Geometría convexa y politopos, día 4

Alexey Beshenov (cadadr@gmail.com)

11 de agosto de 2016

7. Subconjuntos extremos y caras de poliedros

7.1. Definición. Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo cerrado. Un subconjunto $F \subseteq K$ se llama un **subconjunto extremo** si

1) F es convexo,

2) para cada $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in K$ si $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \cap F \neq \emptyset$, entonces $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in F$.

7.2. Ejemplo. K y $\emptyset$ son subconjuntos extremos de K (triviales). ▲

7.3. Ejemplo. Notemos que para un punto $\mathbf{x} \in K$ las siguientes condiciones son equivalentes:

1) $\{\mathbf{x}\} \subset K$ es un subconjunto extremo,

2) K no contiene segmentos abiertos $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ que pasan por $\mathbf{x}$,

3) $K \setminus \{\mathbf{x}\}$ es también convexo.

En este caso se dice que $\mathbf{x}$ es un **punto extremo** de K. ▲

7.4. Definición. Un subconjunto extremo de un poliedro se llama **cara**. Las caras de dimensión 0 se llaman **vértices** y las caras de dimensión 1 se llaman **aristas**.

7.5. Ejercicio. *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo cerrado.*

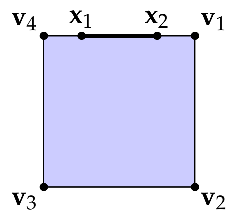
1) Si $F_1 \subseteq K$ y $F_2 \subseteq K$ son dos subconjuntos extremos, entonces $F_1 \cap F_2$ es un subconjunto extremo. En particular, la intersección de caras de un poliedro es también una cara.

2) Sea $F \subseteq K$ un subconjunto extremo de K. Entonces los subconjuntos extremos de F son los subconjuntos extremos de K contenidos en F.

7.6. Ejemplo. Sea $K \subset \mathbb{R}^2$ el cuadrado definido por

$$\begin{aligned} K &:= \operatorname{conv}\{\mathbf{v}_1 := (1,1),\ \mathbf{v}_2 := (1,-1),\ \mathbf{v}_3 := (-1,-1),\ \mathbf{v}_4 := (-1,1)\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| \leq 1,\ |x_2| \leq 1\}. \end{aligned}$$

- Cada vértice $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ forma un conjunto extremo, porque $K \setminus \{\mathbf{v}_i\}$ es convexo (y son los únicos puntos que se puede quitar sin perder la convexidad).
- Cada segmento $[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j]$ para $i \neq j$ es también un subconjunto extremo. Tales segmentos son aristas de K. Las intersecciones de aristas son los vértices.

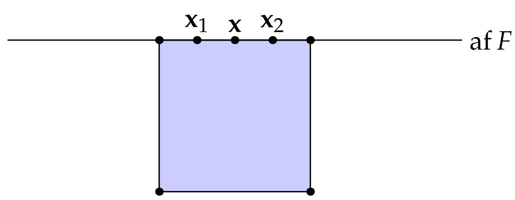


▲

7.7. Observación. *Sea K un conjunto convexo cerrado y $F \subseteq K$ un subconjunto extremo. Entonces $F = K \cap \operatorname{af} F$.*

En particular, cada cara F de un poliedro P es también un poliedro, siendo la intersección de P con un subespacio afín de $\mathbb{R}^n$.

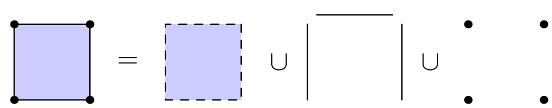
Demostración. Obviamente $F \subseteq K \cap \operatorname{af} F$, porque $F \subseteq K$ y $F \subseteq \operatorname{af} F$. El interior relativo de F, que es el interior de F como un subespacio de $\operatorname{af} F$, no es vacío. Escojamos un punto $\mathbf{x} \in \operatorname{intrel} F$. Para cualquier punto $\mathbf{x}_1 \in K \cap \operatorname{af} F$, si $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}$, entonces la demostración está terminada. Si $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_1$, entonces existe otro punto $\mathbf{x}_2 \in F$, $\mathbf{x}_2 \neq \mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2 \neq \mathbf{x}$ tal que $\mathbf{x} \in (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ (porque $\mathbf{x}$ está en el interior), y por la extremidad de F concluimos que $\mathbf{x}_1 \in F$.



