

# Geometría convexa y politopos, día 6

Alexey Beshenov (cadadr@gmail.com)

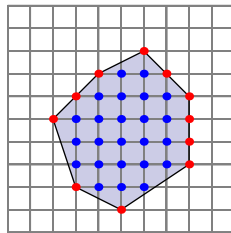
15 de agosto de 2016

## 12. Teorema de Pick

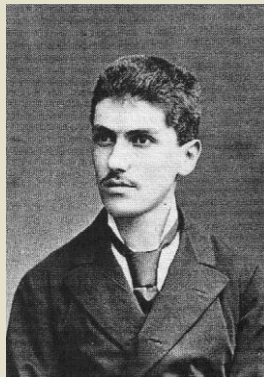
Sea  $P \subset \mathbb{R}^2$  un **polígono convexo entero**, es decir la envolvente convexa de algunos puntos de  $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ . Entonces el área de  $P$  puede ser calculada contando los puntos enteros en  $P$ . A saber,

**12.1. Teorema (Teorema de Pick).** Sea  $P$  un polígono convexo entero. Sea  $B$  el número de puntos enteros en la frontera de  $P$  y  $I$  el número de los puntos enteros en el interior de  $P$ . Entonces el área de  $P$  viene dada por

$$A = I + \frac{1}{2} B - 1.$$



**GEORG ALEXANDER PICK** (1859–1942) fue un matemático austríaco de origen judío.



Después de obtener su doctorado en la universidad de Viena, en 1881 tuvo una posición de profesor en la Universidad alemana de Praga.

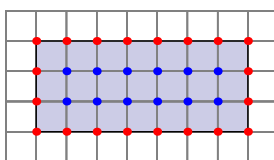
Su famoso teorema apareció en su artículo “Geometrisches zur Zahlenlehre” (1899) y fue popularizado posteriormente por Hugo Steinhaus al incluirlo en la edición de 1969 de su libro “Mathematical Snapshots”.

Pick fue el director del comité que nombró a Albert Einstein profesor de física matemática en 1911. También fue Pick que introdujo a Einstein al trabajo de los matemáticos italianos Gregorio Ricci-Curbastro y Tullio Levi-Civita en geometría diferencial, que ayudó a Einstein en 1915 a formular su teoría general de la relatividad.

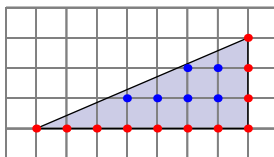
Después de su jubilación en 1927 Pick volvió a Viena. En 1938 tuvo que regresar a Praga cuando los nazis invadieron Austria. En 1939 llegaron a Checoslovaquia y Pick fue enviado al campo de concentración Theresienstadt el 13 de julio de 1942, donde murió dos semanas después a los 82 años.

Hay muchas demostraciones de este teorema. Voy a explicar el argumento elemental del libro de Beck y Robbins. Antes de todo, examinamos ciertos casos básicos:

**12.2. Ejercicio.** Sea  $P$  un rectángulo con lados paralelos a los ejes. Demuestre directamente la identidad  $A = I + \frac{1}{2}B - 1$ .



**12.3. Ejercicio.** Sea  $P$  un triángulo rectángulo con dos lados paralelos a los ejes. Demuestre la identidad  $A = I + \frac{1}{2}B - 1$ . Para simplificar su vida, puede suponer que la hipotenusa no contiene puntos enteros (excepto los dos vértices).

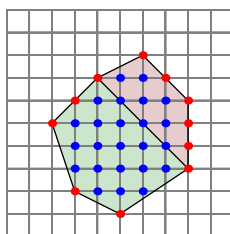


**12.4. Ejercicio.** A propósito, ¿cuándo es que el rectángulo del ejercicio precedente no contiene puntos enteros en la hipotenusa? Cuente el número de puntos enteros en el segmento de la línea entre  $(a, b)$  y  $(c, d)$  para algunos  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ .

