19/10 **Capítulo 5 Teoría de Minkowski**

1) $K/\mathbb{Q}$ no trivial $\Rightarrow |\Delta_K| > 1$.

2) $K/\mathbb{Q} \rightsquigarrow Cl(K) = Pic(\mathcal{O}_K) = \mathcal{I}(\mathcal{O}_K)/\mathcal{P}(\mathcal{O}_K)$ es finito.

3) t. de Hermite: $C > 0$ fijo $\Rightarrow$ # finito (salvo iso) de campos de números $K/\mathbb{Q}$ t.q. $|\Delta_K| \leq C$.

4) t. de unidades de Dirichlet: $\mathcal{O}_K^\times$ es f.g. de rango $r_1 + r_2 - 1$

$r_1 = \#$ de encajes reales $\quad 2r_2 = \#$ de encajes complejos

$\exists\, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{r_1+r_2-1} \in \mathcal{O}_K^\times$ t.q.

$$\mathcal{O}_K^\times = \langle \varepsilon_1 \rangle \times \cdots \times \langle \varepsilon_{r_1+r_2-1} \rangle \times \mu_K$$

raíces de unidad.

§ Retículos y el teorema de Minkowski

def V - espacio vectorial $/\mathbb{R}$. Un **retículo** en V es un subgrupo abeliano $\Lambda \subset V$ de la forma $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \cdots + \mathbb{Z}\omega_n$, donde ω_i son l.i.almente independientes $/\mathbb{R}$.

Si $n = \mathrm{rk}\,\Lambda = \dim_{\mathbb{R}} V$, se dice que Λ tiene **rango completo** en V.

El conjunto

$$\Pi \overset{\text{def}}{=} \Big\{ \sum_i \lambda_i \omega_i \;\Big|\; 0 \leq \lambda_i < 1 \Big\}$$

se llama un dominio fundamental de Λ.

Ejemplo $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$.

$n = 2$

$\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}e_2$

$e_1 = (1,0)$

$e_2 = (0,1)$

$\mathbb{Z}[i] \subset \mathbb{C} \leftrightarrow \mathbb{R}^2$

Ejemplo $\mathbb{Z}[\zeta_3] \subset \mathbb{C} \longleftrightarrow \mathbb{R}^2$

$\omega_1 = (1,0)$, $\quad \omega_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Ejemplo $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \mathbb{Z}\cdot 1 + \mathbb{Z}\cdot\sqrt{2} \subset \mathbb{R}$

no es un retículo en $\mathbb{R}^1$.

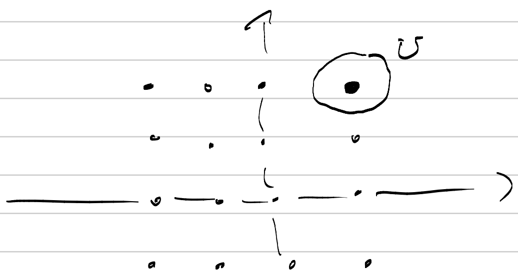
Lema $\Lambda \subset V$ tiene rango completo $\iff \exists X \subseteq V$ acotado

t.q. $V = \bigcup_{\omega\in\Lambda} X+\omega$

(ejercicio). "$\Rightarrow$" $X := \Pi$ $\quad V = \bigsqcup_{\omega\in\Lambda} \Pi + \omega$.

Lema Un subgrupo $\Lambda\subset V$ es un retículo si y solamente si Λ es discreto.

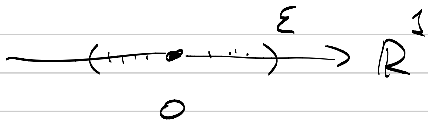
(*) $\Lambda \subset V$ es **discreto** $\iff \forall \omega\in\Lambda\ \exists U \ni \omega$ t.q. $U\cap\Lambda = \{\omega\}$



Ejemplo $\Lambda = \mathbb{Z}\cdot 1+\mathbb{Z}\cdot\sqrt{2} \subset \mathbb{R}^1$

no es un subgrupo discreto: $\forall \varepsilon>0\ \exists\ a+b\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$

t.q. $|a+b\sqrt{2}|<\varepsilon$.



(*) G - gpo topológico Hausdorff.

$H \subset G$ subgpo discreto $\Rightarrow$ H cerrado.

Producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V \to \mathbb{R}$

(forma bilineal definida positiva)

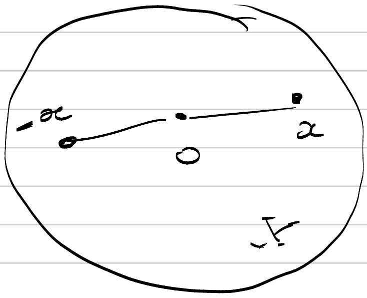
def Para $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1+\dots+\mathbb{Z}\omega_n \subset V$ el **covolumen**

$$\operatorname{covol}\Lambda := \operatorname{vol}\Pi = \sqrt{|\det(\langle\omega_i,\omega_j\rangle)_{i,j}|}$$

(no depende de la base)

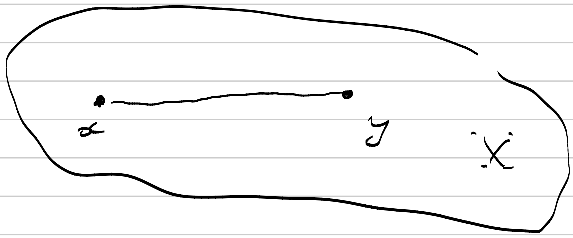
def Sea $X \subseteq V$ un subconjunto.

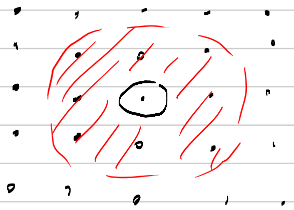
- X es **simétrico** (respecto al origen) si $\forall\, x \in X$: $-x \in X$



- X es **convexo** si $\forall\, x, y \in X$: la recta $[x,y] \subseteq X$

$$[x,y] = \{\lambda y + (1-\lambda)x \mid 0 \leq \lambda \leq 1\} \subseteq X$$



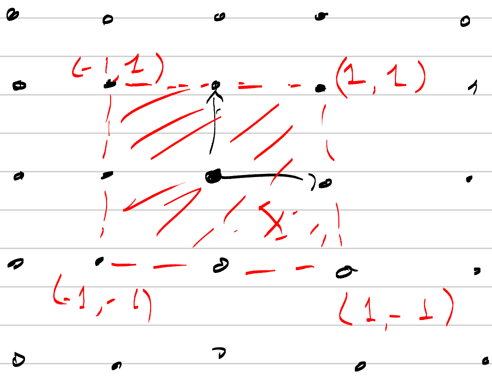


Teorema (**Minkowski**) Sean $\Lambda \subset V$ un retículo, $X \subset V$ conjunto convexo simétrico.

$$\operatorname{vol} X > 2^n \cdot \operatorname{covol} \Lambda \Rightarrow X \cap \Lambda \neq \{0\}$$

Ejemplo $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$

$\operatorname{vol}(X) = 4$



Ejercicio: Si X es cerrado

$\Rightarrow$ basta $\operatorname{vol} X = 2^n \cdot \operatorname{covol} \Lambda$

Lema (**Blichfeldt**) $X \subset V$ medible ~~convexo~~, $\operatorname{vol} X > \operatorname{covol} \Lambda$

$\Rightarrow \exists\, x, x' \in X$, $x \neq x'$ t.q. $x - x' \in \Lambda$.

Dem $V = \bigsqcup_{\omega \in \Lambda} \Pi + \omega \Rightarrow X = \bigsqcup_{\omega \in \Lambda} X \cap (\Pi + \omega)$

$$\operatorname{vol}(X) = \sum_{\omega \in \Lambda} \operatorname{vol}((X - \omega) \cap \Pi)$$

$\operatorname{vol} X > \operatorname{covol} \Lambda = \operatorname{vol} \Pi$

$\Rightarrow \quad (X-\omega) \cap \Pi \quad \omega \in \Lambda$ no son disjuntos.

$\exists\, \omega, \omega' \in \Lambda$ t.q. $(X-\omega) \cap (X-\omega') \neq \emptyset$

$y \in (X-\omega) \cap (X-\omega')$

$$x = y+\omega, \quad x' = y+\omega' \in X$$

$$x - x' = \omega - \omega' \in \Lambda$$

$\boxed{X}$

Demostración del teorema de Minkowski.

$$\tfrac{1}{2}X = \{ \tfrac{1}{2}x \mid x \in X \}$$

$$\mathrm{vol}\left(\tfrac{1}{2}X\right) = \frac{1}{2^n}\cdot \mathrm{vol}(X) > \mathrm{covol}(\Lambda)$$

Lema de Blichfeldt: $\exists \; x, x' \in \tfrac{1}{2}X$ t.q. $x - x' \in \Lambda$

$x \neq x'$

$$x - x' \overset{?}{\in} X$$

X simétrico $\Rightarrow -x' \in \tfrac{1}{2}X$

$$x = \tfrac{1}{2}y \qquad -x' = \tfrac{1}{2}y', \qquad y, y' \in X$$

$$x - x' = \tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{2}y' \in X$$ por la convexidad.

