Geometría convexa y politopos, día 3

Alexey Beshenov (cadadr@gmail.com)

10 de agosto de 2016

4. Conjuntos polares

4.1. Definición. Para un subconjunto $X \subseteq \mathbb{R}^n$ el **conjunto polar** correspondiente es el subconjunto $X^\circ \subseteq \mathbb{R}^n$ definido por

$$X^\circ := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \le 1 \text{ para cada } \mathbf{y} \in X\}.$$

4.2. Ejemplo. Si $X = \{\mathbf{y}\}$ es un punto, entonces el conjunto polar es simplemente

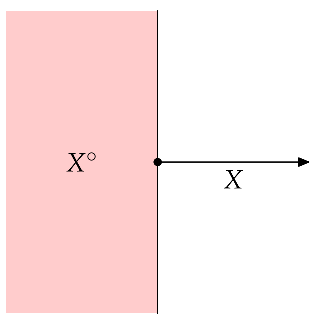
$$\{\mathbf{y}\}^\circ = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \le 1\}.$$

Si $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, este coincide con $\mathbb{R}^n$ y si $\mathbf{y} \ne \mathbf{0}$, es un semiespacio cerrado. ▲

4.3. Ejemplo. Sea $\mathbf{y} \ne \mathbf{0}$ y $X := \{\lambda\, \mathbf{y} \mid \lambda \ge 0\}$ el rayo correspondiente con origen en $\mathbf{0}$. Entonces

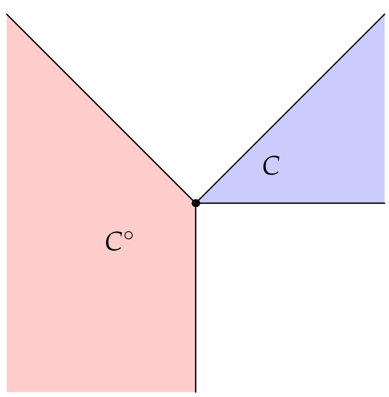
$$X^\circ = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \le 0\}$$

es el semiespacio que pasa por $\mathbf{0}$ y que es perpendicular a $\mathbf{y}$.



En general, si C es un cono convexo de vértice $\mathbf{0}$, entonces

$$C^\circ = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \le 0 \text{ para cada } \mathbf{y} \in C\}.$$



▲

4.4. Ejercicio. *Sea $B(\mathbf{0}, r)$ la bola cerrada centrada en $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ de radio r. Entonces $B(\mathbf{0}, r)^\circ = B(\mathbf{0}, 1/r)$.*

De la definición de X° está clara la siguiente

4.5. Observación.

1) $X^\circ = (X \cup \{\mathbf{0}\})^\circ$.

2) Si $X \subseteq Y$, entonces $X^\circ \supseteq Y^\circ$.

3) Para uniones de conjuntos tenemos $(\bigcup_i X_i)^\circ = \bigcap_i X_i^\circ$.

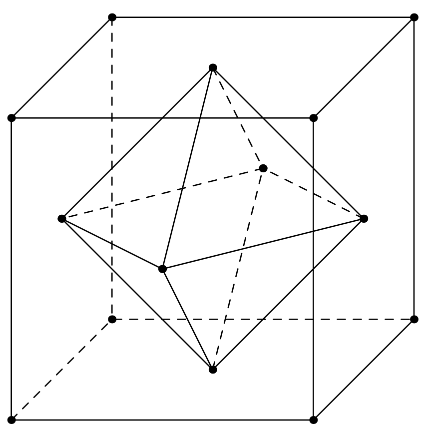
4.6. Ejemplo. Sea X el cubo en $\mathbb{R}^3$ definido por

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid |x_i| \le 1\}.$$

Notemos que es la misma cosa que la envolvente convexa de los 8 puntos $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, y por lo tanto

$$\begin{aligned} X^\circ &= (\operatorname{conv}\{(\pm 1, \pm 1, \pm 1)\})^\circ \\ &= \{(\pm 1, \pm 1, \pm 1)\}^\circ \\ &= \left(\bigcup \{(\pm 1, \pm 1, \pm 1)\}\right)^\circ \\ &= \bigcap \{(\pm 1, \pm 1, \pm 1)\}^\circ \\ &= \bigcap \{\pm x_1 \pm x_2 \pm x_3 \le 1\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid |x_1| + |x_2| + |x_3| \le 1\}. \end{aligned}$$

Este conjunto es conocido como **octaedro**. Es la envolvente convexa de los 6 puntos $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$, $(0, 0, \pm 1)$.