Ahora la observación clave es que se puede cortar el polígono en polígonos más pequeños trazando algunas de sus diagonales, de modo que la identidad  $A = I + \frac{1}{2}B - 1$  para cada parte implica la misma identidad para  $P$ :

**12.5. Observación.** Supongamos que  $P$  está dividido por algunas de sus diagonales en los polígonos  $P_1, \dots, P_r$ . Entonces  $A_k = I_k + \frac{1}{2}B_k - 1$  para cada  $1, \dots, r$  implica  $A = I + \frac{1}{2}B - 1$ .

*Demostración.* Por inducción, es suficiente de examinar el caso  $r = 2$ :

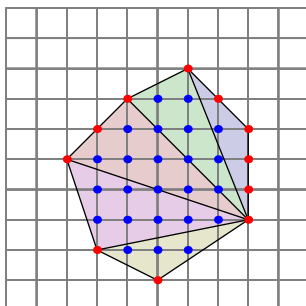


Supongamos que  $A_1 = I_1 + \frac{1}{2} B_1 - 1$  y  $A_2 = I_2 + \frac{1}{2} B_2 - 1$ . Como en el dibujo de arriba, algunos puntos enteros pueden estar en la línea que divide  $P$ , y por lo menos los dos vértices son entre ellos. Sea  $L$  el número de estos puntos. Se ve que  $I = I_1 + I_2 + L - 2$  y  $B = B_1 + B_2 - 2L + 2$ , y por lo tanto

$$I + \frac{1}{2} B - 1 = (I_1 + I_2 + L - 2) + \frac{1}{2} (B_1 + B_2 - 2L + 2) - 1 = (I_1 + \frac{1}{2} B_1 - 1) + (I_2 + \frac{1}{2} B_2 - 1) = A_1 + A_2 = A.$$

■

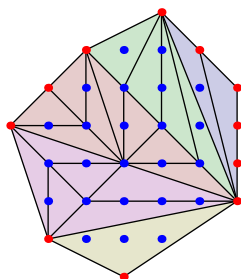
*Demostración del teorema de Pick.* En particular, se puede cortar nuestro polígono  $P$  en triángulos  $P_1, \dots, P_r$ — es suficiente escoger cualquier vértice y considerar las líneas que parten del mismo:



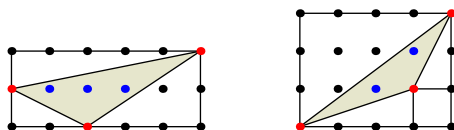
Refinando la triangulación, podemos suponer que cada uno de los lados de estos triángulos son

- o bien paralelos a los ejes,
- o bien no tienen puntos enteros, excepto los dos vértices.

Aquí está tal triangulación para nuestro ejemplo:



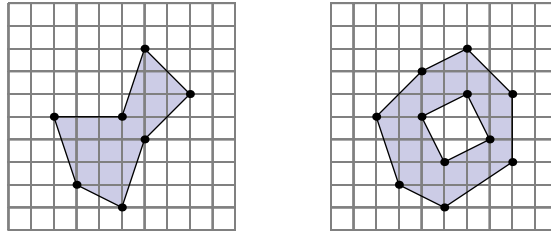
Entonces es suficiente demostrar el teorema para los triángulos que satisfacen la condición de arriba. Pero tales triángulos pueden ser encajados en un rectángulo entero con lados paralelos a los ejes, añadiendo triángulos rectángulos como en ejercicio 12.3 (sin puntos enteros en la hipotenusa) y rectángulos como en ejercicio 12.2. Por ejemplo,



Por la aditividad de la identidad de Pick, hemos reducido la demostración a la verificación de los ejercicios 12.3 y 12.2. ■

**12.6. Ejercicio.** Supongamos que el polígono es

- a) simplemente conexo (no tiene agujeros), pero no necesariamente convexo,  
 b) no simplemente conexo.



