Valores especiales de funciones zeta de Dedekind y series L de Dirichlet

30/11/2020

Recordatorio sobre funciones zeta y series L

Funciones zeta de Dedekind

- **Campo de números**: extensión finita $K/\mathbb{Q}$.
- **Anillo de enteros**:

$$\mathcal{O}_K = \{\alpha \in K \mid f(\alpha) = 0 \text{ para } f \in \mathbb{Z}[x] \text{ mónico}\}.$$

- **Norma de ideales**: $N_{K/\mathbb{Q}}(I) = \#(\mathcal{O}_K/I)$ para $I \neq 0$.
- **Función zeta de Dedekind**:

$$\zeta_K(s) = \sum_{0 \neq I \subseteq \mathcal{O}_K} \frac{1}{N_{K/\mathbb{Q}}(I)^s} = \prod_{0 \neq \mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K} \frac{1}{1 - N_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^{-s}}.$$

- $\zeta_{\mathbb{Q}}(s) = \zeta(s)$ es la **función zeta de Riemann**.

Series L de Dirichlet

- **Carácter de Dirichlet**:

$$\chi\colon (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times.$$

- χ es **primitivo** si m es el mínimo posible (no está inducido por $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \to (\mathbb{Z}/m'\mathbb{Z})^\times$ para $m' \mid m$).
- $\chi(n) = 0$ si $\mathrm{mcd}(n, m) \neq 1$.
- **Serie L de Dirichlet**:

$$L(s,\chi) = \sum_{n\geq 0} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-\chi(p)\,p^{-s}}.$$

Caso abeliano

- **Kronecker–Weber**: si $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ es abeliano, entonces $K \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_m)$ para algún m.
- $K \leftrightarrow H \subseteq \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \leftrightarrow X \subseteq (\widehat{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}})^\times$.
- $\zeta_K = \prod_{\chi \in X} L(s, \chi)$.

Prolongación analítica

Prolongación analítica para $\zeta_K(s)$

- $\zeta_K(s)$ se extiende a una función meromorfa sobre $s \in \mathbb{C}$ con único polo simple en $s = 1$.
- **Ecuación funcional**: $\zeta_K(1-s) = A(s)\,\zeta_K(s)$,
- $A(s) = |\Delta_K|^{s-1/2}\, \left(\cos\frac{\pi s}{2}\right)^{r_1+r_2}\, \left(\operatorname{sen}\frac{\pi s}{2}\right)^{r_2}\, \left(2\,(2\pi)^{-s}\,\Gamma(s)\right)^n$,
- $n = [K:\mathbb{Q}]$,
- r_1 — número de encajes reales $K \hookrightarrow \mathbb{R}$,
  $2r_2$ — número de encajes complejos $K \hookrightarrow \mathbb{C}$,
- $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{s-1}\, dt$ — la **función Gamma**,
  $\Gamma(k) = (k-1)!$ para $k = 1, 2, 3, \ldots$
- $K = \mathbb{Q}$: ecuación funcional para la zeta de Riemann

$$\zeta(1-s) = \left(\cos\frac{\pi s}{2}\right)\, 2\,(2\pi)^{-s}\,\Gamma(s)\,\zeta(s).$$

Polo en $s=1$ vs. cero en $s=0$

$$\zeta_K(1-s) = |\Delta_K|^{s-1/2} \left(\cos\frac{\pi s}{2}\right)^{r_1+r_2} \left(\operatorname{sen}\frac{\pi s}{2}\right)^{r_2} \left(2\,(2\pi)^{-s}\,\Gamma(s)\right)^n \zeta_K(s).$$

- Pongamos $s=1$.
- $\left(\cos\frac{\pi s}{2}\right)^{r_1+r_2} \rightsquigarrow$ cero de orden r_1+r_2.
- $\zeta_K(s) \rightsquigarrow$ polo de orden 1 de residuo

$$\zeta_K^*(1) = \lim_{s\to 0}\,(s-1)\,\zeta_K(s) = \frac{2^{r_1}\,(2\pi)^{r_2}\ \mathrm{Reg}_K\ h_k}{\#\mu_K\,\sqrt{|\Delta_K|}}$$

  (**fórmula del número de clases**).
- Cero de orden r_1+r_2-1 de residuo

$$\zeta_K^*(0) = \lim_{s\to 0} s^{-(r_1+r_2-1)}\,\zeta_K(s) = -\frac{\mathrm{Reg}_K\ h_k}{\#\mu_K}.$$