■

7.8. Observación. *Sea K un conjunto convexo cerrado. Entonces K es la unión disjunta de $\operatorname{intrel} F$ para cada subconjunto extremo $F \subseteq K$. En particular, todos los subconjuntos extremos propios $F \subsetneq K$ están contenidos en $K \setminus \operatorname{intrel} K$.*

7.9. Ejemplo. Aquí está la descomposición en $\operatorname{intrel} F$ para el cuadrado.



▲

Primero demostremos el siguiente

7.10. Lema. *Sea K un conjunto convexo cerrado. Si $F, F' \subset K$ son dos subconjuntos extremos tales que $F' \cap \operatorname{intrel} F \neq \emptyset$, entonces $F \subseteq F'$.*

Demostración. Fijemos un punto $\mathbf{x} \in F' \cap \operatorname{intrel} F$. Entonces

$$F = K \cap \operatorname{af} F = \bigcup_{\ell \text{ recta en } \operatorname{af} F,\ \mathbf{x} \in \ell} (K \cap \ell) = \bigcup_{\substack{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in K \\ \mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x},\ \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{x} \\ \mathbf{x} \in (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)}} [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2] \subseteq F',$$

porque F' es extremo y $\mathbf{x} \in (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \cap F'$ implica $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2] \subset F'$. ■

Demostración de 7.8. Antes de todo, veamos la unión es disjunta, porque el lema de arriba implica que si F y F' son dos subconjuntos extremos tales que $\operatorname{intrel} F \cap \operatorname{intrel} F' \neq \emptyset$, entonces $F \subseteq F'$ y $F' \subseteq F$.

Ahora tenemos que ver por qué la unión de $\operatorname{intrel} F$ es todo K. Usamos inducción sobre la dimensión. Si K es de dimensión 0 (un punto), es obvio. Luego, cada punto $\mathbf{x} \in K$ pertenece o bien a $\operatorname{intrel} K$, o bien a un subconjunto extremo de dimensión menor. ■

7.11. Proposición. *Sea $P \subseteq \mathbb{R}^n$ un poliedro convexo, es decir una intersección finita*

$$P = \overline{H_1}^+ \cap \cdots \cap \overline{H_k}^+, \tag{*}$$

donde $\overline{H_i}^+$ son semiespacios cerrados que corresponden a hiperplanos $H_i := \operatorname{fr} \overline{H_i}^+$. Supongamos que $\operatorname{int} P \neq \emptyset$ (es decir, $\dim P = n$). Entonces cada cara propia $F \subsetneq P$ de dimensión maximal $n-1$, es de la forma $H_i \cap P$ para algún $1 \le i \le k$. En particular, P tiene un número finito de caras de dimensión $n-1$.

(En general, no todo subconjunto $H_i \cap P$ es una cara de dimensión maximal $n-1$, pero es verdad si la presentación (*) es minimal, es decir, si quitamos algún $\overline{H_i}^+$, la intersección ya no coincide con P.)

Demostración. Sea $F \subsetneq P$ una cara de dimensión $n-1$. Entonces $\mathbf{x} \in \operatorname{intrel} F$ implica $\mathbf{x} \in \operatorname{fr} P$. Notemos que

$$\operatorname{fr} P = P \setminus \operatorname{int} P = \bigcap_i \overline{H_i}^+ \setminus \bigcap_i \operatorname{int} \overline{H_i}^+.$$

Entonces, $\mathbf{x} \in H_i$ para algún i. Luego $F = \operatorname{af} F \cap P = H_i \cap P$. (De hecho, si $\operatorname{af} F \neq H_i$, pero $\mathbf{x} \in F$ y $\mathbf{x} \in H_i$; entonces el hiperplano H_i divide $\operatorname{af} F$ en dos partes, lo cual es imposible.) ■

7.12. Proposición. *Sea P un politopo de dimensión n. Si $F \subsetneq P$ es una cara de P de dimensión $k < n$, entonces $F \subsetneq F'$ para alguna cara F' de dimensión $k+1$.*

Demostración. Es suficiente de demostrar que para cada cara F existe una cara F' de dimensión $n-1$ tal que $F \subset F'$. Esto nos da la proposición para $k = n-2$, y luego para $k < n-2$ podemos usar inducción sobre k.

Sin pérdida de generalidad, $\operatorname{int} P \neq \emptyset$. Entonces por la proposición de arriba, si $\mathbf{x} \in \operatorname{intrel} F$, existe una cara F' de dimensión $n-1$ tal que $\mathbf{x} \in F'$. Pero esto implica $F \subset F'$ por 7.10.

■

7.13. Proposición. *Sea $P = \bigcap_{1 \le i \le k} \overline{H_i}^+$ un poliedro convexo. Entonces para cada propia cara $F \subsetneq P$ tenemos*

$$\operatorname{af} F = H_{i_1} \cap \cdots \cap H_{i_\ell}$$

para algunos índices $1 \le i_1 < \cdots < i_\ell \le k$. En particular, el número de caras es finito.

Demostración. Sea $\mathbf{x} \in \operatorname{intrel} F$. Sean $i_1, \ldots, i_\ell$ los índices tales que $\mathbf{x} \in H_i$. Entonces $\operatorname{af} F \subset H_i$ para cada i por 7.10.