$\boxed{X}$

§ **Teorema de cuatro cuadrados**

(**Lagrange**): Todo $n \geq 0$ puede ser escrito

$$n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{Z}$$

Euler: $\underbrace{(a^2+b^2+c^2+d^2)\cdot(x^2+y^2+z^2+w^2)}_{\text{suma de cuatro cuadrados}} =$

$$(ax - by - cz - dw)^2 + (ay + bx + cw - dz)^2 +$$

$$(az - bw + cx + dy)^2 + (aw + bz - cy + dx)^2$$

Explicación ·) $(a^2+b^2)(x^2+y^2) = (ax-by)^2 + (ay+bx)^2$

$\mathbb{Z}[i]$, $\quad \alpha = a+bi \rightsquigarrow N(\alpha) = \alpha\bar{\alpha} = a^2+b^2$

$$N(\alpha\beta) = N(\alpha)\cdot N(\beta).$$

$$(a+bi)(x+yi) = (ax-by) + (ay+bx)i$$

·) Álgebra de cuaterniones:

$$\mathbb{H}(\mathbb{Z}) = \{a+bi+cj+dk \mid a,b,c,d \in \mathbb{Z}\}$$

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = k^2 = -1. \\ ij = k \qquad ji = -k \\ jk = i \qquad kj = -i \\ ki = j \qquad ik = -j \end{cases}$$

$\alpha = a+bi+cj+dk.$

$\bar{\alpha} = a-bi-cj-dk.$

$N(\alpha) = \alpha\cdot\bar{\alpha} = a^2+b^2+c^2+d^2.$

$$N(\alpha)\cdot N(\beta) = N(\alpha\beta).$$

Conclusión: basta probar el teorema para $n=p$ primo.

Lema $\forall$ primo p $\exists$ $m,n\in\mathbb{Z}$ tq

$$m^2+n^2+1 \equiv 0 \ (p).$$

Dem ejercicio.

Consideremos $V = \mathbb{R}^4$,

$$\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 + \mathbb{Z}\omega_3 + \mathbb{Z}\omega_4$$

$\omega_1 = (1,0,m,n)$

$\omega_2 = (0,1,n,-m)$ $\qquad$ $\operatorname{covol}\Lambda = p^2$

$\omega_3 = (0,0,p,0)$

$\omega_4 = (0,0,0,p)$

Lema $\forall\ \omega\in\Lambda$ $\quad \|\omega\|^2 = (\omega,\omega)$ es un entero divisible por p.

$$\omega = a\omega_1 + b\omega_2 + c\omega_3 + d\omega_4$$
$$= (a,\ b,\ am + bn + cp,\ an - bm + dp)$$
$$\|\omega\|^2 = a^2 + b^2 + (am + bn + \cancel{cp})^2 + (an - bm + \cancel{dp})^2$$
$$\equiv a^2 + b^2 + (am + bn)^2 + (an - bm)^2$$
$\left(\underline{m^2 + n^2} \underline{+1} \equiv 0 \pmod p\right)$

$$\equiv (a^2 + b^2)(m^2 + n^2 + 1) \equiv 0 \pmod p.$$
$\boxed{X}$

Sea X la bola en $\mathbb{R}^4$ de radio $r = \sqrt{2p}$

$$X = \{\underline{x \in \mathbb{R}^4} \mid \|x\|^2 < 2p\}$$

$$\boxed{\mathrm{vol}\, X \overset{?}{>} 2^4 \mathrm{covol}\, \Lambda}$$

$$\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \cdot r^n$$

$$\mathrm{vol}\, X = \frac{\pi^2 \cdot r^4}{2} = 2\pi^2 \cdot p^2$$

$$\mathrm{covol}\, \Lambda = p^2 \qquad 2\pi^2 > 16$$

<u>t. de Minkowski:</u> $X \cap \Lambda \neq \{0\}$

$\exists\, \omega \in \Lambda$ t.q. $0 < \|\omega\|^2 < 2p$,

$p \mid \|\omega\|^2$ $\Rightarrow$ $\|\omega\|^2 = p$.

$$\omega = (a, b, c, d) \Longrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = p.$$

Ganamos! $\boxed{X}$