Ceros triviales

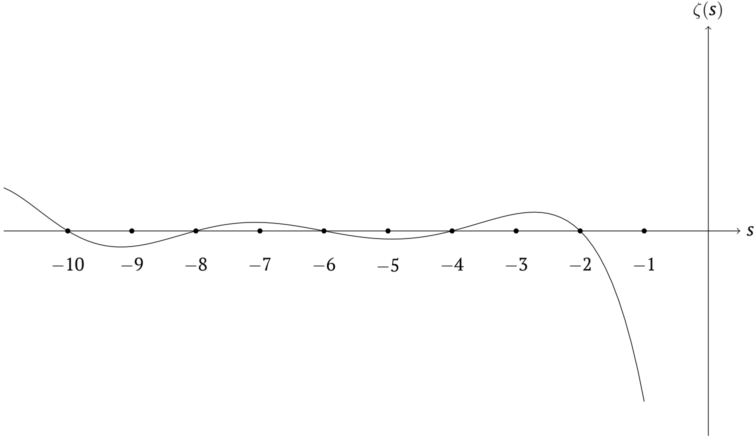
$$\zeta_K(1-s) = |\Delta_K|^{s-1/2} \left(\cos\frac{\pi s}{2}\right)^{r_1+r_2} \left(\operatorname{sen}\frac{\pi s}{2}\right)^{r_2} \left(2\,(2\pi)^{-s}\,\Gamma(s)\right)^n \zeta_K(s).$$

Ceros en $s = 0, -1, -2, -3, \ldots$

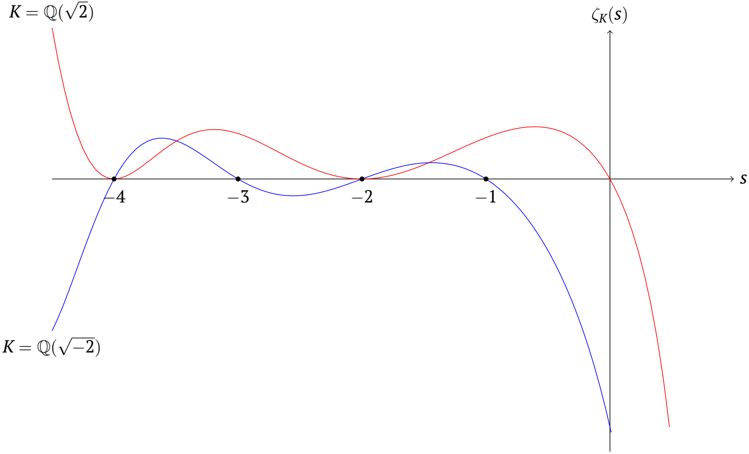
s:	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	$\cdots$
ord:	r_1+r_2-1	r_2	r_1+r_2	r_2	r_1+r_2	r_2	r_1+r_2	$\cdots$

Hipótesis de Riemann extendida: otros ceros tienen $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$.

Valores negativos de la zeta de Riemann



Valores negativos para $K = \mathbb{Q}(\sqrt{\pm 2})$



Prolongación analítica para $L(s, \chi)$

- χ — carácter primitivo mód m.
- **Ecuación funcional**: $L(1-s, \chi) = A(s)\, L(s, \overline{\chi})$,
- $A(s) = \frac{m^{s-1}\,\Gamma(s)}{(2\pi)^s}\,\left(e^{-\pi i s/2} + \chi(-1)\, e^{\pi i s/2}\right)\, g(\chi)$,
- **Suma de Gauss**: $g(\chi) = \sum_{1 \le a \le m-1} \chi(a)\, \zeta_m^a$.

