso particular del teorema es cuando K_2 es un punto:

3.5. Corolario. *Cada espacio convexo y cerrado $K \subsetneq \mathbb{R}^n$ es una intersección de semiespacios cerrados.*

Demostración. Para cada $\mathbf{x} \notin K$ sea $\overline{H}^+_{\mathbf{x}}$ el semiespacio cerrado tal que $\mathbf{x} \notin \overline{H}^+_{\mathbf{x}}$. Entonces $K = \bigcap_{\mathbf{x} \notin K} \overline{H}^+_{\mathbf{x}}$. ∎

3.6. Corolario. *Si $X \subset \mathbb{R}^n$ es compacto, entonces la envolvente convexa de X es la intersección de todos los semiespacios cerrados que contienen X:*

$$\operatorname{conv} X = \bigcap_{\overline{H}^+ \supset X} \overline{H}^+$$

Demostración. Notemos que $\mathbf{x} \notin \operatorname{conv} X$ si y solamente si $\mathbf{x}$ puede ser estrictamente separado de X. ∎