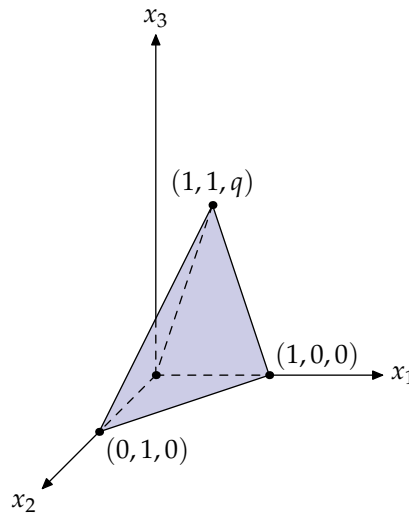
¿Se cumple todavía la identidad de Pick  $A = I + \frac{1}{2}B - 1$ ? Si no, ¿es posible corregirla?

Una pregunta natural es si el teorema de Pick se cumple en dimensiones superiores: sea  $P \subset \mathbb{R}^d$  un poliedro convexo entero, sea  $\text{vol } P := \int_P dx$  su volumen,  $I := \overset{\circ}{P} \cap \mathbb{Z}^d$  el número de puntos en su interior y  $B := \#(P \cap \mathbb{Z}^d) - I$  el número de puntos en su frontera. ¿Existe alguna relación entre  $\text{vol } P$ ,  $I$  y  $B$ , similar a la identidad  $A = I + \frac{1}{2}B - 1$ ? La respuesta es **no**. Aquí está la diferencia clave:

- En  $\mathbb{R}^2$  todo triángulo de vértices enteros que no contiene puntos enteros en su interior necesariamente tiene área  $1/2$  (este hecho es equivalente al teorema de Pick y se usa en algunas demostraciones).
- En  $\mathbb{R}^n$  para  $n > 2$  un símplice de vértices enteros y sin puntos enteros en su interior puede tener volumen arbitrariamente grande.

Aquí está un ejemplo del artículo J.E. Reeve, "On the volume of lattice polyhedra", Proc. London Math. Soc. (3) 7 (1957), 378–395:

**12.7. Ejercicio.** Para  $q = 1, 2, 3, \dots$  sea  $T_q$  el símplice con vértices  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(1, 1, q)$ .



Demuestre que para cada  $q$  tenemos  $\#(T_q \cap \mathbb{Z}^3) = 4$ ; los únicos puntos enteros en  $T_q$  son sus vértices, así que  $I = 0$  y  $B = 4$ . Sin embargo, observe que  $\text{vol } T_q \rightarrow \infty$  para  $q \rightarrow \infty$ .

Entonces en dimensiones superiores no existe un análogo simple del teorema de Pick. La generalización correcta es dada por los **polinomios de Ehrhart**. A saber,  $\text{vol } P$  es un coeficiente de un cierto polinomio de grado  $d = \dim P$  que está relacionado con cálculo de puntos enteros en  $P$ .

### 13. Polinomios de Ehrhart

Para obtener la generalización correcta de la identidad  $A = I + \frac{1}{2}B - 1$ , notamos que el número de puntos enteros en un polígono  $P$  puede ser escrito como

$$\#(P \cap \mathbb{Z}^2) = I + B = A + \frac{1}{2}B + 1.$$

De modo similar, para  $m = 1, 2, 3, \dots$  sea  $mP$  el polígono  $P$  dilatado por un factor  $m$ :

$$mP := \{(mx, my) \mid (x, y) \in P\}.$$

Consideremos el número de puntos enteros en  $mP$ :

$$\ell_P(m) := \#(mP \cap \mathbb{Z}^2).$$

El área de  $mP$  es igual a  $Am^2$ , donde  $A$  es el área de  $P$ . El número de puntos enteros en la frontera de  $mP$  es  $Bm$  (véase 12.4). Entonces tenemos

$$\ell_P(m) = Am^2 + \frac{1}{2}Bm + 1.$$

Luego, si contamos el número de puntos en el interior de  $mP$ , tenemos

$$\ell_{\overset{\circ}{P}}(m) := \#(m\overset{\circ}{P} \cap \mathbb{Z}^2) = \ell_P(m) - Bm = Am^2 - \frac{1}{2}Bm + 1 = \ell_P(-m),$$

donde la expresión  $\ell_P(-m)$  significa que el polinomio  $\ell_P(m) = Am^2 + \frac{1}{2}Bm + 1$  se evalúa formalmente en  $-m$ .