▲

4.7. Ejercicio. *Sea X el cuadrado con vértices $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, -1)$. Calcule X°.*

4.8. Observación. *Si $\mathbf{0} \in \operatorname{int} X$, entonces X° es un conjunto acotado. Si X es acotado, entonces $\mathbf{0} \in \operatorname{int}(X^\circ)$.*

Demostración. Si $\mathbf{0} \in \operatorname{int} X$, entonces X contiene una bola centrada en $\mathbf{0}$. Pero $B \subseteq X$ implica $X^\circ \subseteq B^\circ$. De la misma manera, si X es acotado, entonces $X \subseteq B$ para una bola centrada en $\mathbf{0}$ lo suficientemente grande. ∎

4.9. Ejercicio. *Para cualquier $X \subseteq \mathbb{R}^n$ el conjunto polar X° es convexo y cerrado. Siempre tenemos $\mathbf{0} \in X^\circ$.*

4.10. Observación. *Para cualquier conjunto $X \subseteq \mathbb{R}^n$ tenemos*

$$X^\circ = (\operatorname{conv} X)^\circ.$$

Demostración. $X \subseteq \operatorname{conv} X$, entonces $X^\circ \supseteq (\operatorname{conv} X)^\circ$. Tenemos que demostrar que también $X^\circ \subseteq (\operatorname{conv} X)^\circ$. Si $\mathbf{x} \in X^\circ$, entonces $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \le 1$ para cada $\mathbf{y} \in X$. Como hemos visto, $\operatorname{conv} X$ consiste en las combinaciones convexas $\sum_i \lambda_i \, \mathbf{y}_i$ donde $\mathbf{y}_i \in X$, $\sum_i \lambda_i = 1$, $\lambda_i \ge 0$. Luego

$$\left\langle \mathbf{x}, \sum_i \lambda_i \, \mathbf{y}_i \right\rangle = \sum_i \lambda_i \, \underbrace{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_i \rangle}_{\le 1} \le 1.$$

■

4.11. Observación. *Para cualquier conjunto $X \subseteq \mathbb{R}^n$ tenemos*

$$X^\circ = (\overline{X})^\circ.$$

Demostración. $X \subseteq \overline{X}$, de donde $(\overline{X})^\circ \subseteq X^\circ$. Tenemos que demostrar que para cada punto $\mathbf{x} \in X^\circ$ tenemos también $\mathbf{x} \in (\overline{X})^\circ$. Recordemos la caracterización analítica de subconjuntos cerrados de espacios métricos completos: X es cerrado si y solamente si para cada sucesión convergente de puntos $\mathbf{y}_i \in X$ tenemos $\lim \mathbf{y}_i \in X$. Entonces la clausura topológica $\overline{X}$ es precisamente el conjunto de todos los $\lim \mathbf{y}_i$ para cada sucesión convergente $\{\mathbf{y}_i \in X\}$. Para $\mathbf{x} \in X^\circ$

$$\langle \mathbf{x}, \lim \mathbf{y}_i \rangle = \lim \, \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_i \rangle \le 1,$$

y por lo tanto $\mathbf{x} \in (\overline{X})^\circ$. ■

Entonces, sabemos que X° es un conjunto especial: es convexo, cerrado y contiene el punto $\mathbf{0}$. Ahora vamos a demostrar que si X también tiene estas propiedades, entonces X es el conjunto polar para X°, es decir $(X^\circ)^\circ = X$.

4.12. Proposición. *Si $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo, cerrado, tal que $\mathbf{0} \in K$, entonces $K^{\circ\circ} = K$.*

Demostración. Está claro que $K \subseteq K^{\circ\circ}$, porque para cada $\mathbf{x} \in K$ y cada $\mathbf{y} \in K^\circ$ tenemos $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \le 1$:

$$\begin{aligned} K^\circ &:= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \le 1 \text{ para cada } \mathbf{y} \in K\}, \\ K^{\circ\circ} &:= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \le 1 \text{ para cada } \mathbf{y} \in K^\circ\}. \end{aligned}$$

La inclusión no trivial es $K^{\circ\circ} \subseteq K$. Vamos a demostrar que si $\mathbf{p} \notin K$, entonces $\mathbf{p} \notin K^{\circ\circ}$. Para cada $\mathbf{p} \notin K$ existe un hiperplano

$$H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle = \alpha\}, \quad \mathbf{v} \ne \mathbf{0}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

tal que H separa K y $\mathbf{p}$ estrictamente (la separación es posible gracias a la hipótesis de que K es convexo y cerrado). Notemos que $\alpha \ne 0$ porque el hiperplano H no pasa por $\mathbf{0}$: de hecho, $\mathbf{0} \in K$ por nuestra hipótesis y $H \cap K = \emptyset$, entonces $\mathbf{0} \notin H$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\alpha = 1$ (si no, remplazamos $\mathbf{v}$ por $1/\alpha \cdot \mathbf{v}$). Entonces K pertenece a uno de los dos semiespacios abiertos

$$\begin{aligned} H^- &:= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle < 1\}, \\ H^+ &:= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle > 1\}. \end{aligned}$$