Ceros triviales

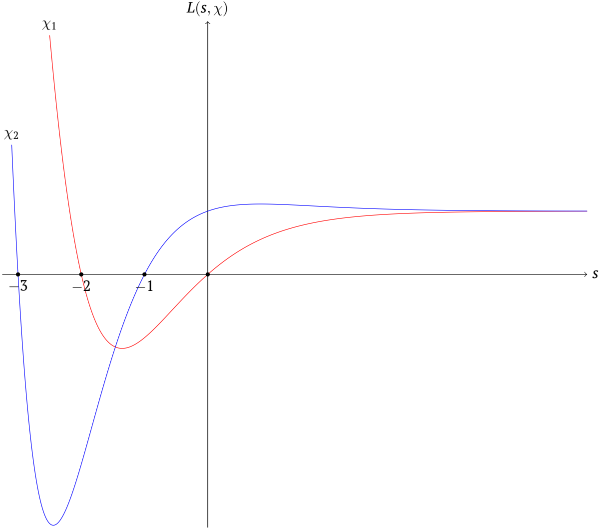
$$L(1-s,\chi) = \frac{m^{s-1}\,\Gamma(s)}{(2\pi)^s}\,\left(e^{-\pi i s/2} + \chi(-1)\,e^{\pi i s/2}\right)\,g(\chi)\,L(s,\overline{\chi}).$$

$$e^{-\pi i s/2} + \chi(-1)\,e^{\pi i s/2} = \begin{cases} 2\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right), & \text{si } \chi(-1) = +1, \\ -2i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi s}{2}\right), & \text{si } \chi(-1) = -1. \end{cases}$$

- $\chi(-1) = +1$: ceros simples en $s = 0, -2, -4, -6, \ldots$
- $\chi(-1) = -1$: ceros simples en $s = -1, -3, -5, \ldots$

Hipótesis de Riemann generalizada: otros ceros tienen $\mathrm{Re}\, s = \frac{1}{2}$.

Prolongación para $\chi = \left(\frac{\pm 8}{\cdot}\right)$



Valores especiales

Valores especiales

- Para $s = n \in \mathbb{Z}$ sea d_n el orden de cero en $s = n$.
- $\zeta_K^*(n) = \lim_{s \to n}(s-n)^{-d_n}\,\zeta_K(s)$.
- Ejemplo primordial:

$$\zeta_K^*(0) = -\frac{\operatorname{Reg}_K h_k}{\#\mu_K} \longleftrightarrow \zeta_K^*(1) = \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}\operatorname{Reg}_K h_k}{\#\mu_K\sqrt{|\Delta_K|}}.$$

- ¿Cómo generalizar estas fórmulas?
- Similar para las funciones $L(s,\chi)$.

Teorema de Siegel-Klingen

- Para un campo totalmente real ($r_2 = 0$) los valores $\zeta_K(-1), \zeta_K(-3), \zeta_K(-5), \ldots$ son números racionales.
- Objetivo de hoy: prueba en el caso abeliano.

Números y polinomios de Bernoulli

Números y polinomios de Bernoulli

- **números de Bernoulli** $B_k \in \mathbb{Q}$:

$$\frac{t\,e^t}{e^t - 1} = \sum_{k\geq 0} \frac{B_k}{k!}\,t^k,$$

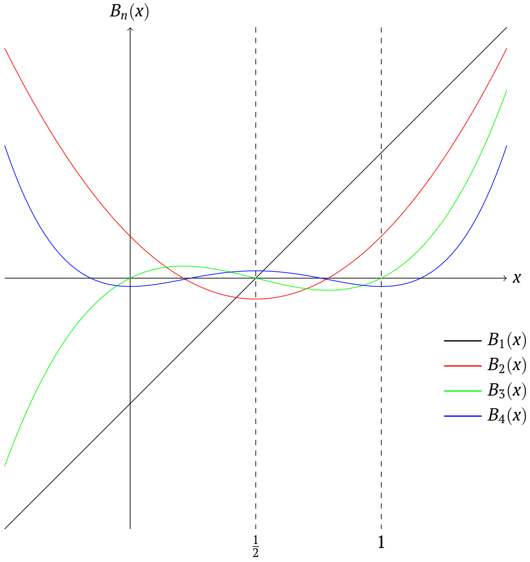
- **polinomios de Bernoulli** $B_k(x) \in \mathbb{Q}[x]$:

$$\frac{t\,e^{tx}}{e^t - 1} = \sum_{k\geq 0} B_k(x)\,\frac{t^k}{k!}.$$

Números y polinomios de Bernoulli

k	$B_k(x)$	B_k
0	1	1
1	$x - \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2	$x^2 - x + \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
3	$x^3 - \frac{3}{2}\,x^2 + \frac{1}{2}\,x$	0
4	$x^4 - 2\,x^3 + x^2 - \frac{1}{30}$	$-\frac{1}{30}$
5	$x^5 - \frac{5}{2}\,x^4 + \frac{5}{3}\,x^3 - \frac{1}{6}\,x$	0
6	$x^6 - 3\,x^5 + \frac{5}{2}\,x^4 - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{42}$	$\frac{1}{42}$
7	$x^7 - \frac{7}{2}\,x^6 + \frac{7}{2}\,x^5 - \frac{7}{6}\,x^3 + \frac{1}{6}\,x$	0
8	$x^8 - 4\,x^7 + \frac{14}{3}\,x^6 - \frac{7}{3}\,x^4 + \frac{2}{3}\,x^2 - \frac{1}{30}$	$-\frac{1}{30}$
9	$x^9 - \frac{9}{2}\,x^8 + 6\,x^7 - \frac{21}{5}\,x^5 + 2\,x^3 - \frac{3}{10}\,x$	0
10	$x^{10} - 5\,x^9 + \frac{15}{2}\,x^8 - 7\,x^6 + 5\,x^4 - \frac{3}{2}\,x^2 + \frac{5}{66}$	$\frac{5}{66}$

Polinomios de Bernoulli



Propiedades básicas

- $B_k(1) = B_k$.
- $B_k(x+1) - B_k(x) = k\,x^{k-1}$.
  En particular, $B_k(0) = B_k$ para $k \neq 1$.
- $B_k(1-x) = (-1)^k\,B_k(x)$.
  En particular, $B_k = 0$ para $k \geq 3$ impar.
- $B_k'(x) = k\,B_{k-1}(x)$ y $\int_0^1 B_k(x)\,dx = 0$ para $k \geq 1$.

Series de Fourier

- $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua por trozos, periódica tal que $f(x+1) = f(x)$.
- Para todo $x_0 \in \mathbb{R}$ donde f es continua y las derivadas izquierda y derecha de f existen,

$$f(x_0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\, e^{2\pi i n x_0},$$

  donde

$$\widehat{f}(n) = \int_0^1 e^{-2\pi i n x}\, f(x)\, dx.$$

...para polinomios de Bernoulli

$$B_k(x - \lfloor x \rfloor) = -\frac{k!}{(2\pi i)^k} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \frac{e^{2\pi i n x}}{n^k}.$$

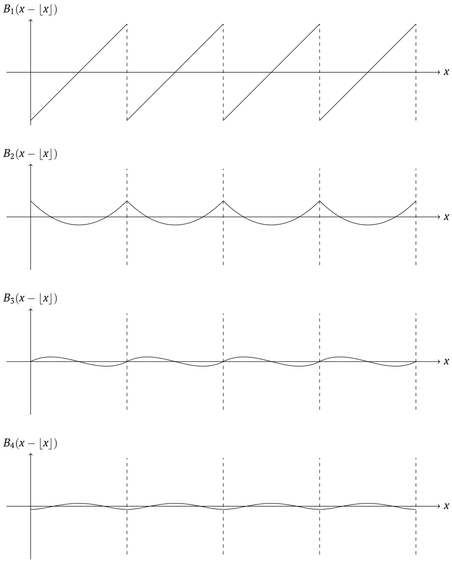
- Para $x = 0$ y $2k$:

$$\begin{aligned} B_{2k} &= B_{2k}(0) \\ &= -\frac{(2k)!}{(-1)^k \, (2\pi)^{2k}} \, 2 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{2k}} \\ &= (-1)^{k+1} \frac{(2k)!}{2^{2k-1} \, \pi^{2k}} \, \zeta(2k). \end{aligned}$$

- **Euler**:

$$\zeta(2k) = (-1)^{k+1} \, B_{2k} \, \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} \, \pi^{2k}.$$

Funciones periódicas $B_n(x - \lfloor x \rfloor)$



Ejemplos

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}644934\ldots,$$
$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} \approx 1{,}082323\ldots,$$
$$\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945} \approx 1{,}017343\ldots,$$
$$\zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450} \approx 1{,}004077\ldots,$$
$$\zeta(10) = \frac{\pi^{10}}{93\,555} \approx 1{,}000994\ldots,$$
$$\zeta(12) = \frac{691\,\pi^{12}}{638\,512\,875} \approx 1{,}000246\ldots$$

Corolarios

$$\zeta(2k) = (-1)^{k+1} B_{2k} \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} \pi^{2k}.$$

- $(-1)^{k+1} B_{2k} > 0$ para $k \geq 1$.
- $|B_{2k+2}| > |B_{2k}|$ para $k \geq 3$.
- $\zeta(-n) = -\frac{B_{n+1}}{n+1}$ para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Valores impares

- **Apéry, 1977**: $\zeta(3) \approx 1{,}2020569031\ldots$ es irracional.
- **Rivoal, 2000**: infinitud de irracionales entre $\zeta(2k+1)$
- **Zudilin, 2004**: entre $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$ uno es irracional.
- **Gran conjetura**: los $\zeta(2k+1)$ son trascandentes, algebraicamente independientes entre sí.