Nuestro objetivo es de demostrar el siguiente

**13.1. Teorema.** Si  $P \subset \mathbb{R}^d$  es un politopo convexo entero (la envolvente convexa de algunos puntos en  $\mathbb{Z}^d$ ) de dimensión  $d$ , entonces el número de puntos enteros

$$\ell_P(m) := \#(mP \cap \mathbb{Z}^d)$$

es un polinomio en  $m$  de grado  $d$  llamado el **polinomio de Ehrhart** de  $P$ .

Los polinomios de Ehrhart son muy especiales: para  $m \in \mathbb{Z}$  tenemos  $\ell_P(m) \in \mathbb{Z}$ . Aquí está una caracterización de tales polinomios:

**13.2. Proposición.** Sea  $p(X) \in \mathbb{Q}[X]$  un polinomio de grado  $d$  con coeficientes en  $\mathbb{Q}$ . Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- 1)  $p(m) \in \mathbb{Z}$  para cada  $m \in \mathbb{Z}$ .
- 2)  $p(X) = \sum_{0 \leq i \leq d} a_i \binom{X}{i}$  para algunos  $a_0, \dots, a_d \in \mathbb{Z}$ . Aquí  $\binom{X}{i} := \frac{1}{i!} X \cdot (X-1) \cdot (X-2) \cdots (X-i+1)$ .

*Demostración.* Está claro que 2) implica 1) porque  $\binom{m}{i} \in \mathbb{N}$  para cada  $m \in \mathbb{N}$  (por ejemplo por la definición combinatoria de los coeficientes binomiales), y para valores negativos tenemos la identidad

$$\binom{-m}{i} = (-1)^i \binom{m+i-1}{i}.$$

Para ver que 1) implica 2), antes que nada se ve que  $\binom{X}{i}$  forman una base de  $\mathbb{Q}[X]$  sobre  $\mathbb{Q}$ , por lo que cada polinomio con coeficientes en  $\mathbb{Q}$  puede ser escrito como

$$p(X) = \sum_{0 \leq i \leq d} a_i \binom{X}{i} \quad \text{para algunos } a_0, \dots, a_d \in \mathbb{Q}.$$

Tenemos que ver que si  $p$  tiene valores enteros sobre  $\mathbb{Z}$ , entonces  $a_i \in \mathbb{Z}$ . Esto es básicamente la **formula de diferencias divididas de Newton** que dice que si  $p$  es un polinomio de grado  $d$ , entonces

$$p(X) = \sum_{0 \leq i \leq d} (\Delta^i p)(0) \binom{X}{i},$$

donde  $\Delta^i p$  es el polinomio (que también tiene valores enteros en  $\mathbb{Z}$ ) definido por

$$\begin{aligned} (\Delta p)(X) &:= p(X+1) - p(X), \\ \Delta^i p &:= \Delta(\Delta^{i-1} p) \quad \text{para } i > 1. \end{aligned}$$