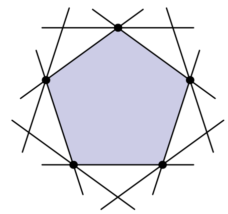
Ahora tenemos que ver $H_{i_1} \cap \cdots \cap H_{i_\ell} \subset \operatorname{af} F$. Supongamos que es falso, es decir existe una bola $B(\mathbf{x}, \epsilon)$ tal que $B(\mathbf{x}, \epsilon) \cap H_{i_1} \cap \cdots \cap H_{i_\ell} \subset P$. Pero esto implica que F no es una cara, porque existen puntos $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in B(\mathbf{x}, \epsilon) \cap H_{i_1} \cap \cdots \cap H_{i_\ell}$ tales que $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \notin \operatorname{af} F$ y $\mathbf{x} \in (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$. ■

8. Hiperplanos de soporte

8.1. Definición. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto. Se dice que un hiperplano $H \subseteq \mathbb{R}^n$ es un **hiperplano de soporte** para X si $H \cap \overline{X} \neq \emptyset$ y X está en el semiespacio cerrado $\overline{H}^+$ o $\overline{H}^-$.

8.2. Proposición. *Si $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo y $\mathbf{x} \in \operatorname{fr} K := \overline{K} \setminus \operatorname{int} K$, entonces existe un hiperplano de soporte $H \ni \mathbf{x}$.*

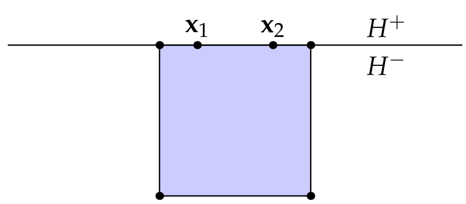
Aquí hay un ejemplo en $\mathbb{R}^2$ (noten que en ciertos puntos de $\operatorname{fr} K$ hay varios hiperplanos de soporte):



Demostración. Si $\operatorname{int} K = \emptyset$, entonces K pertenece a algún hiperplano en $\mathbb{R}^n$ que será un hiperplano de soporte. Así podemos suponer que $\operatorname{int} K \neq \emptyset$ y en este caso $\operatorname{int} K = \operatorname{int} \overline{K}$ y $\operatorname{fr} K = \overline{K}$, y por lo tanto sin pérdida de generalidad podemos remplazar K por $\overline{K}$. También podemos suponer que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Lo que sabemos es cómo se puede separar un punto $\mathbf{y} \notin K$ por un hiperplano. El hecho que $\mathbf{x}$ esté en la frontera significa que existe una sucesión $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n \setminus K$ tal que $\lim \mathbf{x}_i = \mathbf{x}$. Para cada i sea $H_i = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{y}, \mathbf{v}_i \rangle = \alpha_i\}$ un hiperplano que separa $\mathbf{x}_i$ de K. Aquí $\mathbf{v}_i$ es el vector normal a H_i (tal que $\|\mathbf{v}_i\| = 1$) y $\alpha_i > 0$ son parámetros tales que $\lim \alpha_i = \lim \operatorname{dist}(\mathbf{0}, H_i) = 0$. Remplazando $\{\mathbf{v}_i\}$ por una subsucesión convergente, podemos tomar $\mathbf{v}_0 := \lim \mathbf{v}_i$. Consideremos el hiperplano $H := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{y}, \mathbf{v}_0 \rangle = 0\}$. Para cada i tenemos $K \subset H_i^+$, es decir $\langle \mathbf{y}, \mathbf{v}_i \rangle > \alpha_i$ para cada $\mathbf{y} \in K$, entonces $\langle \mathbf{y}, \mathbf{v}_0 \rangle \geq 0$ y $K \subseteq \overline{H}^+$. ∎

8.3. Observación. *Si H es un hiperplano de soporte para K, entonces $K \cap H$ es un subconjunto extremo.*

Demostración. Supongamos que para $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in K$ se tiene $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \cap (K \cap H) \neq \emptyset$. Supongamos por absurdo que $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2] \not\subset H$. Entonces los puntos $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ están en diferentes semiespacios $\overline{H}^+$ y $\overline{H}^-$. Pero esto contradice el hecho de que todo K pertenece a uno de estos semiespacios (por la definición de hiperplanos de soporte).



∎

8.4. Proposición. *Cada cara de un poliedro convexo $P = \bigcap_{1 \leq i \leq k} H_i^+$ es la intersección de P con algún hiperplano de soporte.*

Demostración. Podemos suponer que $\operatorname{int} P \neq \emptyset$. Sea F una cara tal que

$$\operatorname{af} F = H_{i_1} \cap \cdots \cap H_{i_\ell},$$

donde $H_i^+ = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f_i(\mathbf{x}) \geq 0\}$ son algunos semiespacios cerrados definidos por aplicaciones afines $f_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Entonces

$$\operatorname{af} F = H := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f_{i_1}(\mathbf{x}) + \cdots + f_{i_\ell}(\mathbf{x}) = 0\}$$

es un hiperplano de soporte tal que $H \cap P = F$. ∎