**Teorema (Lagrange)** La f.c. para $\alpha$ es periódica
$\iff [\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]=2$.

**Dem** "$\Leftarrow$" $\quad \alpha \rightsquigarrow \quad (\alpha_n) \quad (a_n)$

$$\alpha_0=\alpha \qquad a_0=\lfloor \alpha_0 \rfloor$$

$$\boxed{\alpha_n=\frac{1}{\alpha_{n-1}-a_{n-1}}} \qquad a_n=\lfloor \alpha_n \rfloor$$

$[a_0, a_1, a_2, \dots]$

$m\neq n \qquad \alpha_m=\alpha_n$

$$f(x)=Ax^2+Bx+C, \quad \text{— pol. mínimo de } \alpha$$

$\Delta=\Delta(f)=B^2-4AC>0$. $\quad \Delta$ no es cuadrado.

Vamos a definir $\quad f_n(x)=A_nx^2+B_nx+C_n$

$$f_n(\alpha_n)=0 \qquad \Delta(f_n)=\Delta$$

—

$\underline{n=0}$: $\quad f_0=f$. $\qquad \alpha_n=a_n+\dfrac{1}{\alpha_{n+1}}$.

$$\underbrace{\alpha_{n+1}^2 f_n\left(a_n+\frac{1}{\alpha_{n+1}}\right)}=\alpha_{n+1}^2\, f_n(\alpha_n)=0$$

$$\Rightarrow \quad f_{n+1}(\alpha_{n+1})=0 \qquad f_{n+1}=A_{n+1}x^2+B_{n+1}x+C_{n+1}$$

$$\begin{cases} A_{n+1}=a_n^2A_n+a_nB_n+C_n \\ B_{n+1}=2a_nA_n+B_n \\ C_{n+1}=A_n \end{cases}$$

$$\Delta(f_{n+1})=\Delta(f_n)=\dots=\Delta$$

(La sucesión $(A_n)$ cambia el signo el $\#$ infinito de veces.

— Si $A_n>0$ para $n\gg 0 \Rightarrow B_n, C_n>0$.

$$f_n(\alpha_n)=\underline{A_n}\alpha_n^2+\underline{B_n}\alpha_n+\underline{C_n}>0.$$

$(\alpha_n>0$ para $n\geq 1)$

Para un # infinito de los $n$,

$$A_n A_{n-1} = A_n C_n < 0.$$

$$\Delta(\alpha_n) = B_n^2 - 4\,|A_n C_n| = \Delta.$$

$$|B_n| < \sqrt{\Delta}, \qquad |A_n|, |C_n| \leq \frac{1}{4}\Delta.$$

$\exists\ m, n$ t.q. $\quad \alpha_m = \alpha_n, \qquad \alpha_m = \alpha_n.$ $\boxtimes$

**Teorema** $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ número real cuadrático.

La f.c. para $\alpha$ es puramente periódica

$$\alpha = [\overline{a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}}] \iff \begin{cases} \alpha > 1 \\ -1 < \bar{\alpha} < 0. \end{cases}$$

$$\left(\bar{\cdot} : \sqrt{d} \mapsto -\sqrt{d}.\right)$$

**Corolario** $d > 1$ libre de cuadrados.

$$\sqrt{d} = [\lfloor \sqrt{d} \rfloor, \overline{a_1, \ldots, a_k}], \qquad a_k = 2\lfloor \sqrt{d} \rfloor$$

**Dem.** $\alpha = \sqrt{d} + \lfloor \sqrt{d} \rfloor. \quad \begin{cases} \alpha > 0. \\ -1 < \bar{\alpha} < 0. \end{cases}$

$$\Longrightarrow \alpha = [\overline{a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}}]. \qquad a_0 = \lfloor \alpha \rfloor = 2 \cdot \lfloor \sqrt{d} \rfloor.$$
$$= a_{k-1}$$

$$\sqrt{d} = \alpha - \lfloor \sqrt{d} \rfloor = [\lfloor \sqrt{d} \rfloor, \overline{a_1, \ldots a_{k-1}, a_k}] \quad \square$$

## § Ecuación de Pell

**Lema** Consideremos $\alpha = \sqrt{d}$

$$a_n = \lfloor \alpha_n \rfloor \qquad \alpha_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n - a_n}$$

1) $\alpha_n = \dfrac{A_n + \sqrt{d}}{B_n}$ $\qquad A_0 = 0, \quad B_0 = 1,$

$$A_{n+1} = a_n B_n - A_n, \qquad B_{n+1} = \frac{d - A_{n+1}^2}{B_n} \in \mathbb{Z}.$$

2) Si $k$ es el período de la f.c. para $\sqrt{d}$

$\sqrt{d} = [a_0, \overline{a_1, \dots, a_k}]$, entonces.

$B_n = 1 \iff k \mid n.$

3) $B_n \neq -1$ para ningún $n$. $\boxtimes$

**Proposición** $\sqrt{d} = [a_0, \overline{a_1, \dots, a_k}] \rightsquigarrow \frac{p_n}{q_n}.$

$$\boxed{p_n^2 - d \cdot q_n^2 = (-1)^{n+1} B_{n+1}}$$

En particular, $B_{kn} = 1$

$$\boxed{p_{kn-1}^2 - d\, q_{kn-1}^2 = (-1)^{kn}.}$$

**Dem** $\sqrt{d} = \alpha = \dfrac{\alpha_{n+1} p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1} q_n + q_{n-1}} = \dfrac{(A_{n+1} + \sqrt{d})\, p_n + B_{n+1} p_{n-1}}{(A_{n+1} + \sqrt{d})\, q_n + B_{n+1} q_{n-1}}$