En particular,

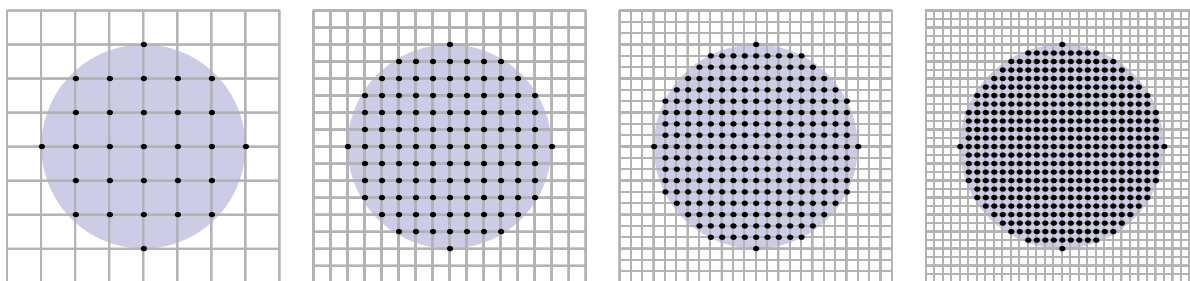
$$\begin{aligned} (\Delta^1 p)(0) &= p(1) - p(0), \\ (\Delta^2 p)(0) &= p(2) - 2p(1) + p(0), \\ (\Delta^3 p)(0) &= p(3) - 3p(2) + 3p(1) - p(0), \\ (\Delta^4 p)(0) &= p(4) - 4p(3) + 6p(2) - 4p(1) + p(0), \\ &\vdots \\ (\Delta^i p)(0) &= p(i) - \binom{i}{1} p(i-1) + \binom{i}{2} p(i-2) + \dots + (-1)^{i-1} p(1) + (-1)^i p(0). \end{aligned}$$

Entonces  $a_i = (\Delta^i p)(0) \in \mathbb{Z}$ . ■

Supongamos que ya sabemos que  $\ell_P(m)$  es un polinomio en  $m$  de grado  $d$ . Tenemos un corolario muy interesante que generaliza al teorema de Pick:

**13.3. Proposición.** Si  $\ell_P(m) = a_d m^d + \dots + a_1 m + a_0$  es el polinomio de Ehrhart de un politopo convexo entero de dimensión  $d$ , entonces  $a_d = \text{vol } P := \int_P dx$ .

*Demostración.* Para calcular aproximadamente el volumen de  $P$ , podemos considerar el subconjunto  $(\frac{1}{m}\mathbb{Z})^d \subset \mathbb{R}^d$  y contar cuántos de sus puntos pertenecen a  $P$ . Es la misma cosa que cortar a  $P$  en pequeños cubitos, cada uno de volumen  $\frac{1}{m^d}$ . Cuando  $m$  tiende a 0, el volumen total de los cubitos en  $P$  tiende al volumen de  $P$ .



En vez de considerar el conjunto  $(\frac{1}{m}\mathbb{Z})^d$ , podemos considerar la intersección del politopo dilatado  $mP$  con  $\mathbb{Z}^d$ :

$$\text{vol } P = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m^d} \cdot \# \left( P \cap \left( \frac{1}{m}\mathbb{Z} \right)^d \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m^d} \cdot \# (mP \cap \mathbb{Z}^d) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m^d} \cdot \ell_P(m).$$

Finalmente, ya que  $\ell_P(m)$  es un polinomio de grado  $d$ , se sigue que este límite es precisamente el coeficiente de  $m^d$ . ■

(Por supuesto, este argumento elemental funciona porque  $P$  es un subconjunto convexo compacto de  $\mathbb{R}^d$ ; en general la teoría de la medida es más sofisticada que cortes de figuras en cubitos.)

Notamos también que en el polinomio de Ehrhart  $\ell_P(m) = a_d m^d + \dots + a_1 m + a_0$  siempre tenemos  $a_0 = \ell_P(0) = 1$ .

Gracias a las **formulas de interpolación**, para calcular el polinomio  $\ell_P(m)$  para un politopo  $P \subset \mathbb{R}^d$  de dimensión  $d$  es suficiente de saber sus  $d + 1$  valores. Por ejemplo, podemos calcular directamente el número de puntos enteros en  $mP \cap \mathbb{Z}^d$  para  $m = 1, \dots, d + 1$ . Por lo menos para pequeños valores de  $d$  esto es un método útil para calcular  $a_d = \text{vol } P$ . O viceversa, si podemos calcular  $\text{vol } P$ , se ahorra un poco de trabajo para calcular  $\ell_P(m)$  porque ya conocemos dos coeficientes  $a_d = \text{vol } P$  y  $a_0 = 1$ .