Números de Bernoulli generalizados

Números de Bernoulli generalizados

- $\chi\colon (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$ — carácter de Dirichlet primitivo.
- Números de Bernoulli generalizados $B_{k,\chi} \in \mathbb{Q}(\zeta_m)$:

$$\sum_{k\geq 0} B_{k,\chi}\,\frac{t^k}{k!} = \sum_a \frac{\chi(a)\,t\,e^{at}}{e^{mt}-1},$$

  suma sobre $1 \leq a \leq m-1$.

- $B_{k,\chi} = 0$ si $\chi(-1) = (-1)^{k+1}$.
- $B_{k,\chi} = m^{k-1}\sum_a \chi(a)\,B_k(a/m)$.

Sumas de Gauss

- $g(\chi) = \sum_a \chi(a)\, \zeta_m^a$.
- $g_n(\chi) = \sum_a \chi(a)\, \zeta_m^{an}$.
- **Lema 1**: $\overline{\chi(n)}\, g(\chi) = g_n(\chi)$.
  En particular, $\overline{g(\chi)} = \chi(-1)\, g(\overline{\chi})$.
- **Lema 2**: $|g(\chi)|^2 = g(\chi)\, \overline{g(\chi)} = m$.
  En particular, $g(\chi)^{-1} = \frac{1}{m}\, \chi(-1)\, g(\overline{\chi})$.

Teorema

- χ carácter primitivo mód m,
- $k > 1$ cumple $\chi(-1) = (-1)^k$,
- $L(k, \chi) = (-1)^{k+1} \frac{(2\pi i)^k}{2 \cdot k!\, m^k}\, g(\chi)\, B_{k,\overline{\chi}}$.

Demostración

- Lema 1: $\chi(n)\,g(\overline{\chi}) = \sum_a \overline{\chi(a)}\,\zeta_m^{an}$.
- $L(k,\chi)\,g(\overline{\chi}) = \sum_a \overline{\chi(a)}\,\sum_{n\geq 1} \frac{\zeta_m^{an}}{n^k}$.
- Usando $\chi(-1) = (-1)^k$,
  $L(k,\chi)\,g(\overline{\chi}) = \frac{1}{2}\sum_a \overline{\chi(a)}\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \frac{\zeta_m^{an}}{n^k}$.
- Serie de Fourier: $B_k(x-\lfloor x\rfloor) = -\frac{k!}{(2\pi i)^k}\,\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \frac{e^{2\pi i n x}}{n^k}$.
- Sustituyendo $x = a/m$: $\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \frac{\zeta_m^{an}}{n^k} = -\frac{(2\pi i)^k}{k!}\,B_k(a/m)$.
- Expresión para $B_{k,\chi}$ en términos de $B_k(x)$:
  $L(k,\chi)\,g(\overline{\chi}) = -\frac{(2\pi i)^k}{2\cdot k!}\sum_a \overline{\chi(a)}B_k(a/m) = -\frac{(2\pi i)^k}{2\cdot k!\,m^{k-1}}\,B_{k,\overline{\chi}}$.

Demostración (cont.)

- $L(k,\chi)\, g(\overline{\chi}) = -\frac{(2\pi i)^k}{2\cdot k!} \sum_a \overline{\chi(a)} B_k(a/m) = -\frac{(2\pi i)^k}{2\cdot k!\, m^{k-1}}\, B_{k,\overline{\chi}}$.
- Lema 2: $g(\overline{\chi})^{-1} = \frac{1}{m}\, \chi(-1)\, g(\chi) = \frac{1}{m}\, (-1)^k\, g(\chi)$.
- Conclusión: $L(k,\chi) = (-1)^{k+1}\, \frac{(2\pi i)^k}{2\cdot k!\, m^k}\, g(\chi)\, B_{k,\overline{\chi}}$.