$\alpha_{n+1} = \dfrac{A_{n+1} + \sqrt{d}}{B_{n+1}}$ ecuación $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$

$$\dots \Rightarrow p_n^2 - d q_n^2 = \underline{(p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n)} B_{n+1}$$

$$= (-1)^{n+1} B_{n+1}. \quad \square$$

**Conclusión**: de esta manera, se obtiene un # infinito de soluciones de $x^2 - dy^2 = \pm 1$

$$\left( p_{kn-1}^2 - d\, q_{kn-1}^2 = (-1)^{kn} \right)$$

**Proposición** Toda solución entera de $x^2 - dy^2 = \pm 1$ con $x, y > 0$ tiene forma $(x, y) = (p_n, q_n)$ para algún $n$;

donde $\frac{p_n}{q_n}$ sale de la d.c. para $\sqrt{d}$

**Dem** Por ejemplo, consideremos $x^2-dy^2=+1$.

$(x-y\sqrt{d})(x+y\sqrt{d})=1 \implies$

$$0<\frac{x}{y}-\sqrt{d}=\frac{1}{y(x+y\sqrt{d})}<\frac{\sqrt{d}}{y(x+y\sqrt{d})}=\frac{1}{y^2\left(\frac{x}{y\sqrt{d}}+1\right)}<\frac{1}{2y^2}$$

(usando $\frac{x}{y\sqrt{d}}>1$)

$$\left|\frac{x}{y}-\sqrt{d}\right|<\frac{1}{2y^2} \implies \frac{x}{y}=\frac{p_n}{q_n}$$

para algún $n$. ☒

**Teorema** Para $d>1$ libre de cuadrados, consideremos la d.c. $\sqrt{d}=[a_0, \overline{a_1,\dots,a_k}]$

Las soluciones enteras positivas de

$x^2-dy^2=\pm 1$ son

$(x,y)=(p_{kn-1}, q_{kn-1})$.

**Ejemplo** $x^2-41y^2=\pm 1$.

$\sqrt{41}=[6, \overline{2,2,12}]$ $\quad k=3$.

$(x,y)=(p_{3n-1}, q_{3n-1})$

$(p_2, q_2)=(32,5)$

$32^2-41\cdot 5^2=-1$

$d = \underbrace{2011}$ $\longrightarrow$ $x^2 - dy^2 = 1$

## § Unidades fundamentales en $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

$K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $d > 1$. $\mathcal{O}_K^\times = \{\pm 1\} \times \langle u \rangle$

unidad fundamental.

$\underline{d \equiv 1 \ (4)} \Rightarrow \mathcal{O}_K = \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{d}}{2}\right]$.

$v = a + b \cdot \frac{1+\sqrt{d}}{2} \in \mathcal{O}_K^\times$.

$N_{K/\mathbb{Q}}(v) = a^2 + ab + \frac{1-d}{4} b^2 = \pm 1$

$d \equiv 1 \ (8) \Rightarrow b$ par. $\Rightarrow v \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times$.

$d \equiv 5 \ (8) \Longrightarrow v^3 \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times$.

— Si $d \equiv 2, 3 \ (4)$, o $d \equiv 1 \ (8)$, entonces

$$\mathcal{O}_K^\times = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times.$$

— $d \equiv 5 \ (8)$, entonces $\forall\, v \in \mathcal{O}_K^\times$ $v^3 \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times$.

$([\mathcal{O}_K^\times : \mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times] = 1$ ó $3)$

Para encontar la unidad fundamental de $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times$:

$$\{x + y\sqrt{d} \mid x, y > 0,\ x^2 - dy^2 = \pm 1\} = \{u^n \mid n = 1, 2, 3, \ldots\}$$

$$u = p_{k-1} + q_{k-1}\sqrt{d}.$$

Luego, si $d \equiv 5 \ (8)$, si $u$ es la unidad fundamental en $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times$, entonces la u.d. en $\mathcal{O}_K^\times$ es la misma

la u.d. en $\mathcal{O}_K^\times$ es $v$, donde $v^3 = u$

Ejemplo $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ $\sqrt{2} = [1, \overline{2}]$

$\frac{p_0}{q_0} = 1 \Rightarrow (p_0, q_0) = (1, 1)$.

$\Rightarrow u = 1 + \sqrt{2}$

Ejemplo $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$. $\sqrt{5} = [2, \overline{4}]$

$\frac{p_0}{q_0} = 2$ $p_0 = 2$, $q_0 = 1$

$\Rightarrow u = \underline{2} + \underline{\sqrt{5}} \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]^\times$

$\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$. $v = A + B\,\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

$v^3 = u$.

$A = 0$, $B = 1$ $\begin{cases} A^3 + \frac{3}{2} A^2 B + \frac{9}{2} A B^2 + 2B^3 = 2, \\ \frac{3}{2} A^2 B + \frac{3}{2} A B^2 + B^3 = 1 \end{cases}$

$v = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ — la u.d. de $\mathcal{O}_K^\times$.

Ejemplo $K = \mathbb{Q}(\sqrt{13})$ $\sqrt{13} = [3, \overline{1,1,1,1,6}]$

$k = 5 \Rightarrow (p_4, q_4) = (18, 5)$.

la u.d. de $\mathbb{Z}[\sqrt{13}]^\times$ es $18 + 5\sqrt{13}$.

$v = A + B \cdot \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ $v^3 = u$

$\Rightarrow v = 1 + \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ — la u.d. en $\mathcal{O}_K^\times$

$$\mathbb{Z}[\sqrt{37}]^\times = \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{37}}{2}\right]^\times.$$

(aunque $37 \equiv 5 \ (8)$)