**13.4. Ejercicio.** Sea  $p(X) = a_d X^d + a_{d-1} X^{d-1} + \dots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{Q}[X]$  un polinomio de grado  $d$ . Consideremos  $d + 1$  números  $x_1, x_2, \dots, x_{d+1} \in \mathbb{Q}$ . Observemos que tenemos

$$(*) \quad \begin{pmatrix} p(x_1) \\ p(x_2) \\ \vdots \\ p(x_{d+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^d & x_1^{d-1} & \dots & x_1 & 1 \\ x_2^d & x_2^{d-1} & \dots & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{d+1}^d & x_{d+1}^{d-1} & \dots & x_{d+1} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_d \\ a_{d-1} \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix}.$$

La matriz con potencias de  $x_1, \dots, x_d$  se llama la **matriz de Vandermonde**. Calcule su determinante

$$\begin{vmatrix} x_1^d & x_1^{d-1} & \dots & x_1 & 1 \\ x_2^d & x_2^{d-1} & \dots & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{d+1}^d & x_{d+1}^{d-1} & \dots & x_{d+1} & 1 \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < k \leq d+1} (x_j - x_k).$$

En consecuencia, si tomamos diferentes  $x_1, x_2, \dots, x_{d+1} \in \mathbb{Q}$ , la matriz es invertible y la ecuación (\*) permite calcular los coeficientes  $a_d, a_{d-1}, \dots, a_1, a_0$  de  $p$  a partir de sus valores  $p(x_1), p(x_2), \dots, p(x_{d+1})$ .

(Note que para polinomios sobre cuerpos finitos, esto no funciona; los coeficientes de un polinomio  $p \in \mathbb{F}_q[X]$  no están determinados por los valores de  $p$ .)

Intuitivamente está claro que el volumen de un politopo  $P$  puede ser calculado contando los puntos enteros en  $mP$  para  $m \rightarrow \infty$ . El resultado notable es que  $\ell_P(m)$  es un polinomio de grado  $d$ . Otra cosa sorprendente es que el polinomio

$$\ell_P(-m) = (-1)^d a_d m^d + (-1)^{d-1} a_{d-1} m^{d-1} + \dots - a_1 m + a_0$$

también tiene significado combinatorio: a saber, calcula los puntos enteros en el interior de  $P$ :

**13.5. Teorema (Reciprocidad de Ehrhart–Macdonald).** Sea  $P \subset \mathbb{R}^d$  un politopo convexo entero de dimensión  $d$ . Sea  $\ell_P(m) := \#(mP \cap \mathbb{Z}^d)$  su polinomio de Ehrhart. Entonces el número de puntos enteros en el interior de  $mP$  está dado por

$$\ell_{\overset{\circ}{P}}(m) := \#(m\overset{\circ}{P} \cap \mathbb{Z}^d) = (-1)^d \ell_P(-m),$$

donde " $\ell_P(-m)$ " es el polinomio  $\ell_P(m)$  evaluado en  $-m$  de modo formal.

En nuestro curso vamos a ver una demostración de 13.1 y 13.5 con métodos del álgebra homológica y conmutativa. En el libro de Beck y Robins se puede encontrar demostraciones elementales, pero en realidad la idea es la misma, solo que nosotros no vamos a ocultar los detalles conceptuales y así vamos a aprender un montón de matemáticas útiles.

**13.6. Ejemplo.** Sea  $P$  el octaedro

$$P := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid |x_1| + |x_2| + |x_3| \leq 1\} = \text{conv}\{(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 1)\}.$$

Su polinomio de Ehrhart  $\ell_P(m)$  es de grado 3:

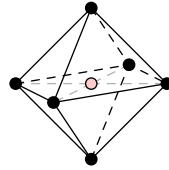
$$\ell_P(m) = a_3 m^3 + a_2 m^2 + a_1 m + a_0.$$