Para ver a cuál, es suficiente examinar el punto $\mathbf{0} \in K$: tenemos $\langle \mathbf{0}, \mathbf{v} \rangle = 0 < 1$, y entonces $K \subset H^-$, es decir

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle < 1 \text{ para todo } \mathbf{x} \in K,$$

y $\mathbf{v} \in K^\circ$. El punto $\mathbf{p}$ pertenece al otro semiespacio H^+, de donde

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{v} \rangle > 1,$$

lo que quiere decir que $\mathbf{p} \notin K^{\circ\circ}$. ∎

4.13. Corolario. *Para cualquier conjunto $X \subseteq \mathbb{R}^n$ tenemos*

$$X^{\circ\circ} = \overline{\operatorname{conv}(X \cup \{\mathbf{0}\})}.$$

Demostración. De hecho, el conjunto $Y := \overline{\operatorname{conv}(X \cup \{\mathbf{0}\})}$ satisface las hipótesis de la proposición de arriba y por lo tanto $Y^{\circ\circ} = Y$. Pero $Y^\circ = X^\circ$ porque, como hemos observado, tomando la clausura topológica o envolvente convexa, o añadiendo $\mathbf{0}$, el conjunto polar no se cambia. ∎

4.14. Corolario. *Sean $K_1, K_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ conjuntos convexos, cerrados, que contienen $\mathbf{0}$.*

1) Si $K_1^\circ = K_2^\circ$, entonces $K_1 = K_2$.

2) Si $K_1^\circ \subseteq K_2^\circ$, entonces $K_1 \supseteq K_2$.

3) $(K_1 \cap K_2)^\circ = \overline{\operatorname{conv}(K_1^\circ \cup K_2^\circ)}$.

Demostración. Las partes 1) y 2) son consecuencias inmediatas de la fórmula $K^{\circ\circ} = K$.

En 3), notemos que los conjuntos $K_1 \cap K_2$, $(K_1 \cap K_2)^\circ$, $\overline{\operatorname{conv}(K_1^\circ \cup K_2^\circ)}$ son también convexos, cerrados y contienen $\mathbf{0}$, y

$$(K_1 \cap K_2)^{\circ\circ} = K_1 \cap K_2 = K_1^{\circ\circ} \cap K_2^{\circ\circ} = (K_1^\circ \cup K_2^\circ)^\circ = \overline{\operatorname{conv}(K_1^\circ \cup K_2^\circ)}^\circ,$$

y por la parte 1) la igualdad $(K_1 \cap K_2)^{\circ\circ} = \overline{\operatorname{conv}(K_1^\circ \cup K_2^\circ)}^\circ$ implica $(K_1 \cap K_2)^\circ = \overline{\operatorname{conv}(K_1^\circ \cup K_2^\circ)}$. ∎

5. Poliedros convexos

Nuestro objetivo es estudiar politopos, pero por el momento es conveniente definir un objeto un poco más general:

5.1. Definición. Se dice que $X \subseteq \mathbb{R}^n$ es un **poliedro convexo** si X es una intersección finita de semiespacios cerrados.

$\mathbb{R}^n$ y $\emptyset$ son también considerados como poliedros convexos (intersección de una familia vacía y la intersección vacía). En otras palabras, un poliedro convexo es la solución de un sistema de desigualdades lineales:

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f_1(\mathbf{x}) \ge 0, \ \ldots, \ f_k(\mathbf{x}) \ge 0\},$$

donde $f_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son aplicaciones afines, es decir de la forma

$$f_i(\mathbf{x}) = f_i(x_1, \ldots, x_n) = a_1\, x_1 + \cdots + a_n\, x_n + a_0$$

para algunos $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

5.2. Observación.

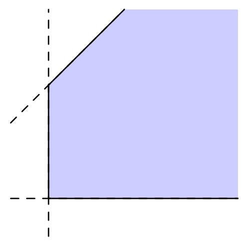
1) *Cada poliedro convexo es convexo y cerrado (siendo una intersección finita de semiespacios que son conexos y cerrados).*

2) *Si P y Q son poliedros convexos, entonces $P \cap Q$ es un poliedro convexo.*

3) *Si $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una aplicación afín y $P \subset \mathbb{R}^n$ es un poliedro convexo, entonces $f(P) \subset \mathbb{R}^m$ es también un poliedro convexo.*