Corolarios

$$L(k,\chi) = (-1)^{k+1}\,\frac{(2\pi i)^k}{2\cdot k!\,m^k}\,g(\chi)\,B_{k,\overline{\chi}}.$$

- Si $\chi(-1) = (-1)^k$ para $k > 1$, entonces $B_{k,\chi} \neq 0$.
  ($L(s,\chi) = \prod_p \frac{1}{1-\chi(p)\,p^{-s}} \neq 0$ para $s > 1$.)
- $L(-n,\chi) = -\frac{B_{n+1,\chi}}{n+1}$ para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$
  (Ecuación funcional.)

Siegel-Klingen abeliano

Demostración

- $K/\mathbb{Q}$ totalmente real, abeliano.
- $\zeta_K(s) = \prod_{\chi \in X} L(s, \chi)$.
- K totalmente real $\iff \chi(-1) = +1$ para $\chi \in X$.
- $\zeta_K(-n) = (-1)^{[K:\mathbb{Q}]} \prod_{\chi \in X} \frac{B_{n+1,\chi}}{n+1}$.
- $B_{n+1,\chi} \in \mathbb{Q}(\zeta_m)$, pero $\prod_{\chi \in X} B_{n+1,\chi}$ es $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q})$-invariante.

Ejemplo: $\mathbb{Q}(\zeta_7 + \zeta_7^{-1})$

- $K = \mathbb{Q}(\zeta_7 + \zeta_7^{-1})$.
- $X = \{1, \chi, \overline{\chi}\}$, donde χ es un carácter cúbico de $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\times$:
  $\chi\colon 1 \mapsto 1, \quad 2 \mapsto \zeta_3^2, \quad 3 \mapsto \zeta_3, \quad 4 \mapsto \zeta_3, \quad 5 \mapsto \zeta_3^2, \quad 6 \mapsto 1.$
- Nota: $B_{k,\overline{\chi}} = \overline{B_{k,\chi}}$, $B_{k,\chi}\, B_{k,\overline{\chi}} = |B_{k,\chi}|^2$.
- Algunos cálculos:

k:	1	2	3	4	5	6	7
B_k:	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0
$B_{k,\chi}$:	0	$\frac{8-4\,\zeta_3}{7}$	0	$\frac{-128+88\,\zeta_3}{7}$	0	$672 - 516\,\zeta_3$	0
$B_{k,\chi}\, B_{k,\overline{\chi}}$:	0	$\frac{16}{7}$	0	$\frac{5056}{7}$	0	1064592	0
$\zeta_K(1-k)$:	0	$-\frac{1}{21}$	0	$\frac{79}{210}$	0	$-\frac{7393}{63}$	0

Ejemplo: $\mathbb{Q}(\zeta_7 + \zeta_7^{-1})$ (cont.)

```
? f = x^3 + x^2 - 2*x - 1;
? for (k=1,6, print ([-k, bestappr (lfun(f,-k))]))
[-1, -1/21]
[-2, 0]
[-3, 79/210]
[-4, 0]
[-5, -7393/63]
[-6, 0]
```

Ejemplo: $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$

- $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \subset \mathbb{Q}(\zeta_{24})$.
- $X = \{1, \chi_1, \chi_2, \chi_1\chi_2\}$, donde χ_1 es un carácter cuadrático de $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$ y χ_2 es un carácter cuadrático de $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^\times$:
  $\chi_1\colon 1 \mapsto +1, \quad 3 \mapsto -1, \quad 5 \mapsto -1, \quad 7 \mapsto +1;$
  $\chi_2\colon 1 \mapsto +1, \quad 5 \mapsto -1, \quad 7 \mapsto -1, \quad 11 \mapsto +1.$
- Algunos cálculos:

k:	1	2	3	4	5	6	7
B_k:	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0
B_{k,χ_1}:	0	2	0	-44	0	2166	0
B_{k,χ_2}:	0	4	0	-184	0	20172	0
$B_{k,\chi_1\chi_2}$:	0	12	0	-2088	0	912996	0
$\zeta_K(1-k)$:	0	1	0	$\frac{22011}{10}$	0	$\frac{2198584943}{3}$	0

Ejemplo: $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ (cont.)

```
? f = x^4 - 10*x^2 + 1;
? for (k=0,6, print ([-k, bestappr (lfun(f,-k))]))
[0, 0]
[-1, 1]
[-2, 0]
[-3, 22011/10]
[-4, 0]
[-5, 2198584943/3]
[-6, 0]
```

¡Gracias por su atención!