Ya sabemos que  $a_3 = \text{vol } P = \frac{4}{3}$  —el octaedro consiste de dos pirámides, cada una de volumen

$$\frac{1}{3} \times \text{área de la base} \times \text{altura} = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 1$$

y también sabemos que  $a_0 = 1$ . Los únicos coeficientes que no conocemos son  $a_2$  y  $a_1$ , así que necesitamos solo dos valores de  $\ell_P(m)$ . El octaedro tiene 7 puntos enteros: son sus vértices y el punto  $(0, 0, 0)$ , que está en el interior, de donde

$$\ell_P(1) = 7, \quad \ell_P(-1) = -\ell_{\hat{P}}(1) = -1.$$



Tenemos un sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} + a_2 + a_1 + 1 &= 7, \\ -\frac{4}{3} + a_2 - a_1 + 1 &= -1 \end{aligned}$$

cuya solución es  $a_2 = 2$  y  $a_1 = \frac{8}{3}$ , y entonces

$$\begin{aligned} \ell_P(m) &= \frac{4}{3} m^3 + 2 m^2 + \frac{8}{3} m + 1 = 8 \binom{m}{3} + 12 \binom{m}{2} + 6 \binom{m}{1} + 1, \\ \ell_{\hat{P}}(m) &= \frac{4}{3} m^3 - 2 m^2 + \frac{8}{3} m - 1 = 8 \binom{m}{3} + 4 \binom{m}{2} + 2 \binom{m}{1} - 1. \end{aligned}$$

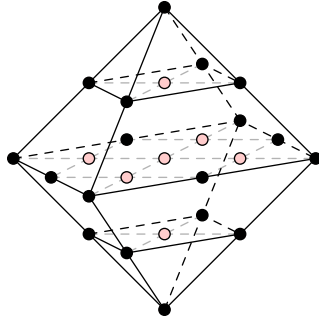
Usando estas formulas, calculamos que por ejemplo  $\ell_P(2) = 25$  y  $\ell_P(-2) = -7$ . Podemos comprobar estos resultados examinando  $2P$ . Es más fácil enumerar los puntos que están en el interior; son 7:

$$2\hat{P} \cap \mathbb{Z}^3 = \{(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}^3 \mid |n_1| + |n_2| + |n_3| < 2\} = \{(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 1), (0, 0, 0)\}.$$

Y además en la frontera hay 18 puntos más:

$$\begin{aligned} 2(P \setminus \hat{P}) \cap \mathbb{Z}^3 &= \{(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}^3 \mid |n_1| + |n_2| + |n_3| = 2\} \\ &= \{(\pm 2, 0, 0), (\pm 1, \pm 1, 0), (\pm 1, 0, \pm 1), (0, \pm 2, 0), (0, \pm 1, \pm 1), (0, 0, \pm 2)\}. \end{aligned}$$





Los valores de  $\ell_p(m)$  ([OEIS A001845](#)) son conocidos como **números octaédricos centrados** o **números octaédricos de Haüy**, porque aparecieron en el trabajo del mineralogista francés RENÉ JUST HAÜY (1743–1822), el fundador de la cristalografía; son la misma cosa que los **números de Delannoy**  $D(3, m)$  (HENRI-AUGUSTE DELANNOY (1833–1915), militar francés y matemático aficionado).

$m:$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\ell_p(m):$	1	7	25	63	129	231	377	575	833	1159	1561

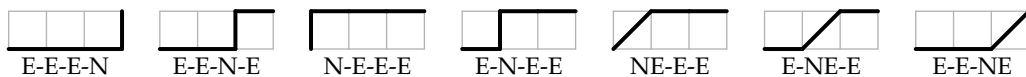
Por definición,  $D(p, q)$  es el número de caminos desde el punto  $(0, 0)$  al punto  $(p, q)$ , donde cada paso es en la dirección norte  $((i, j) \rightarrow (i, j + 1))$ , este  $((i, j) \rightarrow (i + 1, j))$ , o noreste  $((i, j) \rightarrow (i + 1, j + 1))$ . En particular, de la definición es obvio que

$$D(p, q) = D(q, p).$$

Por ejemplo, para  $(p, q) = (1, 1)$  hay 3 caminos:



y para  $(p, q) = (3, 1)$  hay 7 caminos:



Para  $(p, q) = (3, 2)$  hay 25 caminos:



				1						
				1		1				
			1		3		1			
		1		5		5		1		
	1		7		13		7		1	
	1	9		25		25		9		1
	1	11	41		63		41	11		1
1	13	61	129		129		61	13		1
1	15	85	231	321		231	85	15		1

▲

**13.7. Ejercicio.** Volvamos al tetraedro  $T_q$  de 12.7. Usando interpolación, demuestre que

$$\ell_{T_q}(m) = \frac{q}{6} m^3 + m^2 + \left(2 - \frac{q}{6}\right) m + 1$$

(recuerde que  $a_3 = \text{vol } T_q$  y  $a_0 = 1$ ).

**13.8. Ejercicio.** La fórmula de Pick para  $P \subset \mathbb{R}^2$  puede ser escrita como

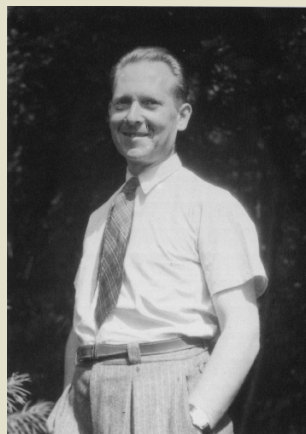
$$A = \frac{1}{2}(\ell_P(1) + \ell_{\hat{P}}(1) - 2).$$

Demuestre que en la dimensión  $d = 3$  la fórmula análoga es

$$\text{vol } P = \frac{1}{6}(\ell_P(2) - 3 \ell_P(1) - \ell_{\hat{P}}(1) + 3)$$

(de nuevo, use interpolación).

EUGÈNE EHRHART (1906–2000) fue un matemático francés que trabajó de profesor en varios *lycées* (colegios secundarios franceses) y hacía investigación como pasatiempo. No escribió su tesis de doctorado "Sur un problème de géométrie diophantienne linéaire" sino hasta 1966, instado por sus colegas. Se jubiló en 1971 pero siguió publicando resultados. Incluimos a continuación una página dedicada a Ehrhart: <http://icps.u-strasbg.fr/~clauss/Ehrhart.html>



El resultado de que  $\ell_P(m)$  es un polinomio proviene del artículo "Sur les polyèdres rationnels homothétiques à  $n$  dimensions", C.R. Acad. Sci. Paris 254 (1962), 616–618.

## 14. Polinomios de Ehrhart en SAGE

Para hacer cálculos con puntos enteros en politopos y polinomios de Ehrhart, SAGE utiliza la biblioteca LattE\* (“Lattice point Enumeration”, <https://www.math.ucdavis.edu/~latte/>). Para instalarla, hay que ejecutar la comanda `sage -i latte_int`.

```
sage: S = polytopes.simplex(4)
sage: p = S.ehrhart_polynomial()
sage: p
1/24*t^4 + 5/12*t^3 + 35/24*t^2 + 25/12*t + 1
sage: S.affine_hull().volume()
1/24
sage: len((2*S).integral_points())
15
sage: p(2)
15

sage: polytopes.tetrahedron().ehrhart_polynomial()
1/3*t^3 + t^2 + 5/3*t + 1
```

Por ejemplo, podemos calcular el polinomio de Ehrhart del octaedro:

```
sage: P = polytopes.octahedron()
sage: P
A 3-dimensional polyhedron in ZZ^3 defined as the convex hull of 6 vertices
sage: P.vertices()
(A vertex at (-1, 0, 0),
 A vertex at (0, -1, 0),
 A vertex at (0, 0, -1),
 A vertex at (0, 0, 1),
 A vertex at (0, 1, 0),
 A vertex at (1, 0, 0))
sage: P.ehrhart_polynomial()
4/3*t^3 + 2*t^2 + 8/3*t + 1
```

El resultado coincide con nuestro cálculo en [13.6](#).

---

\*¡café con leche!