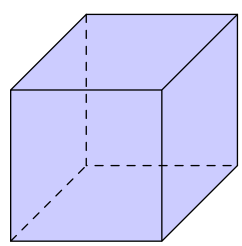
5.3. Ejemplo. Cada subespacio afín $A \subset \mathbb{R}^n$ es un poliedro convexo (poco interesante). Si $X \subset A$, entonces X es un poliedro convexo respecto a A si y solamente si X es un poliedro convexo respecto a $\mathbb{R}^n$. ▲

5.4. Ejemplo. He aquí un poliedro convexo en $\mathbb{R}^2$ que no es acotado:



▲

5.5. Ejemplo. La intersección de semiespacios $x_1 \le 1$, $x_1 \ge -1$, $x_2 \le 1$, $x_2 \ge -1$, $x_3 \le 1$, $x_3 \ge -1$ es un cubo en $\mathbb{R}^3$. Es un poliedro convexo acotado.



▲

6. Politopos convexos

6.1. Definición. Un **politopo convexo** $P \subset \mathbb{R}^n$ es la envolvente convexa de un conjunto finito de puntos $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$.

En particular, cada politopo convexo es compacto (cerrado y acotado).

La palabra **poliedro** viene del griego clásico πολύεδρον (poliedron), de la raíz πολύς (polis), “muchas” y ἕδρα (edra), “base”, “asiento”, “cara”. La palabra **politopo** viene también de πολύς y τόπος (topos), “lugar”, “región”, “posición” (la misma raíz aparece en las palabras como “topología” y “topos”). Entonces, si las traducimos del griego, las palabras “poliedro” y “politopo” quieren decir la misma cosa. Pero para nosotros son dos objetos diferentes: un poliedro es la intersección de semiespacios cerrados (que puede ser o no acotada) y un politopo es la envolvente convexa de puntos (que es siempre acotada). Más abajo vamos a ver la relación entre las dos cosas.

Aunque construido con las raíces griegas, el termino politopo ("polytop" en alemán) fue introducido por el matemático alemán Reinhold Hoppe (1816–1900) que estudió politopos regulares en dimensiones superiores. En inglés la palabra "polytope" fue introducida por Alicia Boole Stott (1860–1940), hija de George Boole. Curiosamente, los politopos habían sido estudiados antes por el matemático suizo Ludwig Schläfli (1814–1895), pero su trabajo en geometría no era muy conocido. Alicia Boole Stott descubrió que en la dimensión 4 hay exactamente 6 politopos regulares (que se llaman pentácoron, octácoron, hexadecácoron, icositetrácoron, hecatonicosácoron, hexacosícoron) y después encontró los trabajos de Schläfli, quien había publicado el mismo resultado en el 1852.

6.2. Observación. *Si $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación afín y $P \subset \mathbb{R}^n$ es un politopo convexo, entonces $f(P) \subset \mathbb{R}^m$ es también un politopo convexo.*

Demostración. Si $P = \operatorname{conv}\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\}$, entonces $f(P) = \operatorname{conv}\{f(\mathbf{x}_1), \ldots, f(\mathbf{x}_k)\}$. ∎

6.3. Observación. *Si P y Q son politopos convexos, entonces* $\operatorname{conv}(P \cup Q)$ *es también un politopo convexo.*

Demostración. Si $P = \operatorname{conv}\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ y $Q = \operatorname{conv}\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_\ell\}$, entonces

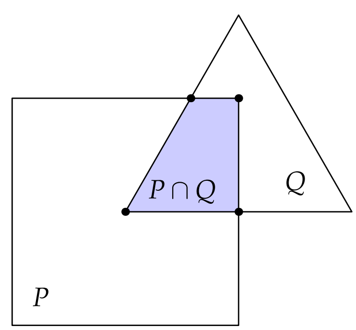
$$\operatorname{conv}(P \cup Q) = \operatorname{conv}(\operatorname{conv}\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\} \cup \operatorname{conv}\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_\ell\}) = \operatorname{conv}\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_\ell\}.$$

∎

Intuitivamente, la siguiente observación también está clara:

6.4. Observación. *Si P y Q son dos politopos convexos, entonces $P \cap Q$ es también un politopo convexo.*

Pero ¿cuál es la demostración? Lo que sabemos es que el conjunto $P \cap Q$ es también convexo y compacto. No está claro cuáles son los vértices cuya envolvente convexa sea $P \cap Q$ porque la intersección produce nuevos vértices:



El hecho de que $P \cap Q$ sea un politopo será obvio una vez establecida la siguiente caracterización:

$$\text{politopos convexos} = \text{poliedros convexos acotados}.$$

Esto se llama el **teorema de Minkowski–Weyl** y lo vamos a demostrar más adelante.